S. 1802. C. 32

L3. 6. 16

1/2 # 15

S 1802.c.32.

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XVII.

pro Anno MDCCLXXII.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXXIII.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XVII.

MATHEMATICA.

I.

De indole ſingulari ſerierum infinitarum, quas ſinus vel coſinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque ſummatione et vſu.

Auctore Daniele Bernoulli pag. 5.

In diſſertatione, praecedenti horum Commentariorum Tomo inſerta, Celeb. Auctor duas ſeries quam maxime notatu dignas ex ordine ſerierum recurrentium, earumque genuinam ſummationem et interpretationem meditationi ſuae ſubiecit, quae ita ſeſe habebant:

Si in circulo, cuius radius $= 1$, ſit arcus quicunque $= x$; erit

$$\text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2x + \text{coſ.}\, 3x + \text{coſ.}\, 4x + \text{etc} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{et ſin.}\, x + \text{ſin.}\, 2x + \text{ſin.}\, 3x + \text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{\text{ſin.}\, x}{2\, \text{ſin. verſ.}\, x}$$

 quas

quas quidem ſummas non niſi ſingulari atque incongruo quaſi modo veras dici poſſe, a Cel. Viro eſt oſtenſum. Hoc tamen non obſtante ex his duabus ſeriebus quaſi ambiguis facili et legitima methodo aliae memoratu non minus dignae nullique prorſus amphiboliae ſubiectae poſſunt deriuari, quarum inveſtigatio huius, quam nunc tradimus, diſſertationis argumentum conſtituit; et quarum aliquas operae pretium eſt hic ſuccincte expoſuiſſe:

Si ponatur quadrans circuli $= q$; erit

I) $\text{ſin.}\, x + \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\, 2x + \frac{1}{3}\,\text{ſin.}\, 3x + \frac{1}{4}\,\text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = q - \frac{1}{2}x$

II) $\text{coſ.}\, x + \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\, 2x + \frac{1}{9}\,\text{coſ.}\, 3x + \frac{1}{16}\,\text{coſ.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qq - qx + \frac{1}{4}x^2.$

III) $\text{ſin.}\, x + \frac{1}{8}\,\text{ſin.}\, 2x + \frac{1}{27}\,\text{ſin.}\, 3x + \frac{1}{64}\,\text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{2}{3}qqx - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{12}x^3.$

IV) $\text{coſ.}\, x + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\, 2x + \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\, 3x + \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\, 4x + \text{etc.} = \frac{1}{2}\log. \frac{1}{2\,\text{ſin. verſ.}\, x}.$

quae ſeries non ſolum ſunt nouae, ſed ideo etiam memorabiles, quod ſumma ſinuum vel coſinuum definiatur per arcum circuli.

His ſeriebus plures analogas Cel. Auctor inveſtigat; totiusque huius theoriae vſum exponit in explicanda doctrina de minimis vibrationibus chordarum tenſarum vniformium, pro quarum ſcilicet curvatura primitiua, ſumto abſciſſarum initio in alterutra chordae extremitate, poſitaque abſciſſa qualicunque $= x$ et minima adplicata $= y$, oſtendit Cel. Vir in Actis Acad. Reg. Berol. hanc ſtatui poſſe aequationem

$$y = \alpha.\,\text{ſin.}\, x + \beta\,\text{ſin.}\, 2x + \gamma.\,\text{ſin.}\, 3x + \text{etc.}$$

vbi quidem α, β, γ etc. deſignant paruulas quantitates arbitrarias et conſtantes.

II.

II.
Problematis cuiusdam diophantei euolutio.

Auctore L. Eulero pag. 24.

Methodus diophantea quanta Ill. *Eulero* et quam praeclara debeat incrementa, inter Geometras conſtat, et ſane, qui, quantum Analyſis ſublimior ex ea ipſa lucri ſit adepta, perpenderit, eam minime eſſe repudiandam, haud aegre fatebitur, adde, quod eiusmodi inueſtigationes ſuis non careant deliciis animoque grauioribus ſtudiis defeſſo haud ingratam recreationem afferant. Problema, quod Ill. Vir hic pertractat, difficillimum vtique, ita ſe habet:

Inuenire quatuor numeros eius indolis, vt 1°. *ſumma ſingulorum*, 2°. *ſumma factorum ex binis*, 3° *ſumma factorum ex ternis*, *et* 4to. *productum omnium ſint numeri quadrati*

vel quod eodem redit.

Inuenire aequationem biquadraticam huius formae:

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

quae omnes ſuas radices habeat rationales et cuius ſinguli coëfficientes A, B, C, D ſint numeri quadrati.

Huius vero problematis ſolutionem generalem fruſtra tentari, Cel. Auctor ſtatim obſeruat, vnde animum non niſi ad ſolutiones particulares intendit, inter

inter quas, quae numeros minimos eſt largita, ita ſe habet, vt quatuor iſti numeri quaeſiti ſint

I) 21. 20; II) 21. 25; III) 21. 64; et IV. 21. 80.

ex qua ſolutione vnica quanquam innumerae aliae poſſunt deriuari; tamen, quia prima fortuito quaſi ſeſe obtulit, methodum certam eiusmodi problemata reſoluendi, adhuc deſiderari, inficias ire non licet; multum tamen hic profeciſſe is videretur, cui naturam huius formae

$$ac(xx+yy)+(a+c)^2 xy$$

ad quadratum reducendae penitius euoluere contingeret; quamobrem Cel. Auctor etiam hanc formulam calculis ſuis proſequitur. His accedunt conſiderationes de aliis duobus problematibus diophanteis, quae ita ſe habent:

I) *Inuenire quotcunque numeros, quorum quilibet in ſummam reliquorum ductus producat numerum quadratum.*

II) *Inuenire quotcunque numeros quadratos, vt ſumma omnium quolibet imminuta fiat numerus quadratus.*

III.

Obſeruationes circa bina biquadrata, quorum ſummam in duo alia biquadrata reſoluere liceat.

Auctore L. Eulero pag. 64.

Inter theoremata, quae circa proprietates numerorum verſantur, id quidem demonſtrari ſolet, trium

trium biquadratorum ſummam nullo modo poſſe quoque eſſe biquadratum, ſiue

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

aequationem eſſe impoſſibilem; neque vero id eodem modo etiam de differentiis valet, quandoquidem hanc aequationem $A^4 + B^4 - C^4 = D^4$ ſiue $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ ſiue etiam $A^4 - D^4 = C^4 - B^4$ infinitis adeo modis reſoluere licet; quod etſi fortaſſe etiam ab aliis Geometris eſt praeſtitum; methodus tamen, qua Cel. Auctor hic vtitur, plus vno titulo omnem Analyſtarum attentionem mereri eſt cenſenda. Quatuor numeri minimi propoſitae quaeſtioni ſatisfacientes ita ſunt ab Ill. Viro inventi:

$$A = 477069;\ B = 8497;\ C = 310319 \text{ et } D = 428397.$$

IV.

De variis integrabilitatis generibus.

Auctore L. Eulero pag. 70.

Multiplicatorum, per quos formulae differentiales reddantur integrabiles, inueſtigatio tot ſaepenumero tantisque inuoluitur difficultatibus, vt hoc ipſum argumentum eo magis ſummorum Geometrarum ſtudio dignum cenſeri debeat, quo praeclariorem eiusmodi multiplicatores vſum praeſtant in re

ſoluendis aequationibus altiorum graduum, ad quarum integrationem, ab his ſubſidiis ſi diſceſſeris, vix vllus aditus patere videbatur. Quum autem ſtatim, ac vnus quispiam multiplicator fuerit cognitus, quem vtpote in quouis genere ſimpliciſſimum recte primitiuum appellare licet, ex eo infinite multos alios deriuare liceat: quaeſtio ſine dubio maximi momenti inde naſcitur de inuenienda expreſſione generali, quae omnes plane multiplicatores poſſibiles eiusdem formulae in ſe complectatur; atque in hoc conſiſtit praecipuum momentum, quod Ill. *Eulerus* in praeſenti diſſertatione meditationibus ſuis eſt proſecutus, dum pluribus ſelectis exemplis oſtendit, ſemper duos multiplicatores primitiuos locum habere, et nonnunquam vſu quoque venire, vt plures multiplicatores videantur diuerſi, qui tamen ad duos queant reuocari; et cum huiusmodi multiplicatorum inuentio quandoque etiam Analyſeos vires prorſus ſuperet; eo maiori attentione digna eſt ea methodus, quam ab Ill. Viro in hoc ſcripto ad hoc inſtitutum legimus adplicatam, cuius ope plurimis caſibus tales multiplicatores inuenire licet; quaeque inſignem vſum habet in reſoluendis aequationibus ſecundi gradus, quas quippe omnes ad hanc formam redigere licet

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy = 0,$$

poſito $dy = p\,dx$; vbi manifeſtum eſt, ſi vnus huius formulae multiplicator innotuerit; ſtatim obtineri aequationem ſemel integratam adeoque primi

ordi-

ordinis; at vero ſi bini multiplicatores fuerint cogniti, tum ſtatim aequationem bis integratam ſeu finitam elici poſſe, ita, vt integratione repetita plane non fuerit opus.

V.

Obſeruationes circa aequationem differentialem

$$y\,dy + My\,dx + N\,dx = 0.$$

Auctore L. Eulero pag. 105.

Aequatio propoſita, in qua euoluenda Ill. *Eulerus* hic verſatur, quanquam in ſe ſatis ſimplex videatur: eius tamen integratio tam eſt intricata, vt omnes adhuc Analyſeos vires eluſerit. Continetur ea ſub forma generaliori, olim a Comite Riccatio tractata;

$$dz + Pz^n\,dx + Q\,dx = 0;$$

ad quam duplici modo reuocatur; primo ſi per y diuidatur; deinde etiam ponendo $yy = z$; priori enim caſu prodit

$$dy + M\,dx + \frac{N\,dx}{y} = 0;$$

ita, vt ſit $n = -1$; poſteriori vero poſitione fit

$$dz + 2M.\,z^{\frac{1}{2}}\,dx + 2N\,dx = 0;$$

vt ſit $n = \frac{1}{2}$. In tractanda hac aequatione Ill. Auctor methodum generalem dudum a ſe expoſitam in

 auxi-

auxilium vocat, qua oſtendit, omnium aequationum differentialium integrationem commodiſſime per multiplicatores abſolui; vnde Cel. Vir id operam dat, vt binarum variabilium x et y inueſtiget functionem einsmodi z, per quam aequatio propoſita diuiſa reddatur integrabilis.

VI.

Conſideratio aequationis differentio-differentialis

$$(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dx.\,dz}{x}+(f+gx)\frac{z\,dx^2}{x^2}=0.$$

Auctore L. Eulero pag. 125.

Cum ea, quae hac diſſertatione continentur, ſint eiusmodi, vt meris abſoluantur calculis algebraicis; commode fieri non poteſt, vt hic eorum tradatur epitome; vnde mathematum peritos ad ipſam diſſertationem neceſſe eſt vt ablegemus.

VII.

Solutio Problematis Analytici.

Auctore A. I. Lexell pag. 155.

Dum Illuſtr. *Eulerus* in Tomo praecedenti Commentar. ſuperficies rimatus eſt, quae in planum

num explicari poſſunt, inuenit inueſtigationem huiusmodi ſuperficierum ope ſequentis problematis analytici perfici poſſe: *propoſitis duabus variabilibus* t *et* u, *earum ſex inuenire functiones* l, m, n, μ, λ, ν *ita comparatas, vt ſex ſequentibus conditionibus ſatisfiat*:

$$\text{I}^{\circ}.\ \left(\frac{dl}{du}\right)=\left(\frac{d\lambda}{dt}\right);\ \text{II}^{\circ}.\ \left(\frac{dm}{du}\right)=\left(\frac{d\mu}{dt}\right);\ \text{III}^{\circ}.\ \left(\frac{dn}{du}\right)=\left(\frac{d\nu}{dt}\right)$$

$$\text{IV}^{\circ}.\ ll+mm+nn=1;\ \text{V}^{\circ}.\ \lambda\lambda+\mu\mu+\nu\nu=1;$$

$$\text{VI}.\ l\lambda+m\mu+n\nu=0.$$

Solutionem huius problematis ab Euleriana diuerſam, heic proponit Cl. huius diſſertationis Auctor, quae ſua concinnitate ſe haud parum commendare videtur. Tota ſcilicet ſolutio eo redit, vt in ſuperficie ſphaerae deſcribatur curua quaecunque et in circulo maximo eam in puncto quodam tangente, reſecentur a puncto contactus bini arcus, quorum prior aequalis arcui curuae, alter aequalis ipſius complemento ad 90 gradus, ita vt ſi punctum contactus ſit E et hoc modo capiantur arcus EH, EI, arcus HI ſit aequalis 90°., ſumtis porro in ſuperficie ſphaerae tribus punctis A, B, C quadrante circuli inter ſe diſtantibus, ducantur ex his punctis ad H, et I arcus circulorum maximorum, hoc enim facto *l*, *m*, *n* exprimentur per Coſinus arcuum A I, B I et D I et λ, μ, ν per Coſinus arcuum A H, B H, D H. Tum enim ſi arcus curuae, cui arcus E H per conſtructionem aequalis, dicatur ω,

 ſint-

ſintque Ω et Ω' duae functiones quaecunque ipſius ω, fiet

$$t = \Omega + s \text{ ſin. } \omega \quad \text{et} \quad u = \Omega' + s \text{ coſ. } \omega,$$

deſignante s quantitatem variabilem ab ω plane independentem.

VIII.

Exercitationes analyticae.

Auctore L. Eulero pag. 173.

In hac diſſertatione III. Auctor relationem haud parum notatu dignam, quam inter ſummas ſerierum diuergentium huius formae

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - \text{etc.}$$

et iſtarum conuergentium

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

intercedere olim obſeruauit, penitius perſcrutatur. Iſtam legem hic in genere ita repraeſentare licet, vt ſit

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc.} = 2.\text{coſ.}\,\frac{n-2}{2}\pi.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\pi^n}\left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}\right)$$

denotante π ſemicircumferentiam circuli; quae aequalitas, ſiue n fuerit numerus par ſiue impar, reuera locum obtinet; vtrum vero etiam pro caſibus, quibus n eſt numerus fractus, abſolute vera ſit,

cum

cum tuto aſſeuerari non poſſit, Ill. Auctor ita examinat, vt ſcrutetur, num ea ſeriebus per approximationem ſummatis ſatisfaciat. In numeris vero integris caſus $n = 3$ ideo potiſſimum eſt notatu dignus, quoniam haec ſeries

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.}$$

ita eſt comparata, vt omnes adhuc labores, quibus eius ſummatio eſt tentata, eluſerit, quam Illuſtr. Auctor ad examen eo exactius hanc ipſam ob cauſam reuocat; et quum ad ſcopum propoſitum perveniri poſſet, ſi modo huius ſeriei logarithmicae

$$2^2 . l\,2 - 3^2 . l\,3 + 4^2 . l\,4 - 5^2 . l\,5 + \text{etc.}$$

ſummam aſſignare liceret; etiam hanc calculis admodum ingenioſis proſequitur. Huius argumenti tractatio Cel. Auctori anſam ſuppeditat, hanc ſeriem

$$\frac{1}{n} . x^n + \frac{n}{n+1} x^{n+1} + \frac{n+1}{2} x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2 . 3} . x^{n+3} + \text{etc.}$$

adcuratius perpendendi, cuius valores pro caſibus quibus n eſt numerus integer impar, ſingulari modo determinauit, et pro cuius ſummatione iam generatim inſtituenda methodo differentiali hic vtitur; vbi ſimul Illuſtr. Auctori inſignes quaedam obſervationes de integratione aequationum differentio-differentialium ſeſe obtulerunt.

IX.

IX.
Digreſſio de Traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis.
Auctore L. Eulero pag. 205.

Obſoleta propemodum hodie eſt, quae tantopere inter Geometras olim fuit agitata, de traiectoriis quaeſtio, quam Ill. Auctor hic denuo in ſcenam reuocat et nouis quam plurimis obſeruationibus haud mediocriter illuſtrat. Principio diſtincte explicatur, qua ratione curuarum ſecandarum natura et indoles in calculum ſit introducenda.

Aequatio earum, quum innumerabiles lineas comprehendere debeat, praeter coordinatas x et y etiam quantitatem quampiam tanquam parametrum continere debet, cuius valor dum ſucceſſiue vel augetur vel minuitur, continuo aliae arque aliae lineae ſecandae prodeunt. Ita aequatio $yy = f(x+a)$, vbi f eſt quantitas conſtans, continet infinitas parabolas ſuper eodem axe eadem parametro f deſcriptas, ſed quarum vertices continue per axem proferuntur, ſiue eadem parabola ſuper axe promota omnes curvas ſecandas repraeſentabit. Huiusmodi autem aequationum plures dantur claſſes a ſe probe diſtinguendae; ad primam refert Ill. Auctor aequationes cuiuscunque gradus algebraicas; ad ſecundam eas, quae, in ſe quidem tranſcendentes, non tamen niſi logarithmos et arcus circulares inuoluunt; ad tertiam

tiam aequationes differentiales non niſi tranſcendenter integrabiles; ad quartam denique et quintam aequationes differentiales quascunque, et eas inprimis, vbi ipſa differentialia ad plures dimenſiones aſſurgunt, etſi ipſa aequatio tantum ſit differentialis primi gradus. His expoſitis Ill. Auctor ad ipſam traiectoriarum inueſtigationem progreditur et quo argumentum hoc in ſe maxime diffuſum diſtinctius poſſit euolui, praecipuos caſus ſeparatim contemplatur; quorum *primus* is eſt, quo parameter curuarum ſecandarum aequatur functioni cuicunque binarum coordinatarum; *ſecundus*, quo adplicata *y* aequatur functioni cuicunque parametri et abſciſſae; *tertius*, quo abſciſſa aequatur functioni cuicunque adplicatae et parametri; *quartus*, quo aequatio pro curuis ſecandis eſt homogenea; *quintus*, quo tam abſciſſa, quam adplicata, aequatur functioi cuicunque parametri et nouae cuiusdam variabilis; *ſextus*, quo tantum pro ſingulis curuis ſecandis aequatio differentialis datur; *ſeptimus* denique, quo aequatio iſta refertur ad punctum fixum. His ſub finem diſſertationis adiungitur vberior euolutio caſuum, quibus lineae ſecandae ſunt rectae.

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

Expoſitio theoretica ſingularis machinae hydraulicae, Tiguri Heluetiorum exſtructae.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 249.

In machinae, cuius hic expoſitionem tradit Ill. Auctor, conſtructione tantum cernitur ingenii, vt ea in machinis hydraulicis haud ſane poſtremum locum occupare merito ſit exiſtimanda. Ei in hoc diſſertationum ſummario deſcribendae eo minus immoramur, quo facilius ex ipſa diſſertatione, icone inſuper adiutus, lector notionem eius ſatis diſtinctam colligere poterit; adde, quod vberior eius expoſitio transactionibus Tigurinis a Cl. *Ziglero* inſerta legatur. Effectus huius machinae, qui quidem tam eſt admirandus, vt inuentor eius, artifex ſtannarius Tigurinus, *Andr. Wirz*, paruula eiusmodi machina aquam ad altitudinem octodecim pedum eleuauerit, potiſſimum inde eſt repetendus, quod ea alternis vicibus aquam et aërem hauriat; ab intermixto autem aëre augeri aquarum aſcenſus, etiam aliis machinis comprobatur, quarum vna deſcribitur in Comment. Acad. Paris. 1766.; vbi et-

iam

iam effectus huius principia mechanico-phyſica a Cl. *Nolleto* traduntur; quorſum etiam ea pertinent, quae Ill. Auctor in Hydrodynamica ſua de aëris condenſati vi viua potentiali, cuius ope datum pondus ad certam altitudinem eleuare poſſit, eſt commentatus. In hac diſſertatione Ill. Auctor non ea ſolum quae ad huius machinae explicationem veramque eius oeconomiam pertinent optatumque eius ſucceſſum certiorem et vberiorem reddunt, ample expoſuit, ſed cum obſeruaret, duo inprimis incommoda vſitatam eius conſtructionem haud mediocriter premere, nouum huius cochleae conſtruendae modum eumque praeſtantiorem et longe faciliorem excogitauit, qui etiam ipſa experientia Tigurini fuit comprobatus et ſub finem diſſertationis diſtincte deſcribitur.

II.

De Colliſione corporum gyrantium.

Auctore L. Eulero pag. 272.

In doctrina de legibus motus corporum, inter ſe inuicem colliſorum, multa adhuc dantur capita, haud quaquam plene explicata. Merito huc refertur argumentum de corporum gyrantium colliſione, circa quod exactius euoluendum Ill. *Eulerus* in praeſenti diſſertatione verſatur. Si globus aliquis concipiatur circa axem fixum in gyrum agi celeritate

quacunque, in eumque directe impingat alius globus: ſane haud parum ardua eſt quaeſtio, quemnam motum poſt conflictum habiturus ſit poſterior hicce globus, dum prior aliena vi perpetuo in motu ſuo gyratorio conſeruatur. Principio itaque Cel. Auctor reſolutionem huius problematis ad tres perducit aequationes differentio differentiales, quarum duae motum huius globi progreſſiuum, tertia vero motum eiusdem rotatorium, qui ipſi tam ob impreſſionem alterius globi rotantis, quam ob frictionem inducitur, determinant; quasque ſatis feliciter reſoluere licuit, modo ambo iſta corpora concipiantur ita dura, vt impreſſiones factae tanquam infinite paruae ſpectari queant. Inprimis vero id temporis momentum erat determinandum, quo conflictus penitus ceſſat; quod fieri non potuit, niſi duo genera principalia conſtituantur, quorum priore globi iſti omni elaſtica vi deſtituti, poſteriore vero perfecte elaſtici ſupponuntur. Praecipua huius reſolutionis difficultas inde originem trahit ſuam, quod globus prior aliena quadam vi in motu ſuo rotatorio conſeruari concipitur, quae quum admodum debeat eſſe irregularis, haec ipſa irregularitas ipſum quoque problema reddit intricatum. Hanc ob rem Ill. Auctor aliam quaeſtionem, ſolutu faciliorem, in altera diſſertationis parte proponit: ſi ſcilicet duo corpora ſphaerica, circa axem verticalem gyrantia, in ſe muto ſuper plano horizontali quocunque impingant; qualis futura ſit motus variatio, quam haec duo corpora durante conflictu ſibi mutuo ſunt

 indu-

induſtura. Aequationes pro ſolutione huius caſus inuentae iis quidem, ad quas prior eſt perductus, ſunt ſimiles, neque ideo reſolutionem admittunt, niſi itidem iſta corpora ſtatuantur duriſſima, quae vero reſtrictio eo minus aegre eſt ferenda, cum omnia, quae adhuc de corporum colliſione ſunt prolata, eidem innitantur hypotheſi.

III.

De colliſione corporum pendulorum tam obliqua, quam motu gyratorio perturbata.

Auctore L. Eulero pag. 315.

In disquiſitionibus phyſico mathematicis ea, quae in theoria calculis ſunt definita, re ipſa quoque experimentis comprobari, quin res ſit maximi momenti, nemo ibit inficias. Eo maiori itaque attentione digna ſunt, quae ab Ill. *Eulero* in praeſenti diſſertatione traduntur, vbi ſtatim initio modus exponitur, quo omnia ea, quae in praecedenti ſcripto de corporum gyrantium colliſione ſunt explicata, ipſa experientia illuſtrari atque oculis quaſi exponi poſſunt. Si enim duo globi ex filis ita ſuſpendantur, vt globi, dum fila in ſitu verticali ſunt, ſe contingant mutuo et recta per eorum centra tranſiens ſit horizontalis: omnes illae colliſiones facili

 mecha-

mechanismo poſſunt produci. Quodſi ſcilicet iſti globi in diuerſis planis verticalibus a ſe inuicem diducantur iterumque oſcillationi permittantur; conflictus non ſolum eueniet obliquus, et vtrique globo celeritates quaecunque, quibus inchoetur impulſus, imprimi poſſunt; ſed etiam fila contorquendo globis iſtis motus gyratorius circa axem verticalem poteſt induci; vt itaque hoc modo omnia, quae ad corporum rotantium colliſionem obliquam pertinent, quod propemodum plane nouum eſt argumentum, ad experimenta poſſint reuocari. Quae dum doceret in hac diſſertatione Cel. Auctor; occaſione hac oblata vſus eſt, in leges colliſionis corporum pendulorum in genere penitius inquirendi; neque enim opus eſt, vt ambo corpora ſint ſphaerica; modo eiusmodi ſint corpora rotunda, quorum axes incidant in ipſa fila ſuſpenſionis; et circuli eorum maximi, quibus ſe mutuo contingunt, per vtriusque centrum grauitatis tranſeant. Varia vero momenta in hac disquiſitione probe ſunt perpendenda: primo enim attritus ratio eſt habenda, qui a colliſione obliqua abeſſe non poteſt; deinde inprimis eſt diſpiciendum, vtrum ambo corpora elaſtica ſint, nec ne et quum infiniti dentur gradus elaſticitatis, duo genera principalia a Cel. Auctore conſtituuntur; ad quorum prius corpora referuntur omnis elaſticae vis expertia, ad poſterius vero corpora perfecte elaſtica, ſeu in quibus impreſſiones in conflicta inductae perfecte reſtituuntur. Denique etiam hic impreſſiones factae concipiuntur quam minimae, quia regulae hic

hic ſtabilitae, ſimulac figura notabiliter foret mutata, locum amplius in corporibus mollioribus non haberent.

IV.

De vera Tautochrona in fluido.

Auctore L. Eulero pag. 333.

Tam eſt inter Geometras celebris de tautochronis quaeſtio, vt et ii, qui ſummam ſunt inter mathematicos gloriam adepti, argumentum hoc ſtudio et acumine ſuo perquam dignum ſemper exiſtimauerint; attamen, ſi ab egregiis quampluri-mis inuentis, quibus, dum Geometrae in hoc argumento elaborarent, analyſis eſt locupletata, diſceſſeris, vſum practicum in iis, quae de iſochronis in medio reſiſtente ſunt prolata, iure deſideres; curva enim tautochrona, quam mathematici pro reſiſtentia quadrato velocitatis proportionali, quae ſola in rerum natura locum habere videtur, inuenerunt, eo magis eſt ad praxin inepta, cum aſcenſus et deſcenſus corporis peculiares easque inter ſe diuerſas curuas ad tautochronismum requirat. Huic incommodo qua poſſit ratione remedium adferri, in opere ſuo mechanico Ill. Auctor ſummo ſtudio inueſtigauit; neque vero voti compos fieri potuit, niſi eo caſu, quo reſiſtentia fuerit quam minima; neque poſt illum aliis feliciori ſucceſſu gaudere licuit.

Cum

Cum itaque hoc argumentum tot tantisque implicetur difficultatibus: Cel. Auctor in hac diſſertatione id operam inprimis dat, vt omnia momenta, quibus haec inueſtigatio innitur, diſtincte et perſpicue explicet; quod ſane eo eſt vtilius, quo praeclariora ex problematis huius reſolutione in Analyſin incrementa eſſent redundatura. Atque ipſius quidem huius negotii fundamentum Cel. Auctor iam in opere ſuo mechanico poſuiſſe cenſendus eſt, vbi ſcilicet methodum explicuit, qua pro data curua quacunque, ſuper qua corpus deſcenſus ſuos abſoluat, inuenire oporteat curuam iungendam aſcenſui deſtinatam, ita, vt quilibet deſcenſus cum aſcenſu ſequente dato tempore abſoluatur. Quo ſcilicet poſito cardo rei in eo tantum verſatur, vt caſus quaeratur, quo curua aſcenſus ipſi curuae deſcenſus ſimilis euadat et aequalis; cuius quaeſtionis qua ratione tentanda ſit ſolutio, in hac diſſertatione Ill. Auctor adcuratius inueſtigat. Quanquam vero ipſi licuerit, problema per adproximationem reſoluere: haud tamen diffitetur, iſtam ſolutionem eſſe ſuſpectam, quoniam, quibus innititur, ratiocinia plene perſpicua dici nullo modo queant; quo tamen non obſtante ipſa, qua vſus eſt, methodus ob egregia ſubſidia analytica omni attentione digna eſt reputanda; eo igitur magis operae pretium eſt, vt in ardua quaeſtione hac euoluenda Geometrae vires ſuas exerceant, quo longius adhuc a plena eius reſolutione ſumus remoti. Ceterum ſolutio ab Ill. *Eulero* in opere mechanico data ad vſum practicum prorſus ſufficit, etiamſi fluidum non admodum

dum rarum ſit, modo oſcillationes admittantur ſatis paruae.

V.

De Tautochrona in medio rariſſimo, quod reſiſtit in ratione multiplicata quacunque celeritatis.

Auctore L. Eulero pag. 349.

Tautochronas pro mediis in ratione multiplicata quacunque celeritatis reſiſtentibus felici ſucceſſu inueſtigare qui voluerit; tutiorem inire viam non poteſt, quam ordiendo disquiſitiones ſuas ab eo caſu, quo media iſta ſtatuuntur *rariſſima*. Quaeſtionis huius, a Geometris in hoc argumento elaborantibus propemodum neglectae, plena traditur reſolutio in Volumine ſecundo mechanices ab Ill. *Eulero* conſcriptae. Hoc tamen non obſtante Cel. Auctor in praeſenti diſſertatione problema hoc denuo retractat methodumque exhibet id reſoluendi, quae et nouitate et facilitate ſua omnem mathematicorum attentionem meretur, cuius ſcilicet ope pro medio quocunque rariſſimo, cuius reſiſtentia rationem quamcunque multiplicatam celeritatis ſequitur, tautochronas tam pro deſcenſu, quam pro aſcenſu ſatis expedite, ſi in prima adproximatione ſubſiſtamus, aſſignare licet. Ita ſi fuerit reſiſtentia ipſi celeritati pro-

proportionalis vel ſequatur quadratum celeritatis, aequatio pro tautochronis reperitur priore caſu

$$ds = dx.\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{dx}{\pi\sqrt{ax}};$$

poſteriore caſu vero

$$ds = dx.\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b.\, dx}{3};$$

quarum aequationum iſta manifeſto Cycloidem, haec vero iſtam curuam exprimit, quam pro iſta lege reſiſtentiae hic prodire debere etiam ex aliis principiis conſtat.

VI.

Dilucidationes de Tautochroniſmo. Auctore L. Eulero pag. 362.

Poſtquam Ill. *Eulerus* pro reſiſtentia quadrato celeritatis proportionali curuas duabus partibus inter ſe ſimilibus conſtantes aſſignaſſet, ſuper quibus in fluido rariſſimo non quidem deſcenſus vel aſcenſus ſeorſim eſſent iſochroni, ſed integrae potius oſcillationes aequalibus abſoluerentur temporibus, ita, vt iſtae curuae ſummo cum fructu in ipſa praxi loco cycloidis adhiberi poſſe viderentur: longo poſt temporis interuallo Fontainius, inſignis Geometra Gallus, argumentum hoc haud parum illuſtrauit, dum ingenioſa methodo oſtendit, iſtas tautochronas ab Ill. *Eulero* inuentas pro reſiſtentia quadrato velocitatis proportionali etiamnum locum habere, ſi in-

ſuper

ſuper reſiſtentia ipſi celeritati proportionalis acceſſerit. Poſt eum aliquot abhinc annis Viri Illuſtres, *D'Alembertius* et *la Grange*, hanc de tautochronis quaeſtionem ſummo ingenii acumine excoluerunt, eam inuertentes, vt non pro certa quadam reſiſtentiae hypotheſi tautochronas definire conarentur, ſed viciſſim eiusmodi reſiſtentiae leges inueſtigarent, pro quibus tautochronas ipſis aſſignare liceret; neque tamen et ipſis contigit eſſe tam felicibus, vt vltra ſimplicem et duplicatam rationem celeritatis, cui proportionalis eſſet reſiſtentia, laborum ſuorum ſucceſſus extenderent. Hoc tamen non obſtante analyſis, qua vſi ſunt Celeberrimi hi Geometrae, tam eſt egregia tantaque in ea ingenii vis cernitur, vt, etſi pleno ſucceſſu exciderint, eorum tamen labores omnium, qui ſunt mathematum periti, attentione ſint digniſſimi; quos dum Ill. *Eulerus* perſcrutaretur, omnia, quae ab iſtis ſunt praeſtita, ſine intricatis adeo calculis methodo longe faciliori expediri poſſe obſeruauit. Quae igitur Ill. Auctor de hoc argumento eſt meditatus, in praeſenti diſſertatione exponit; neque tamen diffitetur, Geometras, multum in hac inueſtigatione eſſe praeſtitum, gloriari non poſſe, cum eiusmodi inprimis reſiſtentiae hypotheſes deſiderentur, quae purae cuidam celeritatis u functioni eſſent proportionales; quales caſus autem hactenus euoluere non licuit, niſi vbi reſiſtentiae lex tribus conſtare partibus aſſumitur, 1°. termino prorſus conſtante; 2°. termino ipſi celeritati u et 3°. termino eius quadrato uu proportionali, ſeu vbi

 reſi-

reſiſtentia huic formulae proportionalis aſſumitur $a + bu + cuu$; cum vero Illuſtr. Auctori in mechanica ſua nondum licuerit terminum medium bu in hoc problemate in calculum introducere: totum caſum modo memoratum hic vberius euoluit.

VII.
De Chordis vibrantibus disquiſitio vlterior.

Auctore L. Eulero pag. 381.

Nec mathematicas ſcientias, in quibus ſumma lex eſt euidentia, ſuis carere controuerſiis, haud deſunt exempla, quibus comprobari poſſit. Iure huc referas argumentum de chordis vibrantibus; cuius problematis reſolutio dudum iam ab Ill. *Eulero* data nondum adhuc ab omnibus dubiis et obiectionibus, quas Geometrae contra eam formauerant, potuit vindicari. Neque vero id adeo mirum eſt, cum motus eiusmodi vibratorii determinatio nouum plane calculi genus poſtulet, cui parum adhuc adſueti ſunt mathematici. Qua conſideratione impulſus Illuſtr. Auctor hunc ſibi in praeſenti diſſertatione praefixit ſcopum, vt omnia momenta, quibus innititur iſta ſolutio, dilucide exponeret atque ab omnibus dubiis contra eam formatis liberaret; quae cum potiſſimum contra ipſam, quae adhibetur, methodum moueantur; Ill. Auctor hic ſubſiſtit in

caſu

caſu ſimpliciſſimo omni cura euoluendo, quo ſcilicet chorda per totam ſuam longitudinem eiusdem craſſitiei aſſumitur. Inprimis vero Cel. Auctoris ſolutio Cel. *D'Alembertio* ideo fuit ſuſpecta, quod tam late patet, vt non curuas ſolum certa quadam aequatione analytica expreſſas, verum etiam curuas comprehendat ex variis portionibus diuerſarum curvarum vtcunque conflatas vel et libero manus ductu formatas, dummodo omnes partes inter ſe cohaereant et nusquam hiatu interrumpantur; dum Cel. ille Geometra non admittendas cenſet, niſi eas curvas, quae ſtricto ſenſu continuitatis lege continentur, et diuerſarum inprimis curuarum portiones, angulis in iuncturis prominentes, atque hinc aequationis differentio - differentialis naturae penitus adverſantes prorſus reiicit. Hiſce dubiis omnibus Cel. Auctor ita reſpondet, vt ſibi ſuam de motu chordarum vibratorio theoriam iam extra omnem dubitationem poſuiſſe videatur; et facili atque concinna methodo figuram, quam chorda vniformiter craſſa, cuius datur ſtatus initialis tam ratione figurae, quam ratione motus ipſi impreſſi, ad quoduis tempus eſt habitura, inuenire docet, quatenus ſcilicet eius vibrationes fuerint quam minimae.

VIII.

Animaduerſiones in ſolutionem Bernoullianam de motu chordarum.

Et IX.

De motu vibratorio chordarum craſſitie vtcunque variabili praeditarum.

Auctore L. Eulero pag. 422.

In horum Commentariorum Tom. XVI. ab Illuſtr. Geometra, *Daniele Bernoulli*, conſcripta legitur diſſertatio de motu chordarum ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitarum. Celebrati huius de motibus vibratoriis argumenti euolutio cum noua plane et parum adhuc inter Geometras vſitata requirat Analyſeos artificia et calculi genera: vehementer adhuc diſcrepare inter ſe ſolutiones mathematicorum, non eſt, quod mireris. Idem et hic accidiſſe videmus, dum ſolutio, iam olim ab Ill. *Eulero* data, plurimum diſſentit ab ea, quam in modo memorata diſſertatione Ill. *Bernoulli* explicat. Summo itaque iure veritatis amor Cel. Auctorem impellere debuit, vt ipſum diſſenſus huius fontem detegere anniteretur; quem ipſum ſcopum in priori harum diſſertationum ſibi praefixit, in qua omnia momenta, quibus ſolutio Bernoulliana innititur, rigoroſe ad examen reuocat. Principio quidem ſtatim

tim id Cel. Auctori in ſolutione Bernoulliana nimis reſtrictum videtur, quod ſtatuatur, in chordas inter vibrandum alias figuras cadere non poſſe, niſi quae ad genus lineae ſinuum referantur, cum tamen etiam aliae figurae quaecunque locum habere queant, ſiquidem totus chordae motus a figura ipſi initio impreſſa, plane arbitraria, pendet; hoc obſeruato ſingularem illam methodum, qua Cel. *Bernoulli* vibrationes eiusmodi chordae inueſtigat, Cel. Auctor ſuo more ob oculos ponit, detectaque discrepantiae origine iſtam circumſtantiam ita ſuis ideis adcommodat, vt conſenſus iam vtriusque ſolutionis oriatur pulcherrimus. Eadem methodo, qua caſus ab Ill. *Bernoullio* tractatus ſcilicet chordarum ex *duabus* partibus diuerſae craſſitiei compoſitarum, fuit expenſus, etiam motus chordarum, quae partibus quotcunque diuerſae craſſitiei conſtant, facile et expedite definiri poteſt: vti Cel. Auctor in chorda ex tribus tantum partibus inaequalibus conflata in poſteriori diſſertationum allegatarum oſtendit.

X.

De motu vibratorio chordarum craſſitie vtcunque variabili praeditarum.

Auctore L. Eulero pag. 432.

Quanquam Ill. Auctor in praecedente diſſertatione methodum expoſuit, motus vibratorios chordae

dae ex quotcunque partibus diuerſae craſſitiei conſtantis aſſignandi; id tamen inficias iri non poteſt, cum in qualibet iunctura lex continuitatis quodammodo interrumpatur, etiam aberrationem quampiam calculi a veritate admitti debere; quae etſi tantum circa elementa chordae quam minima locum habet adeoque pro nihilo reputari poteſt; tamen quando chorda fuerit craſſitiei per totam prorſus longitudinem variabilis, iſta aberratio in omnibus punctis vſu veniret atque idcirco valorem acquireret finitum; ex quo ſequitur, hoc caſu methodum iſtam valere non poſſe. Vtne igitur in hoc argumento quidquam relinquatur deſiderandum, Cel. Auctor iſtum caſum, quo craſſities prorſus per totam chordae longitudinem variabilis eſſe ſtatuitur, in hac diſſertatione ſeparatim pertractat, atque per plura egregia calculi differentialis artificia eo vſque euoluit, vt tandem facilem obtinuerit ſolutionem ſequentis problematis, quod generaliſſime motum chordarum plane omnium in ſe complectitur, et quorſum omnia, quae de hoc argumento deſiderari ſolent, referri poſſunt: quodque ita ſe habet: *Si chorda craſſitiei vtcunque variabilis in duobus terminis fixa, a vi quacunque fuerit tenſa; definire tempus ſingularum vibrationum, quas edet impulſa.*

XI.

XI.

De motu vibratorio laminarum elaſticarum, vbi plures nouae vibrationum ſpecies hactenus non pertractatae euoluuntur.

Auctore L. Eulero pag. 449.

In hac diſſertatione Cel. Auctor ea, quae iam olim de laminis elaſticis vibrantibus eſt commentatus, aliquanto clarius et vberius exponit; noua autem ſunt ea, quae de pluribus contremiſcendi generibus hactenus non tractatis tradit, quae omnia in laminis elaſticis locum habere poſſunt; quorum quidem praecipua ſunt ſequentia: 1°. ſi lamina fuerit prorſus libera, ſeu incumbat plano horizontali. 2°. ſi ea fuerit in vno termino libera, in altero autem ita ſtilo defixa, vt circa eum libere verti poſſit; 3°. ſi ea in vtroque termino ope ſtilorum fuerit defixa; 4°. ſi ea fuerit vno termino, vt ante, ſtilo fixa, altero autem muro infixa; 5°. ſi ea fuerit vtroque termino muro immobili infixa. 6°. denique ſi ea fuerit vtroque termino libera, ſed circa medium alicubi ſtilo defixa; quibus caſibus omnibus Cel. Auctor motus vibratorios inueſtigat, quos lamina eiusmodi elaſtica ſub allegatis diſpoſitionibus recipere poteſt.

XII.
De motu grauium citiſſimo ſuper curuis ſpecie datis.
Auctore L. Eulero pag. 488.

Etſi methodus maximorum et minimorum ita iam eſt exculta, vt non ſolum inter omnes omnino curuas, ſed inter infinitas quoque, modo certa quadam indole communi ſint praeditae, ea poſſit aſſignari, quae maximi minimiue proprietate gaudeat: tamen ſi iſta communis indoles in eo conſiſtat, quod omnes iſtae curuae vna eademque curuarum ſpecie contineantur, fateri coguntur Geometrae, methodum in hoc caſu maxima vel minima inueſtigandi fere prorſus latere. Huc referenda ſunt iſta duo problemata, circa quae euoluenda Cel. Auctor in hac diſſertatione verſatur: ſcilicet datis in plano horizontali duobus punctis, inuenire 1°. eum arcum circularem; deinde 2°. etiam eam ſemi-ellipſin, vt corpus graue ſuper eo arcu vel circulari vel elliptico ex vno datorum punctorum deſcendens citiſſime ad alterum perueniat; in quibus caſibus etſi Cel. Auctori reſolutio quodammodo ſucceſſit; ea tamen in aliis caſibus magis complicatis locum non inuenit. Continet haec inueſtigatio complura egregia calculi artificia atque iſtam quoque ob cauſſam omni Geometrarum attentione digna eſt, quia plurimum vtique intereſt, quousque promoti ſint Analyſeos limites quaeque in ea adhuc deſiderentur, ſollicite annotari.

PHY-

PHYSICA.

I.

Cyprinus Capoeta et Cyprinus Murſa.

Auctore A. I. Gueldenſtaedt p. 507.

Pergit Cl. Auctor in deſcribendis piſcibus, quos mare Caſpium alit, iisque, quorum deſcriptiones Tomo iam praecedenti horum Commentariorum inſeruerat, duos alios adiungit, *Capoetam* et *Murſam* quorum vterque ad genus Cyprinorum pertinet. Illum quidem definit: *Cyprinum cirris 2 radio tertio pinnae dorſalis poſticae vtrinque ſerrato; cauda bifurca.* Hunc: *Cyprinum cirris 4 radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato, colore laterum fuſco luteſcente, pinnarum inferiorum fuſco-albido, dorſo plano.* Nomina triuialia a vulgari appellatione, quae accolis maris Caſpii in vſu eſt, deſumta ſunt. Poſt deſcriptionem externi habitus horum piſcium, partes eorum internae quoque anatomice deſcribuntur.

II.

Obſeruationum ſplanchnologicarum, ad Acipenſeris ruſſici et Huſonis anatomen, ſpeciatim vero ad ipſorum auditus organum, ſpectantium continuatio.

Auctore I. T. Koelreuter pag. 521.

Sunt tabulae tres, organum auditus piſcium duorum, Acipenſeris ruſſici et Huſonis exhibentes, in quarum explicatione tota haec diſſertatio conſiſtit. Finis Cl. Auctori primarius eſt demonſtrare hac partium, quae piſcium organum auditus conſtituunt, expoſitione, quod piſces ſenſu auditus omnino gaudeant. Nunc quidem de ſimplici ſonorum perceptione nullum phyſiologis dubium fuit, quin, piſces audire poſſe, multis, etiam vulgaribus experimentis, dudum conſtitit. Sed id ſolummodo quaerebatur, vtrum piſces, aeque ac animalia quadrupeda et aues adeo diſtincte audirent, vt etiam voces diuerſas, aliasue ſonorum differentias diſtinguere poſſent, an modo confuſo hoc ſenſu et imperfecto praediti eſſent. Si enim prius a poſteriori conſtitiſſet, ſecutum fuiſſet, cochleam, quam partem piſcibus deeſſe notum erat, non adeo neceſſario ad auditum requiri, quam quidem alii putauerant, primariamque

que ſedem auditus potius in canalibus ſemicirculari-bus ponendam eſſe, vtpote quos ſolos fere piſcibus cum caeteris animantibus communes eſſe anatomicorum pariter diligentia innotuerat. Aliter ſentiendam fuiſſet, ſi poſterius per experientiam conſtitisſet. Atque hoc dubium praeſenti organorum auditus Acipenſeris et Huſonis expoſitione haud ſoluitur. Interim tamen omnino ſcitu iucundae et vtiles dignaeque iudicatae ſunt hae obſeruationes, quae Commentariis noſtris inſerantur.

III.

Deſcriptio Vituli bicipitis, cui accedit commentatio de ortu monſtrorum.

Auctore C. F. Wolff pag. 540.

Vitulus hic deſcriptus proprio ſenſu biceps vocari poterat, corpore ſiquidem toto extremitatibusque ſimplicibus, ſolo capite et collo duplici inſtructus. Cor in eo ſimplex fuit et aorta venaque caua inferior, corpori ſimplici reſpondentes, aeque ſimplices. Sed arteria innominata ex hac aorta pro duobus capitibus duplex oriebatur, quarum quaelibet duas Carotides edebat. Cauae ſuperiores duae erant, quarum dextra ſolito modo, ſiniſtra autem, praeter naturam addita, nullumque ad ſimplex cor acceſſum inueniens, miro modo circumerrabat, denique

que in ſinum dextrum inſerebatur. Pulmones tres fuerunt; dexter, quaſi dextro foetui, ſiniſter ſiniſtro proprius, mediusque tertius vtrique communis. Ex duabus arteriis pulmonalibus altera, ſolito modo ex corde orta, pulmoni dextro et medio proſpexit, altera autem, proprio ſuo, vnde oriretur, corde carens, ex innominata ſiniſtra deſcendit, pulmoni medio et ſiniſtro dicata. Alia mirabilis ſtructurae exempla in diſſertatione ipſa legi merentur; quibus ſingulis fere *Perill.* HALLERI et WINSLOWI ſententia confirmatur, *poſſe monſtra nullo modo oriri ex fortuita duorum foetuum colliſione et concretione; ſed neceſſe eſſe, vt a primis ſuis initiis eiusmodi monſtra iam fuerint, nec aliter niſi monſtroſe formari inceperint.* Argumenta eo fere recurrunt: In ipſis iis, quae monſtroſa in corporibus ſunt, ordo et fines apparent adeo manifeſti, adeo partibus monſtroſis conuenientes, vt a fortuita colliſione nunquam exſpectari poſſint. Vnde omnino ſequitur, monſtroſam in monſtris ſtructuram iisdem cauſis deberi, quibus monſtra ipſa, quibus et foetus naturalis ſtructurae producuntur. Deinde alia quaeſtio oritur, minus ab Auctoribus agitata: Vtrum monſtra ex germinibus monſtroſe creatis originem ducant per modum merae euolutionis, quae ſententia plerorumque Auctorum eſt; an viribus potius naturae generatricibus ſolitis, ſed per cauſas accidentales modificatis producantur? Quemadmodum nulli caſui fortuito nullique fortuitae colliſioni ſtructurae, quae in monſtris apparent, organicae adſcribi poſſunt, ita multo minus Diuino conſilio et creationi easdem

dem attribuendas, ſed a natura deriuandas eſſe, a CREATORE in hunc ſcopum inſtituta, quam et mira opera producere et fines proſequi, ſed et in finibus hiſce proſequendis errare poſſe, innumeris exemplis experimur, id vituli non modo huius exemplo, ſed ſerie monſtrorum imprimis euincitur, in *Actis Pariſinis* a Viris Celeberrimis deſcriptorum. Ex omnibus his enim obſeruationibus euidenter apparet, monſtra naturae generatricis quidem, non caſus fortui i, opera, ſed opera imperfecta eſſe et quae ſucceſſu caruerint. Haec monſtrorum cognitio ad demonſtrandam exiſtentiam NVMINIS DIVINI adhibetur. Denique differentia inter monſtra vera, in ſpecie bicorporea, et foetus concretos oſtenditur. Illa partes primarias ipſaque plerumque viſcera vitalia communia habent, adeoque vnicum ſemper corpus organicum conſtituunt. In his quilibet foetus propriis ſuis et ab altero diſtinctiſſimis partibus gaudet, adeo vt duo corpora diſtincta, ſimpliciter coalita, referantur.

IV.

De Reliquiis animalium exoticorum per Aſiam borealem repertis Complementum.

Auctore P. S. Pallas pag. 576.

Cl. Auctor in hac diſſertatione propriis nunc obſeruationibus ea partim confirmat et complet, partim-

partimque corrigit, quae olim de foſſilibus quadrupedum indicorum reliquiis, in remotiſſimis ab eorum loco natali regionibus inuentis, de eorumque et ipſius telluris noſtri fatis, aliorum paſſim obſervationibus vſus ſcripſerat. Veriſſimum eſt, per omnem Sibiriam vniuerſamque Aſiam borealem reliquias eiusmodi vaſtiſſimorum zonae torridae incolarum diſperſas eſſe et inueniri maxime in ripis fluviorum campeſtrium, ſolis alpeſtribus Sibiriae tractibus ſaxisque telluri congenitis exceptis, quae neque oſſa Elephantum Rhinocerotumue neque corpora marina aut alia petrefacta in ſuo ſinu fouent. Congeſta alibi, ſed rarius, in vnum quaſi cumulum multorum animalium oſſa inuenta ſunt. Alibi ſingulorum animalium reliquiae tumulis arenoſis ſepultae, alibi et frequentiſſime ſolitaria membra Elephantum, Rhinocerotum, ſociata cum corporum marinorum reliquiis reperiuntur, vt merito in his phaenomenis cum Cl. Auctore agnoſcas indicia et effectus inundationis, nimium violentas, nimiumque terribiles, quam vt illa non vniuerſalis eſſe potuerit. Addit his Clariſſimus Auctor alium inſignem fati huius memorabilis teſtem, incolamque mundi antediluuiani, Rhinocerotem *integrum cum corio cumque tendinum et carnium reliquiis* conſervatum, in orientaliori Sibiria ad ripam *Wilugi* fluvii repertum. Cuius animalis integrum caput aliasque partes Academiae noſtrae mirando ſpectaculo transmiſit, et quae nunc in Gazophylacio academico aſſeruantur. Corium cadaueris huius et carnes

aliquam

aliquam mollitiem adhucdum ſeruauerant odoremque ſpirarunt quaſi ammoniacalem, et leuiter ſiccatae in furno multam pinguedinem exſudarunt. Sed praeſtat accuratiſſimam deſcriptionem tum partium huius animalis ipſarum, tum ſtatus in quo repertae ſunt, et caeteras circumſtantias notabiles in ipſa diſſertatione perlegere. Sufficiet hic caeteras modo vaſtorum calidi climatis animalium reliquias breuiter indicare, quarum vel mentio fit in hac diſſertatione vel deſcriptio concinnata exſtat. Os humeri huc pertinet Rhinocerotis integrum, in ripa arenoſa *Irtis* fluuii a Cl. Auctore ipſo inuentum. Dens porro molaris eiusdem animalis vna cum elephantinis oſſibus repertus. Porro cranium fractum eiusdem, verſus Oceanum glacialem in colle arenoſo, et aliud ſimile ad *Lenam* repertum. Denique integrum Rhinocerotis cranium ad fluuium *Tſchicoi* detectum, cuius ob ſingularem dentium ſtructuram et maxillam inferiorem egregie conſeruatam vna cum deſcriptione icones quoque exhibentur. Vltimum locum tenent crania duo animalis hactenus nondum cogniti. In illis mira oſſium craſſities eſt et firmitas, et baſes cornuum, quae ſingularia oſſa plana ſunt, cornuum ſubſtantiae continua, totam frontem, ſynciput et occiput ad protuberantiam occipitalem vsque incruſtant. Et horum quoque craniorum deſcriptioni icones adiunguntur.

ASTRONOMICA.

I.

Diſquiſitio de inueſtiganda Parallaxi Solis ex Tranſitu Veneris per Solem Anno 1769.

Auctore A. I. Lexell pag. 609.

Huic Diſſertationi, quae ſub auſpiciis Illuſtris. Academiae Scientiarum iam ſeparatim typis excuſa eſt, locum quoque in praeſenti Tomo Commentariorum concedere, Illuſtr. Academiae placuit; partim quod continuationem quaſi exhibeat, praecedentium in hoc argumento lucubrationum, quae Commentariis inſertae ſunt, partim etiam quod Cl. huius Diſſertationis Auctor, nonnullis correctionibus praecedentem eius editionem emendare heic ſibi propoſuit.

Singula huius Diſſertationis momenta quum attingere non liceat, ſumma tantum eius capita breviter exponemus. Antequam igitur Cl. Auctor inveſtigationem Parallaxeos in hac Diſſertatione adgreditur, generales quasdam cautelas proponit, quae ab illis obſeruari merentur, qui huiusmodi disquiſitionem ſuſcipiunt. Hae autem eo potiſſimum redeunt, vt 1°. Methodus adhibeatur exacta et rigori

Geometrico conformis, pro computandis effectibus parallacticis; tum vero 2do vt de obſeruationum pretio et bonitate non ex praeconceptis opinionibus, ſed ex certis criteriis veritatis, iudicium formetur. Et quod poſteriorem harum cautionum attinet, nullum eſt dubium, quin ex eius potiſſimum neglectu, tot diuerſae opiniones de Parallaxi ex obſeruationibus nouiſſimi tranſitus deducenda, originem ſuam repetant. Hinc enim factum eſt, vt Celebb. *de la Lande* et *Planman* obſeruationem Rev. Pat. *Hell*, in fauorem obſeruationis a Celeb. *Planman* Caianeburgi factam, reiiciant; contra vero vt Rev. Pat. *Hell* et Celeb. *Pingré* obſeruationem Warohuſienſem Pat. *Hell*, pro omnimode exacta adoptantes, obſeruationem Caianeburgenſem penitus repudiandam eſſe cenſeant. Cl. autem huius diſſertationis Auctor, quum exiſtimauerit ſibi non licere, de obſeruationum pretio pro ſuo arbitrio pronuntiare; aequitati omnino conforme iudicauit, ſingulas obſeruationes conſulere, nec vllam excludendam eſſe cenſuit, niſi quae ab ipſo Eius Auctore pro dubia habetur.

Pro determinanda quantitate Parallaxeos, Auctor praeſentis diſſertationis duplicem imprimis adhibet Methodum, quarum prior abſoluitur comparatione durationum pro tranſitu Veneris in Europa et America obſeruatarum, alter vero ſupponit comparationem durationum in America obſeruatarum, cum temporibus quae effluxerunt inter contactus internos pro ingreſſu et egreſſu, in diuerſis Europae

locis, obſeruatis. Quamuis enim prior Methodus in hac quaeſtione dirimenda principale conſtituat momentum, poſterior tamen quoque cum vſu adhiberi poterit, ſiquidem Longitudines locorum vbi obſeruationes contactus interni pro egreſſu factae ſunt, ſatis exacte videntur determinatae, nam ſi his Longitudinibus ne minimus quidem error ineſſet, poſterior haec Methodus, priori omnino nihil cederet. Vt vero perſpicuum fiat, quomodo Cl. Auctor priori adhibita Methodo parallaxin Solis pro tempore tranſitus 1769, inuenerit 8″, 50, ſequentem adferre placet Tabulam, quae exhibet valores pro duratione tranſitus Veneris Geocentrica inter contactus internos, ex ſingulis obſeruationibus elicitos, prout variis hypotheſibus parallaxeos ab 8″, 30 ad 8″, 70 reſpondent.

Dura-

Duratio Geocentrica pro hypotheſi parallaxeos.

	8'', 30	8'', 40	8'', 50	8'', 60	8'', 70
Arx. Pr. Waliiae					
Dymond	$5^h.41'.56'',7$	$5^h.41'.54'',2$	$5^h.41'.51'',7$	$5^h.41'.49'',3$	$5^h.41'.46'',8$
Wales	57, 7	55, 2	52, 7	50, 3	47, 8
St. Ioſeph. Calif.					
Chappe	48, 7	51, 9	55, 1	58, 3	42. 1, 5
Dom Vincent	47, 8	51, 0	54, 2	57, 4	41. 59, 6
Medina	42, 8	46, 0	49, 2	52, 4	54, 6
Inſ. Reg. Georgii					
Green	44, 8	53, 2	42. 1, 6	42. 10, 0	42. 18, 4
Cook	35, 3	43, 7	41. 51, 1	41. 59, 5	7, 9
Solander cum mom. pro egreſſu D. Green et Cook	42, 6	51, 0	59, 4	42. 7, 8	16, 2
Wardhus					
P. Hell	42. 27, 6	42. 19, 8	42. 12, 1	42. 4, 3	41. 56, 5
Borgrewing	9, 6	1, 8	41. 54, 1	41. 56, 3	38, 5
Caianeburg					
Planman	41. 55, 7	41. 47, 7	39, 7	31, 7	23, 8
Kola					
Rumovski	42. 20, 1	42. 12, 1	42. 4, 2	56, 3	48, 4

Ex hac Tabula iam ſponte intelligitur, quod ſi aliqua Parallaxeos hypotheſis inueniri poſſet, quae pro valoribus durationis Geocentricae ex ſingulis obſeruationibus deducendis, perfectum exhiberet conſenſum, eam pro vera et omnimode exacta eſſe habendam; quum vero huiusmodi conſenſus ne voto quidem praecipi potuerit, facile perſpicitur eam

 Paral-

Parallaxeos hypotheſin pro maxime probabili eſſe habendam, qua adoptata diſſenſus obſeruationum fiunt quam minimi. Ex leui autem inſpectione Tabulae noſtrae patet, adhibito valore parallaxeos pro tempore tranſitus 8″, 50, hoc commodum praeprimis obtineri; nam ſi pro hac Parallaxeos hypotheſi adhibeatur quantitas durationis Geocentricae $5^{h}. 41'. 56''$ errores obſeruationum poſitiui et negatiui inuicem proxime reddentur aequales, tum vero in obſeruationes Rev. Pat. *Hell* et Cel *Planman* tales redundant errores, quales ipſis ineſſe, aliis rationibus ſatis euidenter demonſtrari poteſt; ex quo omnino fas eſt concludere, hunc valorem Parallaxeos pro tempore tranſitus 8″, 50 ſeu pro diſtantia media 8″, 63, ſumma ſaltem gaudere probabilitate. Pro alia hypotheſi Parallaxeos, valor durationis Geocentricae ita quidem eligi poſſet, vt errores obſeruationum poſitiui et negatiui ad aequalitatem perducerentur, at tamen hoc vix praeſtari poteſt, niſi vel obſeruationes Americanae ad Sinum Hudſonis et St. Ioſephi inſtitutae, magis quam par eſt reddantur erroneae, vel quod hac in quaeſtione principale eſt momentum, obſeruationi aut Rev. Pat. *Hell* aut Cel. *Planman* iuſto maiores tribuantur errores. Sic pro hypotheſi Parallaxeos 8″, 40, poſita duratione Geocentrica $5^{h}. 41'. 54''$, obſeruatio Rev. Pat. *Hell* errori 26″ redderetur obnoxia, quod nequaquam probabile videtur. Contra vero ex hypotheſi Parallaxeos 8″, 60 poſita duratione Geocentrica $5^{h}\ 51'. 58''$, eiusdem quantitatis error in obſeruationem Cel. *Planman*

man redundaret, quod haud parum a veriſimilitudine recedit. His igitur de cauſis Auſtor praeſentis diſſertationis valorem Parallaxeos mediae 8″, 63 adoptandum cenſuit, licet haud negare velit hunc valorem cum aliqua latitudine 3, 4 vel forſan adeo 6 partium decimarum ſecundi definiri poſſe; ſcilicet ita ſibi perſuaſum habet, fieri vix poſſe quin Parallaxis Solis media his limitibus 8″, 57 et 8″, 69 contineatur, tum vero haud parum probabile videri arctiores ipſi limites ſtatui poſſe 8″, 60 et 8″, 66, ſed qui ita comparati ſunt, vt omnes valores Parallaxeos, qui inter ipſos cadunt, eiusdem fere pretii haberi debeant. Quum enim errores obſeruationum vix cum maiore quam trium aut quatuor ſecundorum praeciſione determinari queant, fruſtraneam omnino ſuſcipit operam, quisquis valorem Parallaxeos cum praeciſione vnius adeo partis centeſimae ſecundi eruere laborat; imprimis vero tanta praeciſio ab illis fruſtra exſpectatur, qui in effectibus parallacticis computandis, errores quinque, ſex, immo adeo viginti ſecundorum commiſerunt.

Ex noſtra ſuperius allata Tabula, iam fundamentum quoque diuerſarum opinionum, in quas Auctores de Parallaxi abierunt, facile explicari poterit. Ex hac igitur Tabula primum perſpicuum redditur, quod excluſis obſeruationibus Wardhuſienſibus, Parallaxis media aeſtimari debeat 8″, 54, qui valor ad eum quem Cel. *de la Lande* adoptauit, proxime accedit. Deinde hinc quoque intelligitur

ad

ad mentem Rev. Pat. *Hell* parallaxin mediam recte ſtatui $8''$, 70, ſi ipſius obſeruatio et illa Cel. *Green* ſuper inſula Otahitee inſtituta, pro omnimode exactis habeantur, ex comparatione enim harum obſeruationum hic Parallaxeos mediae valor omnino prodit; at quum hinc deducatur valor durationis Geocentricae $5^h. 42'. 7''$, facile conſit hanc Parallaxin conſiſtere non poſſe, niſi in omnibus reliquis obſeruationibus totius tranſitus, tam Europeicis quam Americanis errores admittantur et iuſto maiores et in eundem ſenſum peccantes. Denique clarum fit, quomodo Cel. *Pingré* perductus ſit ad Parallaxin mediam $8''$, 80 ex comparatione obſeruationum D. *Chappe* et Pat. *Hell*, nam ſub hac Parallaxeos hypotheſi, vtraque obſeruatio praebet durationem Geocentricam $5^h. 42'. 0''$; quum vero hinc binae reliquae obſeruationes Americanae contra omnem probabilitatem redderentur erroneae, dubitare licet, an opinio Cel. *Pingré* vllam inuenire poſſit fidem.

Emendationes quas Cel. Auctor huic Diſſertationi attulit, eo imprimis redeunt, vt expreſſiones pro effectibus Parallacticis aliquanto exactiores iam adferret, quam factum erat in editione praecedenti, licet aberratio in praecedentibus effectibus Parallacticis vix vnquam minutum ſecundum excedat. Deinde, quum ex litteris Rev. Pat. *Collas* ad Cel. *Rumovski*, Cl. Auctor certior factus ſit, obſeruationem Pekinenſem ob motum Penduli ſummopere irregularem, pro valde dubia eſſe habendam, huius obſer-

obſeruationis nullum faciendum eſſe vſum, exiſtimavit. Caetera in quibus haec diſſertatio a priori editione differt, leuiuſcula ſunt, nec commemorari merentur.

Quum vſus quaeſtionis de Parallaxi Solis, in eo imprimis conſiſtat, vt vera dimenſio totius Syſtematis Planetarii per menſuras cognitas exhiberi queat, nunc quoque haud abs re erit, ſequentem adponere Tabellam, quae diſtantias Planetarum medias a Sole per ſemidiametros aequatoris Terrae noſtrae expreſſas, ſub hypotheſi Parallaxeos mediae $8''$, 63, exhibet:

Diſt. med. a Sole		
Mercurii	9252, 0	Semid. Telluris
Veneris	17288, 3	
Terrae	23900, 9	
Martis	36417, 6	
Iouis	124308, 1	
Saturni	227999, 5.	

Probe autem notandum eſt, has diſtantias cum inſigni latitudine eſſe determinatas, quum fieri poſſit, vt ſaltem tricenteſima ſui parte augeri vel diminui debeant.

II.

Obſeruationes aſtronomicae Petropoli anno 1752. inſtitutae.

Auctore Stephano Rumovski p. 673.

Referuntur hic non nullae obſeruationes Setellitum Iouis, quas hoc anno Viris Cl. *Lexell* et *Rumovski* in obſeruatorio Petropolitano inſtituere licuit. Has excipit obſeruatio Eclipſeos Lunae quae contigit die $\frac{30. \text{ Oct.}}{11. \text{ Nov.}}$ Mutuus earum conſenſus vel exigua inter momenta obſeruationum differentia certitudinem earum demonſtrare videtur.

III.

Determinatio Latitudinis et Longitudinis quorundam Sibiriae locorum deducta ex obſeruationibus a Dno *Islenieff* anno 1770. inſtitutis.

Auctore Stephano Rumovski pag. 677.

Determinatio Latitudinis omnium locorum, quorum hic fit mentio, ſatis exacta eſt, Longitudinis vero non item, certior reliquis videtur Longitudo Arcis Vſtkamenogorenſis; interim tamen alio-

rum

rum quoque locorum determinationes in conſtruendis mappis Geographicis vſu ſuo non carebunt.

Quoniam inter obſeruationes Vſtkamenogorenſis fuere non nullae correſpondentes obſeruationibus, quas Cel. *Lowitz* in Aſtracan inſtituit, anſam hinc arripuit Cl. Auctor in Longitudinem huius vrbis inquirere, atque inde Longitudinem Vſtkamenogorsk vlterius confirmare. Obſeruationes, quae hic referuntur, videndi cupidos ad ipſam diſſertationem ablegamus, conſectarium vero earum hic apponimus.

	Latitudo Borealis	Longit. in temp. a merid. Pariſ.	Longit. in grad. a primo merid.
Barnaul	53°. 20′. 0″.	5^h. 24′. 27″, or.	101°. 6′. 45″
Smeinogorsk	51. 9. 27.	5. 19. 18.	99. 49. 30
Fodinae Koliwanowoskreſenſes	51. 19. 23.		
Vſtkamenogorsk	49. 56. 45.	5. 21. 21.	100. 20. 15
Arx Semipalatnaja	50. 29. 45.		
Statio Karjakowskaja	52. 16. 30.		
Arx Schelefinskaia	53. 51. 52.		
Arx Omskaja	54. 58. 5.		
Tara	56. 54. 42.		
Oſtium Fluminis Iſchim	57. 41. 1.		
Aſtracan	46. 21. 12	3. 2. 51.	65. 42. 45.

Latitudo vrbis Aſtracan, quae hic ſubiungitur, deducta eſt ex tribus altitudinibus Solis meridianis circa ſolſtitum itidem a Cel. *Lowitz* inſtitutis.

IV.

Expoſitio declinationis magneticae in Imperio Ruſſico eiusque vicinia obſeruatae.

Auctore W. L. Krafft pag. 695.

In mappis etiam recentiſſimis, quibus ingenioſa Cel. *Halleii* methodo obſeruationes declinationis magneticae delineari ſolent, in Imperio Ruſſico ob defectum obſeruationum ingens hiatus et lacuna cernitur. Huic vt medela adferretur, Cel. Auctor omnes obſeruationes ſedulo collegit, quae hiſce annis ab Aſtronomis Academiae peregrinantibus in quam plurimis Imperii Ruſſici locis ſuper acu magnetica ſunt inſtitutae. Praemiſſa itaque breui eorum, quae hactenus a mathematicis in hoc argumento praeſtita ſunt, notitia, obſeruationes iſtae declinationis magneticae per Imperium Ruſſicum factae vna cum longitudine et latitudine locorum geographica in praeſenti diſſertatione recenſentur; quae cum mappae eiusmodi declinatoriae, ſuo quaelibet loco, eſſent inſertae: duo inprimis momenta, eaque haud contemnenda, quae hactenus erant dubia et obſcura, ex iſtis obſeruationibus confirmari et illuſtrari poterant: primo enim iam ductus illius meridiani magnetici, qui per Nouam Hollandiam tranſit, iam multo, quam ante, euidentius eſt exploratus;

ratus; ſecundo iam propemodum extra dubium eſt poſitum, declinationes maris Caſpici, olim a *Muſchenbroeckio* curuis ex Noua Brittania progreſſis attributas, curuis adſcribendas eſſe in Oceano Indico ab Halleio conſignatis, hasque ſucceſſu temporis verſus occaſum aliquomodo eſſe promotas. Ad polos magneticos quod attinet, etſi pro eorum ſitu definiendo parum luminis ex his obſeruationibus lucrari poſſe videmur; tamen, ſi in re tam lubrica coniecturis indulgere placeat, ex Cel. Auctoris opinione polus magneticus borealis in terris incognitis Groenlandiae ſub latitudine 70°. circiter et 25°. ad occaſum a Pariſiis; auſtralis vero ſub latitudine 50° et 90°. circiter ad ortum a meridiano Pariſino foret conſtituendus. In fine diſſertationis faciles traduntur formulae trigonometicae, ſecundum quas ex dato ſitu vtriusque poli magnetici geographico ipſa acus magneticae declinatio pro loco quouis propoſito poteſt computari.

V.

Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno 1772. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum cui accedunt obſeruationes nonnullae circa tempus, quo Flumen Neua glacie obducitur et iterum ab ea liberatur.

Auctore I. A. Euler pag. 706.

Cum et methodus et inſtrumenta, a Cel. Auctore in his obſeruationibus adhibita, iam ante in Tomis horum Commentariorum praecedentibus fuſius ſint deſcripta: hic tantum potiora obſeruationum momenta excerpere placet. Altitudo Barometri media toto hoc anno fuit 28,01; maxima 28,77; minima vero 27,10; adeoque ſpatium variationis 1,67. pollic. Altitudo thermometri maxima 104; minima 208. grad. diuiſ. delislianae. Aurorae boreales adparuerunt 21. His ſubiungit Cel. Auctor tabulam tempora indicantem, quibus inde ab anno 1718 ſingulis annis glacies fluuium Neuae tam obtegere quam deſerere coepit eamque compluribus elegantibus obſeruationibus illuſtrauit.

INDEX.

INDEX DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Dan. Bernoulli, De indole ſingulari ſerierum infinitarum, quas ſinus vel coſinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque ſummatione et vſu pag. 5.

L. Euler, Problematis cuiusdam diophantei euolutio pag. 24.

Eiusdem, Obſeruationes circa bina biquadrata, quorum ſummam in duo alia biquadrata reſoluere liceat pag. 64.

Eiusdem, De variis integrabilitatis generibus p. 70.

Eiusdem, Obſeruationes circa aequationem differentialem $ydy + Mydx + Ndx = 0$ pag. 105.

Eiusdem, Conſideratio aequationis differentio differentialis $(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dx.dz}{x}+(f+gx)\frac{zdx^2}{x^2}=0$ pag. 125.

A. I. Lexell, Solutio Problematis Analytici p. 155.

L. Euler, Exercitationes analyticae pag. 173.

Eiusdem, Digreſſio de Traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis pag. 205.

Phyſi-

Phyſico-Mathematica.

Dan. Bernoulli, Expoſitio theoretica ſingularis machinae hydraulicae, Tiguri Heluetiorum exſtructae pag. 249.

L Euler, De Colliſione corporum gyrantium pag. 272.

Eiusdem, De colliſione corporum pendulorum tam obliqua, quam motu gyratorio perturbata pag. 315.

Eiusdem, De vera Tautochrona in fluido p. 333.

Eiusdem, De Tautochrona in medio rariſſimo, quod reſiſtit in ratione multiplicata quacunque celeritatis pag. 349.

Eiusdem, Dilucidationes de Tautochronismo p. 362.

Eiusdem, De Chordis vibrantibus disquiſitio vlterior pag. 381.

Eiusdem, Animaduerſiones in ſolutionem Bernoullianam de motu chordarum ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitarum Tom. XVI. Nov. comment pag. 410.

Eiusdem, De motu vibratorio chordarum ex partibus quotcunqne diuerſae craſſitiei compoſitarum p. 422.

Eiusdem, De motu vibratorio chordarum craſſitie vtcunque variabili praeditarum p. 432.

Eiusdem, De motu vibratorio laminarum elaſticarum, vbi plures nouae vibrationum ſpecies

cies hactenus non pertractatae euoluuntur pag. 449.

Eiusdem, De motu grauium citiſſimo ſuper curuis ſpecie datis pag. 488.

Phyſica.

A. I. Gueldenſtaedt, Cyprinus Capoeta et Cyprinus Murſa pag. 507.

I. T. Koelreuter, Obſeruationum ſplanchnologicarum, ad Acipenſeris ruſſici et Huſonis anatomen, ſpeciatim vero ad ipſorum auditus organum, ſpectantium continuatio pag. 521.

C. F. Wolff, Deſcriptio Vituli bicipitis, cui accedit commentatio de ortu monſtrorum pag. 540.

P. S. Pallas, De Reliquiis animalium exoticorum per Aſiam borealem repertis Complementum pag. 576.

Aſtronomica.

A. I. Lexell, Disquiſitio de inueſtiganda Parallaxi Solis ex Tranſitu Veneris per Solem Anno 1769. pag. 609.

Steph. Rumovski, Obſeruationes Aſtronomicae Petropoli anno 1772. inſtitutae pag. 673.

Eiusdem, Determinatio Latitudinis et Longitudinis quorundam Sibiriae Locorum deducta

ex obſeruationibus a Dno *Islenieff* inſtitutis Anno 1770. pag. 677.

W. L. Krafft, Expoſitio Declinationis magneticae in variis Imperii Ruſſici regionibus obſervatae pag. 695.

I. Alb. Euler, Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli Anno 1772. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum, cui accedunt obſeruationes nonnullae circa tempus, quo flumen Neua glacie obducitur et iterum ab ea liberatur p. 706.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
INDOLE SINGVLARI SERIERVM INFINITARVM
QVAS
SINVS VEL COSINVS ANGVLORVM ARITHMETICE PROGREDIENTIVM FORMANT, EARVMQVE SVMMATIONE ET VSV.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

In ſchediasmate, quod ſuperiori anno ad Academiam transmiſi, de ſummationibus *incongruè* veris ſerierum periodice recurrentium, veraque earum interpretatione, duas potiſſimum pertractaui eiusmodi ſeries cum annexo earundem valore. Quod ſi nempe in circulo, vnitatem pro radio habente, ſumatur arcus qualiscunque x; docet calculus, eſſe ſeriem infinitam $\text{coſ.}\,x + \text{coſ.}\,2x + \text{coſ.}\,3x + \text{coſ.}\,4x + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$; Simulque $\text{ſin.}\,x + \text{ſin.}\,2x + \text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x + \text{etc.} = \frac{\text{ſin.}\,x}{2\,\text{ſin. vers.}\,x}$.

Explicui ſingularem veritatis ſpeciem, qua huiusmodi proprietates ſunt accipiendae; atque genuinam interpretationem meam cum minime inutilem exiſtimem, nec in Analyſi abſtracta, nec in peculiari problematum quorundam phyſico-mechanicorum contemplatione; operae pretium erit hoc argumentum, quantum fieri poteſt, augere atque perficere.

§. 2 Ambae praememoratae ſeries ad claſſem recurrentium pertinent, ideo quod in vtraque ſinguli termini ſint aequales termino praecedenti multiplicato per 2 coſ. x minus termino antepraecedente; ſic vtraque ſeries ordini, qui dicitur, ſecundo annumerata duos habet indices, nempe 2 coſ. x et -1. Notabitur quoque, quod ſuas habeant periodos, quae conſtantiſſime recurrunt, perfecte easdem, et quod ſumma terminorum, vnamquamuis periodum formantium, ſit ſemper nihilo aequalis. Sola perfecta terminorum, poſt abſolutam quamuis periodum, regeneratione, coniuncta cum adcurata periodorum annihilatione conficitur vtriusque ſeriei valor: ſi vna vel altera conditio tantillum deficiat, ſumma ſeriei toto coelo diuerſa prodibit, etiamſi diſcrimen veluti infinite paruum ſtatuatur; ſolum enim nihilum abſolutum, ſi abſolute infinities ſumtum ponatur, permanere poteſt, quod eſt. Demonſtraui autem in priori ſchediasmate, praememoratos valores vtriusque ſeriei ideo ſaltem veros eſſe, quia aequum ius in ſingulos cuiusuis periodi terminos cadere ponendum eſt, quod principium ſoli infinito abſoluto

competit. Magni mihi haec videtur obſeruatio momenti in aliquibus pertractandis quaeſtionibus phyſico-mechanicis de motiunculis valde paruis, quae a geometris pro infinite paruis cenſentur, et quae locum habere non poſſunt, niſi abſolute nihilum ſtatuatur id, quod pro infinite paruo aſſumtum fuit. Sic contradictionem aliquando implicare poſſunt, quae pro apodictice demonſtratis habentur, quando vibratiunculas chordarum minimas pro infinite paruis ſumunt, niſi vibrationibus infinite paruis ſubſtituant vibrationes perfecte nullas; tunc autem variationes motuum in perfecta quiete quaeruntur: contradictio emergens non eſt poſita in Analyſi, ſed potius in phyſica, quia perfecta quies pro motu infinite paruo haberi nequit.

§. 3. Notetur inſuper, ambas ſeries fundamentales paragrapho primo expoſitas eſſe generales pro omni arcu x: imo poterit cenſeri vel ipſa integra peripheria circuli, ſiue ſemel ſiue pluries ſumta, maior, quia tam arcus x quam arcus $4nq+x$ eosdem habent ſinus et coſinus et ſinus verſos, ſi per n intelligatur qualiscunque numerus integer, et per q quadrans circuli: attamen excipiendus eſt caſus, quo ſumitur arcus x *perfecte* nullus; dico *perfecte* nullus, ideo quod omnis magnitudo poſſibilis, vtcunque paruam concipere poſſimus, theorema accurate reſtituit. In hoc caſu vtraque ſeries fit infinita; poſt quamuis reuolutionem numerus n ſubito integra vnitate augetur, et hoc modo lex continuitatis veluti in puncto mathematico interrumpitur,

aut, ſi mauis, in medio puncto, quae tamen protinus reſtituitur pro quauis noua reuolutione.

§. 4. Tametſi ſummae duarum ſerierum nonniſi ſingulari atque incongruo modo verae dici poſſint, quod in praecedente oſtendi ſchediaſmate; facili tamen operatione eaque legitima nouas ſuppeditant nulli porro amphiboliae ſubiectas, quia nouae ſeries emergentes manifeſte ad ſummam praeſcriptam conuergunt, ſecus ac ſeries primitiuae, ex quibus nouae deducuntur. Incipiam a ſerie coſinuum

$$(A) \operatorname{cof.} x + \operatorname{cof.} 2x + \operatorname{cof.} 3x + \operatorname{cof.} 4x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}.$$

Licebit vtique conſiderare arcum x tanquam variabilem, eamque multiplicare per dx, vt ſic habeatur $dx \operatorname{cof.} x + dx \operatorname{cof.} 2x + dx \operatorname{cof.} 3x + dx \operatorname{cof.} 4x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}dx$; haec vero ſi integretur, cum additione conſtantis C, dat $\operatorname{fin.} x + \tfrac{1}{2}\operatorname{fin.} 2x + \tfrac{1}{3}\operatorname{fin.} 3x + \tfrac{1}{4}\operatorname{fin.} 4x + \text{etc.} = C - \tfrac{1}{2}x$. At vero conſtans aſſumta C non ſine circumſpectione erit determinanda. Quis eſt, qui non primo putet aſpectu, nullo adhuc inſtituto praeuio examine, quod euaneſcente arcu x, integra ſimul ſinuum ſeries euaneſcat, praeſertim cum coefficientes terminorum continue decreſcant: attamen falleret haec praeconcepta opinio: certum enim eſt, verum conſtantis addendae valorem eſſe aequalem quadranti circuli, quem vocaui q, et, quod mirum videbitur, ipſam ſeriem ſinuum nunquam fieri maiorem, quam cum ſumitur arcus x omni arcu aſſignabili minor ſiue infinite paruus, vt communi loquendi modo vtar, modo non ſit perfecte nullus. Nodum quis-

que

que ſibi ſoluet, modo conſideret infinitos dari terminos, qui omnes minime a ſe inuicem differre cenſeri poſſint; ſic ſin. x cenſeri poteſt $= \frac{1}{2}$ ſin. $2x$ vel $= \frac{1}{3}$ ſin. $3x$ etc. nec dubium eſt, quin quantitas infinite parua infinities ſumta tandem efficere poſſit quantitatem finitam.

§. 5. Cum igitur caſus, quo ſupponitur $x = 0$, minime ſit aptus ad quaeſitum valorem conſtantis C addendae determinandum; opera danda eſt, vt alius inueniatur caſus, quo ſumma ſeriei perſpecta habeatur: huiusmodi caſus eſt, cum ſumitur $x = q$ ſiue aequalis quadranti circuli; tunc enim ſeries ſinuum generalis dabit hanc ſeriem ſpecialem $1 \pm 0 - \frac{1}{3} \pm 0 + \frac{1}{5} \pm 0 - \frac{1}{7} \pm 0 +$ etc. vel ſimpliciter $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. quam olim *Leibnitius* dedit pro ſemiquadrante circuli ſiue $\frac{1}{2} q$; oportet igitur pro hoc caſu, vt ſit $C - \frac{1}{2} q = \frac{1}{2} q$, ſiue $C = q$; vnde deducitur ſumma ſeriei infinitae

(B) $\text{ſin.}\, x + \frac{1}{2} \text{ſin.}\, 2x + \frac{1}{3} \text{ſin.}\, 3x + \frac{1}{4} \text{ſin.}\, 4x + \text{etc.} = q - \frac{1}{2} x.$

Noua eſt haec ſeries atque ideo notatu digna, quod ſumma ſinuum definiatur per arcum circuli; nec amplius vlla incongruitatis ſpecie laborat, quamuis ex ſerie *incongrue* vera ſit petita, quia perpetuo magis magisque ad verum valorem conuergit eumque tandem tantum non attingit, quiscunque fuerit primus arcus x, modo contineatur intra terminos 0 et 360°. Id vero quemadmodum contingere poſſit, ſequenti intelligetur exemplo, quo ſucceſſiue ponitur

$x = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3}q$; $x = \frac{4}{3}q$; $x = \frac{6}{3}q$; $x = \frac{8}{3}q$ et $x = \frac{10}{3}q$, pro quibus poſitionibus ſequentes oriuntur aequationes:

$$(1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{11}+\text{etc.})\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}q;\ \text{vbi}\ x = \tfrac{2}{3}q$$

$$(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{11}+\text{etc.})\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}q;\ \ldots\ x = \tfrac{4}{3}q$$

$$(0-0+0-0+0-0+0-0+\text{etc.})\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0q;\ \ldots\ x = \tfrac{6}{3}q$$

$$(-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\text{etc.})\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -\tfrac{1}{3}q;\ \ldots\ x = \tfrac{8}{3}q$$

$$(-1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\text{etc.})\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -\tfrac{2}{3}q;\ \ldots\ x = \tfrac{10}{3}q.$$

§. 6. Facile intelligitur ex allatis valoribus, non defuturam aequationem generalem, donec arcus x non attingit totius circumferentiae vltimum terminum: in ipſo autem hoc termino ſubito fallit regula; nempe in ipſo puncto, quod ſimul finis eſt primae reuolutionis et initium ſecundae, tranſilit ſumma ſeriei a valore $-q$ ad valorem $+q$, qui ſaltus contingit, quoties noua repetitur reuolutio: integer autem tranſitus, quod liceat repetere, perficitur, non in arculo dx, qualis communiter concipitur, ſed in vnico puncto vere mathematico. In integrum reſtituitur theorema, ſi pro quauis reuolutione alia atque alia conueniens conſtans addatur; erit ſcilicet pro prima reuolutione $C = q$; pro ſecunda $C = 3q$; pro tertia $C = 5q$, atque pro $n$teſima reuolutione $C = (2n-1)q$. Sic erit generaliter $\text{ſin.}\,x + \frac{1}{2}\text{ſin.}\,2x + \frac{1}{3}\text{ſin.}\,3x + \text{etc.} = (2n-1)q - \frac{1}{2}x$; At ipſa haec conſtantis recurrens variatio repugnare videtur continuitatis legi, quae vtique pro quauis incipiente noua reuolutione interrumpitur, dum ſalva manet per totum vnius eiusdemque reuolutionis decur-

decurſum, de quo adeoque ſolo deinceps dicam. Interim nunc liquet, quod ſi fuerit arcus x omni quantitate aſſignabili minor, modo non ſit perfecte nullius, fore ſummam ſeriei (B) in paragrapho quinto expoſitae quadranti circuli aequalem.

§. 7. Prouti ſeriem (B) paragraphi quinti deduximus ex ſerie (A) paragraphi quarti, eadem methodo nouam deducemus ſeriem ex inuenta (B). Nempe multiplicetur ſeries (B) eiusque valor adſcriptus per dx, vt ſic habeatur $dx\,\text{ſin.}\,x + \frac{1}{2}dx\,\text{ſin.}\,2x + \frac{1}{3}dx\,\text{ſin.}\,3x + \frac{1}{4}dx\,\text{ſin.}\,4x + \text{etc.} = q\,dx - \frac{1}{2}x\,dx$: haec nunc poſterior aequatio integretur cum additione conſtantis C; ſic prodit $-\text{coſ.}\,x - \frac{1}{4}\text{coſ.}\,2x - \frac{1}{9}\text{coſ.}\,3x - \frac{1}{16}\text{coſ.}\,4x - \text{etc.} = qx - \frac{1}{4}xx + C$. Hic rurſus quantitas conſtans ex caſu aliquo peculiari, qui ſua ſe ſimplicitate commendet, deducenda eſt; ſumatur $x = q$, et obtinebitur $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{36} - \frac{1}{64} + \text{etc.} = \frac{3}{4}qq + C$; hinc iam innoteſcit conſtans C per ſeriem; ſed determinabitur multo breuius, ſi ſimul in ſubſidium vocetur alius caſus, quo ponitur $x = 2q$; Exinde enim fit $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = qq + C$, factaque diuiſione per 4 oritur nunc $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{36} - \frac{1}{64} + \text{etc.} = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}C$; combinando autem vtramque aequationem emerſam, communi ſerie expreſſam, incidimus in ſimpliciſſimam aequationem $C + \frac{3}{4}qq = \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}qq$, ſiue $C = -\frac{2}{3}qq$. Subſtituto hoc valore in aequatione generali, permutatisque ſignis, tandem prodit noua ſeries

$$\text{(C)}\ \text{coſ.}\,x + \tfrac{1}{4}\text{coſ.}\,2x + \tfrac{1}{9}\text{coſ.}\,3x + \tfrac{1}{16}\text{coſ.}\,4x + \text{etc.} = \tfrac{2}{3}qq - qx + \tfrac{1}{4}x^2.$$

 §. 8.

§. 8. Ex modo dicto valore ſeriei (C) inſtar corollarii, poſito arcu $x = 0$, deducitur valor ſeriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{2}{3} q q,$$

quod theorema, ſi bene memini, iam diu ab aliis alia methodo fuit demonſtratum. Similiter, poſito $x = 2q$, deducitur eadem ſeries, cum ſignis alternatim permutatis, nempe

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{3} q q.$$

Si ambae hae ſeries addantur, reperietur etiam

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} = \frac{1}{2} q q.$$

Poterit quoque viciſſim quadratum quadrantis circuli per huiusmodi ſeries numericas ſimpliciſſimas determinari: Erit nempe

$$q q = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right)$$

vel

$$q q = 3\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.}\right)$$

vel etiam

$$q q = 2\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}\right);$$

Atque ſic deduximus valorem ſeriei (C) ex valore ſeriei (B) §. 5. expoſitae, vbi nunc notabimus, quod ſi praefatam ſeriem (B) generalius pro quacunque reuolutione exprimere voluiſſemus ad normam paragraphi ſexti; tunc quoque valorem ſeriei (C) generalius pro quauis data $n$teſima reuolutione expreſſum obtinuiſſemus; ſcilicet

$$\text{coſ.}\, x + \frac{1}{4}\text{coſ.}\, 2x + \frac{1}{9}\text{coſ.}\, 3x + \frac{1}{16}\text{coſ.}\, 4x + \text{etc.} = \left(4nn - 4n + \frac{2}{3}\right) qq - (2n-1) q x + \frac{1}{4} x x$$

qui

qui valor locum habet, ſi arcus aſſumtus x fuerit maior, quam $4.(n-1.)q$ et minor, quam $4nq$, atque adeo conſiſtat inter limites $4.(n-1.)q$ et $4nq$.

§. 9. Ex praemiſſis iam apparet, quemadmodum ex quauis ſerie inuenta poſſit alia noua deduci, per meros arcus circulares ſummabilis: hoc modo alternatim ſeries ſinuum et ſeries coſinuum prodibunt: omnes autem ex ſerie primitiua (A) paragraphi quarti, hybrida atque incongrua, ſic erunt depromptae; non puto abs re fore, ſi operationem iſtam paullo vlterius proſecutus fuero eo fine, vt lex variationum tanto magis eluceſcat. Quod ſi itaque aequatio (C) in fine paragraphi ſeptimi expoſita iterum per dx multiplicetur poſtmodumque integretur absque vlla conſtantis additione (quia euaneſcente arcu x ſimul ſeries eiusque valor appoſitus euaneſcunt); incidimus in nouam ſeriem eiusdemque valorem,

$$\text{(D) ſin. } x + \tfrac{1}{8}\text{ ſin. } 2x + \tfrac{1}{27}\text{ ſin. } 3x + \tfrac{1}{64}\text{ ſin. } 4x + \text{etc.} = \tfrac{2}{3}qqx - \tfrac{1}{2}qxx + \tfrac{1}{12}x^3.$$

In noua hac ſerie notari potiſſimum meretur caſus, quo pro arcu primi termini arbitrario ſumitur ipſe quadrans circuli, quia hoc modo iterum, vt in paragrapho octauo, nouam docemur aequationem inter ſeriem numericam et cubum quadrantis circuli; poſito igitur $x=q$, reperitur ſeries numerica

$$1 - \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} - \tfrac{1}{7^3} + \text{etc.} = \tfrac{1}{4}q^3$$

 vel

vel viciſſim

$$q^3 = 4\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc}\right).$$

§. 10. Multiplicata iterum aequatione (D) in praecedente paragrapho expoſita per dx, factaque eius integratione cum additione conſtantis C, nouam acquirimus aequationem

$$\text{coſ.}\,x + \frac{1}{2^4}\text{coſ.}\,2x + \frac{1}{3^4}\text{coſ.}\,3x + \frac{1}{4^4}\text{coſ.}\,4x + \text{etc.} = -\frac{1}{3}qqxx + \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{48}x^4 + C,$$

in qua ſi ponatur $x = 0$, prodit

$$C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Verum ſi et alii caſus in ſubſidium vocentur, poterit conſtans C alio modo, ad praeſens inſtitutum magis accommodato, exprimi. Conſideremus igitur caſum, quo ponitur $x = 2q$, ſic obtinemus aequationem hanc aliam,

$$-1 + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} = -\frac{1}{3}q^4 + C$$

ſiue inuerſis ſignis

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{1}{3}q^4 - C.$$

Notetur nunc, quod ſit ſeries

$$\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$

ad ſeriem

$$\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$

vt 8 ad 7, quod vt demonſtratum habeatur, ponatur C pro priori ſerie et s pro poſteriori, ſic erit

$$C - s = 2\left(\tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{4^4} + \tfrac{1}{6^4} + \tfrac{1}{8^4} + \text{etc.}\right) = \tfrac{2}{2^4}\left(1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$
$$= \tfrac{1}{8} C\,;$$

eſt igitur

$$C - s = \tfrac{1}{8} C, \text{ ſiue } s = \tfrac{7}{8} C:$$

ſubſtituto hoc valore in aequatione

$$1 - \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} - \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.} = \tfrac{1}{3} q^4 - C,$$

habebimus $\tfrac{7}{8} C = \tfrac{1}{3} q^4 - C$, vel denique $C = \tfrac{8}{45} q^4$: Atque hic valor eſt quantitatis in aequatione noſtra principali ſubſtituendae, quo facto rurſus nouam obtinemus ſeriem eiusque valorem

$$\text{(E)} \cos. x + \tfrac{1}{2^4} \cos. 2x + \tfrac{1}{3^4} \cos. 3x + \tfrac{1}{4^4} \cos. 4x + \text{etc.} = \tfrac{8}{45} q^4$$
$$- \tfrac{1}{3} qqxx + \tfrac{1}{6} qx^3 - \tfrac{1}{48} x^4.$$

Simul autem obtinuimus ſeriem numericam

$$1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.} = \tfrac{8}{45} q^4$$

vel etiam

$$1 - \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} - \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.} = \tfrac{7}{45} q^4;$$

vnde ex additione harum ambarum ſerierum prodit etiam

$$2\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) = \tfrac{1}{3} q^4$$

ſiue

$$1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.} = \tfrac{1}{6} q^4$$

vel viciſſim

$$q^4 = 6\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right.$$

§. 11. Denique, vt hoc vnum ſuperaddam exemplum, iisdem inſiſtendo veſtigiis deducitur

citur ex praefata aequatione (E) ſequens noua aequatio

$$(F)\ \text{ſin.}\,x + \tfrac{1}{2^5}\,\text{ſin.}\,2x + \tfrac{1}{3^5}\,\text{ſin.}\,3x + \tfrac{1}{4^5}\,\text{ſin.}\,4x + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{8}{45}q^4x - \tfrac{1}{9}qqx^3 + \tfrac{1}{24}qx^4 - \tfrac{1}{240}x^5.$$

Si in hac aequatione generali ponatur $x = q$, obtinebitur ſeries citiſſime tandem conuergens vna cum eius valore expreſſo per quintam dimenſionem quadrantis circuli, nempe

$$1 - \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{5^5} - \tfrac{1}{7^5} + \text{etc.} = \tfrac{5}{48}q^5$$

atque viciſſim

$$q^5 = \tfrac{48}{5}(1 - \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{5^5} - \tfrac{1}{7^5} + \text{etc.}$$

Sic iam manifeſtum eſt, poſſe huiusmodi ſeries altioris ordinis pro lubitu conſtrui, quae omnes ex prima ſerie fundamentali (A) paragrapho quarto expoſita ſucceſſiue fuerint erutae, tametſi per ſe non aliter quam incongrue vera dici poſſit. Vnaquaeuis autem ſeries de nouo eruta fons et origo eſt innumerarum, pro ratione arcus aſſumti x, quae omnes erunt ſummabiles; huiusmodi corollaria aliis ſibi formanda relinquo, ſi qui ſint, qui haſce disquiſitiones haud faſtidiant. Silentio quoque transmittam ſemitas quasdam compendiarias, quae ad nouas altiorum ordinum ſeries formandas conducant, quamuis hac de re legem condere generalem opus difficile putem.

§. 12. Quod ad ſeries attinet, quibus diuerſae quantitates quadrantis q definiuntur, has ita ſeligere potui, vt nemo ſit, qui non primo aſpectu legem gene-

generalem, ſecundum quam ſingulae progrediantur, perſpiciat. Quod ſi coefficientes hiſce ſeriebus praefixi aeque perſpicui eſſent, magno id commodo eueniſſet; quicquid ſit, omnes, quos calculo ſubieci, ſimul conſpectui exponam:

$$q = 2\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc.}\right) \text{ conſ. §. 5.}$$

$$q^2 = 2\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 8.}$$

$$q^3 = 4\left(1 - \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} - \tfrac{1}{7^3} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 9.}$$

$$q^4 = 6\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 20.}$$

$$q^5 = \tfrac{48}{5}\left(1 - \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{5^5} - \tfrac{1}{7^5} + \text{etc.}\right) \ldots\ldots \text{§. 11.}$$

Hinc apparet, dignitates altiores quadrantis q citiſſime conuergere, ſimulque coefficientes creſcere quam proxime in ratione radii ad quadrantem.

§. 13. Theoremata, quae attuli, omnia leui negotio deriuata ſunt ex theoremate abſtracto primitiuo, cuius vera interpretatio nondum fuerat obſeruata; ſed et alius theorematis mentionem feci paragrapho primo, non de coſinibus, ſed de ipſis ſinibus, quod plane eiusdem eſt naturae cum altero. Scilicet demonſtraui in priori ſchediasmate, eſſe ſeriem infinitam

$$\text{ſin.}\,x + \text{ſin.}\,2x + \text{ſin.}\,3x + \text{ſin.}\,4x + \text{etc.} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,x}{\text{ſin.\,verſ.}\,x}.$$

Inde vero iterum tot noua deriuari poſſent theoremata, ac antea, niſi integratiunculae, per quas iuimus, nunc longe altioris indaginis, impedimentum faceſſerent. Prima quidem operatio parum negotii

faceſſit;

ſuceſſit; at vero ſequentes omnes omnem protinus eludere videntur Analyſin. Calculum pro prima illa operatione ſuperaddam; de vlterioribus viderint alii.

§. 14. Multiplicata igitur praefata noſtra aequatione per dx, factaque integratione oritur

$$-\text{coſ.}\, x - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\, 2x - \tfrac{1}{3}\text{coſ.}\, 3x - \tfrac{1}{4}\text{coſ.}\, 4x - \text{etc.} = \int \frac{\tfrac{1}{2} dx\, \text{ſin.}\, x}{\text{ſin. verſ.}\, x};$$

Ponatur ſin. vers. $x = z$; ſic fiet ſin. $x = \sqrt{2z - zz}$ et $dx = \frac{dz}{\sqrt{2z - zz}}$, quibus valoribus ſubſtitutis oritur ſimpliciter $\int \frac{\tfrac{1}{2} dx\, \text{ſin.}\, x}{\text{ſin. verſ.}\, x} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \tfrac{1}{2}\log. \frac{z}{C}$, vbi per C intelligitur conſtans conueniens mox determinanda. Eſt igitur, mutatis coſinuum ſignis,

$$\text{coſ.}\, x + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\, 2x + \tfrac{1}{3}\text{coſ.}\, 3x + \tfrac{1}{4}\text{coſ.}\, 4x + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\log. \frac{C}{z}.$$

Vt nunc determinetur conſtans C, in ſubſidium vocandus eſt caſus particularis ad hoc negotium commodus, qualis eſt, ſi ponatur $x = q$, atque adeo $z = 1$; ſic enim oritur ſeries numerica

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\log. C,$$

ſiue

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{etc.} = \log. \tfrac{1}{C}.$$

At vero notum eſt, ſeriem iſtam indicare logarithmum hyperbolicum ex binario: ergo nunc habetur

$$\log\, 2 = \log. \tfrac{1}{C},\ \text{ſiue}\ 2 = \tfrac{1}{C},\ \text{vnde denique}\ C = \tfrac{1}{2}.$$

Sic obtinetur aequatio finalis

(G)

$$(G)\ \text{coſ.}\, x + \tfrac{1}{2}\, \text{coſ.}\, 2x + \tfrac{1}{3}\, \text{coſ.}\, 3x + \tfrac{1}{4}\, \text{coſ.}\, 4x + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{1}{2} \log. \frac{1}{2 - z} = \tfrac{1}{2} \log. \frac{1}{2\, \text{ſin. verſ.}\, x}.$$

Ergo ſi fuerit $x = 0$, vel etiam $x = 4q$, fit ſumma ſeriei infinita, atque e contrario tota euaneſcit, cum ſumitur $x = \frac{2}{3} q$, vel $x = \frac{10}{3} q$.

§. 15. Ex inuentis valoribus ſerierum noſtrarum (qui variante arcu x vtique ſimul variant, ſola excepta ſerie (A) §. 4.) intelligimus arcus deſignari poſſe tales, vt ſumma ſeriei maxima vel minima fiat. Determinatio horum maximorum vel minimorum pro ſeriebus noſtris nunc per ſe patet. Sic ſeries in fine paragraphi ſeptimi poſita, nempe

$$\text{coſ.}\, x + \tfrac{1}{4}\, \text{coſ.}\, 2x + \tfrac{1}{9}\, \text{coſ.}\, 3x + \tfrac{1}{16}\, \text{coſ.}\, 4x + \text{etc.}$$

minima eſt, cum ſumitur $x = 2q$; tunc autem fit ipſa ſeries $= -\frac{1}{3} qq$. Similiter ſeries (D)

$$\text{ſin}\, x + \tfrac{1}{8}\, \text{ſin.}\, 2x + \tfrac{1}{27}\, \text{ſin.}\, 3x + \tfrac{1}{64}\, \text{ſin.}\, 4x + \text{etc.}$$

(vid. § 9.) maxima fit, cum ſumitur $x = 2q - 2q\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, minima autem quando ponitur $x = 2q + 2q\sqrt{\tfrac{1}{3}}$. In priori caſu fit ſumma ſeriei $= 0{,}256\, q^3$, in poſteriori $= -0{,}256\, q^3$ ſiue proxime $= \pm 1$. Sed et haec eadem ſeries ſuos habet arcus x, pro quibus ſumma ipſius tota euaneſcit; cum autem haec ſumma ſit ſemper $= \frac{2}{3} qqx - \frac{1}{2} qx^2 + \frac{1}{12} x^3$, fiet hic valor $= 0$, ſi ſumatur vel $x = 0$, vel $x = 2q$, vel $x = 4q$.

§. 16. Iam vero hic rurſus aliquid emergit plane ſingulare, ſi ad ſeries altiores progrediamur, vbi formula ſummatoria plura, quam tria, indicat puncta, pro quibus ſeries euaneſcere poſſit, et plura, quam duo, puncta, in quibus ſeries ad maximum

vel minimum valorem reducatur: tunc nempe contingit, vt formula ſummatoria praeter vera huius conditionis puncta, ſimul alia indicet prorſus falſa; iteratum paradoxum quisque ſibi ſoluet, modo meminerit totam praemiſſam theoriam vnicam admittere reuolutionem, ita vt arcus x nec maior accipi poſſit quam $4q$, nec minor nihilo ſiue negatiuus. Ergo omnes reiiciendae erunt radices, quarum valor x extra praefatos cancellos vagatur; reliquae omnes, non ſolum verae, ſed et vtiles, erunt retinendae. Hanc animaduerſionem exemplo illuſtrabo, quod petam a ſerie (F) paragrapho vndecimo expoſita, cuius ſcilicet ſummam inuenimus

$$= \tfrac{8}{45} q^4 x - \tfrac{1}{9} q q x^3 + \tfrac{1}{24} q x^4 - \tfrac{1}{240} q^5 :$$

hanc formulam ſi faciamus $= 0$, habebimus tres radices veras atque vtiles, nempe $x = 0$; $x = 2q$ et $x = 4q$: His accedunt duae aliae radices non ſolum inutiles ſed et prorſus falſae, nempe $x = 2q - 2q\sqrt{\tfrac{7}{3}}$ ſimulque $x = 2q + 2q\sqrt{\tfrac{7}{3}}$. Dico autem ideo falſas eſſe, quia prior eſt negatiua, et altera maior quam $4q$, atque ſic ambae cancellos 0 et $4q$ transgrediuntur. Quod nunc attinet ad valores arcuum x, pro quibus ſumma ſeriei (F) maxima vel minima fit, oportet differentiale quantitatis ſummatoriae ponere aequale nihilo, vnde habetur pro iſto negotio

$$\tfrac{8}{45} q^4 - \tfrac{1}{3} q q x x + \tfrac{1}{6} q x^3 - \tfrac{1}{48} x^4 = 0,$$

quae aequatio debite tractata dat

$$x = 2q \pm 2q\sqrt{(1 \pm \tfrac{8}{15})} :$$

haec

haec expreſſio quatuor inuoluit radices, nempe

$x = 2q + 2q\sqrt{\tfrac{7}{15}}$;

tum etiam

$x = 2q - 2q\sqrt{\tfrac{7}{15}}$,

deinde

$x = 2q + 2q\sqrt{\tfrac{25}{15}}$

ac denique

$x = 2q - 2q\sqrt{\tfrac{25}{15}}$.

Duae priores, quae proxime faciunt

$x = 3,366\,q$, et $x = 0,634\,q$,

cum contineantur intra limites 0 et $4q$, quaeſtioni praeſenti optime ſatisfaciunt: duae poſteriores autem radices, quae proxime faciunt

$x = 4,476\,q$, et $x = -0,476\,q$,

cum extra praefatos limites euagentur, falſae ſunt atque adeo reiiciendae.

§. 17. Praemiſſa theoria neceſſaria mihi videtur in explicanda doctrina de minimis vibrationibus chordarum tenſarum vniformium. Sit chorda fixa in ambabus ſui extremitatibus, ſumaturque pro vnitate radius circuli, cuius peripheria ſit = longitudini chordae ſiue $= 4q$: fuerit nunc chorda paululum incuruata a potentiolis vnicuique puncto applicatis, quibus omnibus ſimul relaxatis motiunculae reciprocae in chorda oboriantur; oſtendi autem in actis Acad. reg. Berol. quod vnicuique puncto inſint vel ineſſe poſſint plures aut etiam innumerae vibra-

tiunculae ſimplices atque regulares coexiſtentes, nec ſe vllo modo perturbantes. Sic ſumto initio abſciſſarum in alterutra extremitate chordae, poſitaque abſciſſa qualicunque $= x$, minima applicata $= y$, demonſtraui, aſſumi poſſe hanc aequationem pro curvatura primitiua:

$$y = \alpha \,\text{ſin.}\, x + \beta \,\text{ſin.}\, 2x + \gamma \,\text{ſin.}\, 3x + \delta \,\text{ſin.}\, 4x + \text{etc.}$$

vbi quidem per α, β, γ, δ etc. intelliguntur parvulae quantitates arbitrariae et conſtantes. Notetur autem terminum $\alpha \,\text{ſin.}\, x$ exprimere vibrationes primi ordinis, quatenus ſuper dimidia chordae longitudine formantur, terminum $\beta \,\text{ſin}\, 2x$ vibrationes ſecundi ordinis ſuper chordae quarta parte, et ſic porro: ſic coëfficientes α, β etc. denotant amplitudines excurſionum pro ſingulis vibrationum ordinibus. Oportet igitur, vt poſito valore α maximo, quem argumentum noſtrum phyſice conſideratum ferre poſſit relatiue ad longitudinem chordae, oportet, inquam, vt valores α, β, γ, δ etc. minimum decreſcant in ratione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc. imo cum ſumma huius ſeriei ſit adhuc infinita, contingere poſſet, vt chorda aliquibus in locis enormiter ab axe recederet inter vibrandum; ſtatuo propterea coëfficientes α, β, γ, δ etc. magis adhuc decreſcere debere. Id vero praemiſſa theoria noſtra egregie confirmat. Sic in ſerie §. 13. forent coëfficientes α, β, γ, δ etc. omnes inter ſe aequales; vnde haberetur

$$y = \alpha(\text{ſin.}\, x + 2x + \text{ſin.}\, 3x + \text{ſin.}\, 4x + \text{etc.}) = \frac{\frac{1}{2}\alpha \,\text{ſin.}\, x}{\text{ſin. vers}\, x}:$$

ergo

ergo foret pro initio abſciſſarum, vbi $x = 0$, prima applicata infinities maior quam α, quod contradictionem inuoluit cum problemate phyſico. Similiter in ſerie (B) paragraphi quinti, poſito $x = 0$, non euaneſcit prima applicata, quin valor ſeriei tunc ſit $= q$, atque adeo prima applicata $= q\,\alpha$, quem valorem chorda inter vibrandum nunquam aſſumere poteſt. Haec ſatis probant, quam circumſpecte procedendum ſit, cum quantitatibus phyſicis valde paruis infinite parua in abſtracto ſubſtituimus; nec occurritur incommodo, ſi coëfficientes α, β, γ, δ etc. proportionaliter vtcunque diminuantur, niſi perfecte annihilentur; tunc autem integra chorda perfecte quieſcit: huius inſoliti remedii in toto praeſentis diſſertationis decurſu plurima paſſim vidimus exempla. Sic ſeries (A) §. 5. eſt $= -\frac{1}{2}$, qualiscunque ſit arcus x, ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus, ſiue finitus ſiue infinitus ſiue infinite paruus: attamen ſi fuerit arcus x perfecte nullus, fit ſeries manifeſte infinita.

§. 18. Praefatum incommodi genus afficere deſinit ſeries noſtras ſinuum altiorum ordinum, cuiusmodi ſunt ſeries (D) et (E) §§. 9 et 11. expoſitae, in quibus omnibus prima atque vltima applicata perfecte euaneſcunt, facta ſcilicet $x = 0$, vel $x = 4\,q$ ſic vt pleniſſime ad theoriam chordarum vibrantium applicari poſſint. Quod attinet ad ſeriem (D), haec ſubminiſtrat talem aequationem pro curuatura chordae

$$\frac{y}{\alpha} = \tfrac{2}{3}\,q\,q\,x - \tfrac{1}{2}\,q\,x\,x + \tfrac{1}{12}\,x^3;$$

At vero ſeries (F) dat aequationem

$$\frac{y}{a} = \frac{8}{45} q^4 x - \frac{1}{9} q q x^3 + \frac{1}{24} q x^4 - \frac{1}{240} x^5,$$

atque ſic porro, ſi vlterius progredi velimus. Pro priori ſerie habemus

$$\beta = \frac{1}{8} a; \ \gamma = \frac{1}{27} a; \ \delta = \frac{1}{64} a, \text{ etc.}$$

pro altera vero fit

$$\beta = \frac{1}{2^5} a; \ \gamma = \frac{1}{3^5} a; \ \delta = \frac{1}{4^5} a, \text{ etc.}$$

hinc cognoſcimus amplitudines ſingularum vibratiuncularum ſpecialium, ex quibus integer chordae motus vibratorius componitur. Porro, ſi tempuſculum vnius regularis vibrationis ſuper dimidia chordae longitudine formatae dicatur t, haec tempuſcula pro ſequentibus vibratiuncularum claſſibus erunt ſucceſſiue

$$\frac{1}{2} t, \ \frac{1}{3} t, \ \frac{1}{4} t, \text{ etc.}$$

atque ſic habemus notionem diſtinctiſſimam motus vibratorii in chorda, cuius curuatura primitiua expreſſa fuerit aequatione

$$\frac{y}{a} = \frac{2}{3} q q x - \frac{1}{2} q x x + \frac{1}{12} x^3$$

aut alia aequatione ad mentem theoriae noſtrae formata, ſimulque intelligimus, fore, vt poſt quoduis tempuſculum t ſingula chordae puncta ad momentum temporis perfecte quieſcant, et figuram primitiuam ad partes oppoſitas reſumat integra chorda. Ex his concludo, poſſe in hoc argumento formulas analyticas *in abſtracto* generaliter eſſe veras, quae pluribus in caſibus ſpecialibus *contradictionem* cum hypo-

hypotheſibus phyſicis inuoluant. Caeterum curuae, quas pro chorda vibrante methodus noſtra ſubminiſtrat, omnes ex duobus ſaltem ramis ſimilibus et aequalibus, attamen quoad latitudinem aeque ac longitudinem ſitu inuerſo poſitis, inſtar literae S compreſſae, componuntur; analyſis in ſuperioribus ordinibus equidem plures alios indicare poteſt ramos, quos vero ſyntheſis noſtra nullo modo admittit, quia extra limites o et $4q$ cadunt. Praememoratae *contradictioni* aliter occurri non poteſt, quam faciendo vibratiunculas, non infinite paruas, ſed perfecte nullas: Huiusmodi caſus admittit analyſis, phyſica repudiat.

PRO-

PROBLEMATIS CVIVSDAM DIOPHANTEI EVOLVTIO.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Cum olim iſtud problema Diophanteum tractaſſem, quo quearebantur tres numeri, quo 1°. ſumma 2°. ſumma productorum ex binis et 3°. productum omnium ſint numeri quadrati, ſolutio tantis difficultatibus implicata videbatur, vt huius generis problemata adhuc difficiliora vix aggredi eſſem auſus. Multo autem difficilius eſſe problema, cuius enodationem hic ſuſpicio, nemo dubitabit, qui eius ſolutionem tentare voluerit. Problema autem hoc ita ſe habet:

Inuenire quatuor numeros eius indolis, vt 1°. ſumma ſingulorum, 2°. ſumma factorum ex binis 3°. ſumma factorum ex ternis, et 4°. productum omnium ſint numeri quadrati.

Vel quod eodem redit

Inuenire aequationem biquadraticam huius formae: $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, *quae omnes ſuas radices*

radices habeat rationales, et cuius inſuper ſinguli coëfficientes A, B, C, D *ſint numeri quadrati.*

2. Non dubito fore pleroſque, qui mirabuntur, me in huiusmodi quaeſtionibus euoluendis, quas nunc quidem ſummi Geometrae auerſari videntur, operam conſumere; verum equidem fateri cogor, me ex huiusmodi inueſtigationibus tantundem fere voluptatis capere, quam ex profundiſſimis Geometriae ſublimioris ſpeculationibus. Ac ſi plurimum ſtudii et laboris impendi in quaeſtionibus grauioribus euoluendis, huiusmodi variatio argumenti quandam mihi haud ingratam recreationem afferre ſolet. Ceterum Analyſis ſublimior tantum debet Methodo Diophanteae, vt nefas videatur eam penitus repudiare.

3. Problema igitur propoſitum aggreſſurus, primum obſeruo, ſolutionem eius generalem fruſtra tentari; poſtquam enim pluribus modis calculum inſtituiſſem, ac ſemper in formulas nullo pacto extricabiles incidiſſem, agnoui vix quicquam praeſtari poſſe, niſi vires noſtras in ſolutionem quandam particularem intendamus. Sequenti ergo modo quatuor numeros quaeſitos conſtituo:

$$Mab,\ Mbc,\ Mcd,\ Mda$$

vbi etſi quinque litterae ſunt inductae, tamen haec potio iſta limitatione reſtringitur, vt productum primi in tertium aequale ſit producto ſecundi in quartum: quae reſtrictio vtique in ſe non eſt neceſſaria,

 vixque

vixque dubitare licet, quin etiam eiusmodi quaterni numeri quaeſito ſatisfaciant, in quibus haec conditio locum non habeat; verum equidem nullam adhuc viam detegere valui, qua huiusmodi ſolutiones elicere liceret.

4. Hac igitur numerorum quaeſitorum forma conſtituta, quatuor conditiones praeſcriptae ſequentes aequationes ſuppeditant:

I. $M(ab+bc+cd+da) =$ Quadrato

II. $M^2(abbc+bccd+cdda+daab+2abcd) =$ Quadr.

III. $M^3(abbccd+abccdd+aabcdd+aabbcd) =$ Quadr.

IV. $M^4 aabbccdd =$ Quadr.

vbi poſtrema conditio iam ſponte impletur, neque vero hinc concludere licet, limitationem ſupra inductam eſſe neceſſariam; cum eadem conditio aeque obtineretur, ſi quis quatuor numerorum inſuper per numerum quadratum quemcunque multiplicaretur, quo pacto ſolutio ab omni reſtrictione liberaretur, ſed tum reliquae aequationes nullo modo reſolui poſſent.

5. Reſtrictio autem adhibita hoc commodi nobis largitur, vt tertia aequatio hanc formam induat:

$$M\,abcd(ab+bc+cd+da) = \text{Quadr.}$$

vnde cum ob primam iam quadratum eſſe debeat haec forma

$$M(ab+bc+cd+da),$$

neceſſe

neceſſe eſt, vt hoc productum $abcd$ quadrato aequetur. Praeterea autem vt tam primae quam tertiae conditioni ſatisfiat, capi oportet

$$M = ab + bc + cd + da$$

vel ſi haec ſumma factorem habeat quadratum puta ff ſufficiet ſumi

$$M = \frac{ab + bc + cd + da}{ff},$$

ſiquidem per ſe manifeſtum eſt, ſolutionem ſemper ad numeros integros reduci poſſe.

6. Hinc iam ratio eſt perſpicua, cur initio quatuor quaeſitis numeris factorem communem M tribuerim; eo igitur rite definito, vt ſit

$$M = ab + bc + cd + da \text{ vel } M = \frac{ab + bc + cd + d}{ff}$$

duae tantum ſuperſunt conditiones, quas impleri oportet; alteram ſcilicet modo elicui, qua eſſe debet

$$abcd = \text{Quadrato}$$

alteram aequatio ſecunda ſuppeditat, quae poſtulat ob factorem M^2 iam quadratum, vt ſit

$$abbc + bccd + acdd + aabd + 2abcd = \text{Quadr.}$$

quae in hanc formam redigitur:

$$(aa + cc)bd + ac(bb + dd) + 2abcd = \text{Quadr.}$$

ſeu $bd(aa + cc) + (b + d)^2 ac = \text{Quadr.}$

7. Tota ergo quaeſtio ad inuentionem huiusmodi quatuor numerorum a, b, c, d eſt perducta, vt binis modo memoratis conditionibus ſatisfiat; vbi notari conuenit, inter binos numeros a et c ſimilem

 ratio-

rationem intercedere atque inter binos b et d; atque totum negotium a ſola ratione tam inter a et c quam inter b et d pendere. Quare vt pro quauis ſolutione minimos numeros obtineamus, tam numeros a et c quam b et d primos inter ſe ſtatui oportet. Si enim communem haberent diuiſorem, eo ſublato conditioni vtrique aeque ſatisfieret.

8. Quia euolutio poſterioris aequationis praecipuas difficultates inuoluit, ab ea inchoandum eſſe arbitror, ac primo quidem obſeruo, etiamſi ea duas rationes $a:c$ et $b:d$ contineat, neutram tamen arbitrio noſtro relinqui; vnde inprimis inquirendum eſt, cuiusmodi rationes pro alterutra accipi debeant, vt forma noſtra quadratum reddi poſſit. Quod quo facilius perſpiciatur, conſideremus caſum, quo loco alterius rationis ratio dupla poneretur, ſit ergo $b:a=2:1$, et haec forma $2aa+2cc+9ac$ quadratum reddi deberet; quod autem nunquam fieri poſſe facile intelligitur. Poſito enim $a=p+q$ et $c=p-q$, prodit haec forma $13pp-5qq$ quae nullo modo vnquam quadratum exhibere poteſt; idem euenit ſi poneretur $b:d=3:1$; vnde patet, nonniſi certas rationum ſpecies pro alterutra rationum $a:c$ et $b:d$ aſſumi poſſe; reliquas vero omnes ab hac inueſtigatione excludi.

9. Statim autem patet inter rationes huic ſcopo accommodatas primum locum obtinere rationes quadraticas; ſit igitur $b:d=pp:qq$, et formula noſtra

$$ppqq(aa+cc)+ac(pp+qq)^2$$

aeque-

aequetur huic quadrato $ppqqaa + \frac{2m}{n}pqac + \frac{mm}{nn}cc$ vnde fit $nn(pp+qq)^2 a + nnppqqc = 2mnpqa + mmc$ ideoque $\frac{a}{c} = \frac{mm - nnppqq}{nn(pp+qq)^2 - 2mnpq}$

vel ſit $m = \pm kpq$ vt habeamus has formulas ſatisfacientes

$$\frac{b}{d} = \frac{pp}{qq} \text{ et } \frac{a}{c} = \frac{(kk - nn)ppqq}{nn(pp+qq)^2 \pm 2knppqq} \text{ exiſtente } k > n.$$

10. Euoluamus caſus ſimpliciores numerorum k et n et habebimus aequationis noſtrae ſequentes reſolutiones

ſi fuerit $\frac{b}{d} = \frac{pp}{qq}$ erit

I. $\frac{a}{c} = \frac{3ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 4ppqq}$; II. $\frac{a}{c} = \frac{8ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 6ppqq}$

III. $\frac{a}{c} = \frac{5ppqq}{4(pp+qq)^2 \pm 12ppqq}$; IV. $\frac{a}{c} = \frac{15ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 8ppqq}$

V. $\frac{a}{c} = \frac{7ppqq}{9(pp+qq)^2 \pm 24ppqq}$; VI. $\frac{a}{c} = \frac{24ppqq}{(pp+qq)^2 \pm 10ppqq}$

VII. $\frac{a}{c} = \frac{21ppqq}{4(pp+qq)^2 \pm 20ppqq}$; VIII. $\frac{a}{c} = \frac{16ppqq}{9(pp+qq)^2 \pm 30ppqq}$

IX. $\frac{a}{c} = \frac{9ppqq}{16(pp+qq)^2 \pm 40ppqq}$ etc.

11. Si iam pro litteris k, n, p, q eiusmodi valores inueniri poſſent, vt productum ac ſeu haec expreſſio

$$n(kk - nn)(n(pp+qq)^2 \pm 2kppqq)$$

fieret numerus quadratus, haberetur ſolutio problematis propoſiti, ſiquidem tum ob $bd = ppqq$ etiam formula $abcd$ foret quadratum. Verum haec inueſtigatio nimis eſt moleſta, quam vt eam ſuſcipi conueniat; ac ſi forte ſuccederet, ad maximos numeros certe perduceret. Quare conſultum erit etiam

 alias

alias rationes pro $\frac{b}{d}$ contemplari, quae quidem alteri conditioni ſcilicet

$$bd(aa+cc)+ac(b+d)^2 = \text{Quadr.}$$

conuenire queant. At ob ſimilem rationem fractionum $\frac{b}{d}$ et $\frac{a}{c}$ omnes valores hic pro $\frac{a}{c}$ eruti etiam viciſſim pro $\frac{b}{d}$ aſſumi poterunt, vnde denuo nouae huius generit fractiones elicientur.

12. In genere quidem hic labor nimis foret taedioſus, vnde caſus primo ſimpliciores euoluam:

ſi $\frac{b}{d} = \frac{1}{1}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{3}{8};\ -\frac{4}{1};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{28};\ -\frac{15}{4};\ \frac{7}{12};\ \frac{7}{65};\ \frac{8}{33}$

ſi $\frac{b}{d} = \frac{4}{1}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{3}{4};\ \frac{12}{41};\ \frac{32}{1};\ \frac{32}{49};\ \frac{5}{13};\ \frac{5}{37};\ -\frac{60}{7};\ \frac{20}{19}$

ſi $\frac{b}{d} = \frac{9}{1}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{27}{64};\ \frac{27}{136};\ \frac{36}{23};\ \frac{36}{77};\ \frac{45}{292};\ \frac{108}{5}$

ſi $\frac{b}{d} = \frac{9}{4}$ erit $\frac{a}{c} = \frac{108}{25};\ \frac{45}{61};\ \frac{28}{73};\ \frac{64}{49};\ \frac{64}{289}.$

En ergo hic praeter expectationem duos caſus, quibus pro a et c numeri quadrati prodierunt; vnde cum etiam b et d ſint numeri quadrati duas iam ſumus adepti problematis noſtri ſolutiones.

13. En ergo duas problematis noſtri ſolutiones; quarum prima ob $a = 64$; $b = 9$; $c = 40$, et $d = 4$ praebet:

$$M = 576 + 441 + 196 + 256 = 1469$$

ſicque quatuor numeri quaeſiti ſunt

I. 1469. 196; II. 1469. 256; III. 1469. 441;
IV. 1469; 576.

Altera ob $a = 64$; $b = 9$; $c = 289$; $d = 4$ dat

$$M = 576 + 2601 + 1156 + 256 = 4589$$

vnde

vnde alii quatuor numeri problemati ſatisfacientes ſunt

I. 4589. 256; II. 4589. 576; III. 4589. 1156; IV. 4589. 2601.

Has autem ſolutiones haud facile ex formula §. 11. data deriuare licuiſſet, etiamſi in ea contineantur.

14. Cum autem ſingulae fractiones pro $\frac{a}{c}$ inuentae etiam pro $\frac{b}{d}$ vſurpari queant, euoluamus ſimpliciores, quae ſunt:

$$\frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{8}{3};\ \frac{12}{7};\ \frac{13}{3};\ \frac{20}{19};\ \frac{28}{3};\ \frac{32}{1};\ \frac{33}{8}\ \text{etc.}$$

Sit igitur primo $\frac{b}{d} = \frac{4}{3}$ et habebitur

$$12\,aa + 12\,cc + 49\,ac = \text{Quadr.}$$

cui ſatisfacit $\frac{a}{c} = 4$, ponatur ergo $\frac{a}{c} = 4 + x$

$$\begin{array}{l} 192 + 96\,x + 12\,xx \\ + 12 \\ 196 + 49\,x \\ \hline 400 + 145\,x + 12\,xx = \square = (20 + xy)^2 \end{array}$$

ergo $145 + 12\,x = 40\,y + xyy$ et $x = \frac{146 - 40\,y}{yy - 12}$

hincque $\frac{a}{c} = \frac{4yy - 40y + 97}{yy - 12}$ ſeu poſito $y = \frac{m}{n}$

$$\frac{a}{c} = \frac{4\,mm - 40\,mn + 97\,nn}{mm - 12\,nn}$$

vnde ſequentes nouae fractiones idoneae ſimpliciores colliguntur:

$$\frac{a}{c} = \frac{24}{1};\ \frac{37}{13};\ \frac{121}{24};\ \text{etc.}$$

15. Statuatur ſimili modo $\frac{b}{d} = \frac{5}{4}$ fietque

$$20aa + 20cc + 81ac = \square$$

cui ſatisfacit $\frac{a}{c} = 1$ ſit ergo $\frac{a}{c} = 1 + x$

$$\begin{array}{l} 20 + 40x + 20xx \\ 20 \\ 81 + 81x \\ \hline 121 + 121x + 20xx = \square = (11 + xy)^2 \end{array}$$

ergo $121 + 20x = 22y + xyy$ et $x = \frac{121 - 22y}{yy - 20}$

et $\frac{a}{c} = \frac{yy - 22y + 101}{yy - 20} = \frac{mm \pm 22mn + 101nn}{mm - 20nn}$

vnde elicitur $\frac{a}{c} = \frac{16}{5}$ ita vt ſit $abcd$ quadratum.

16. Haec ſolutio nobis largitur quatuor numeros multo minores problemati ſatisfacientes. Cum enim habeamus:

$$a = 16,\ b = 5,\ c = 5,\ d = 4$$

erit factor communicis

$$M = \frac{80 + 25 + 20 + 64}{ff} = \frac{189}{ff},$$

vnde ſumto $f = 3$ erit $M = 21$, et quatuor numeri problema ſoluentes erunt

I. 21. 20; II. 21. 25; III. 21. 64, et IV. 21. 80.

quorum ſumma ſingulorum eſt $= 9.\ 21^2$

ſumma productorum ex binis $= 110^2.\ 21^2$

ſumma productorum ex ternis $= 4800^2\ 21^4$

Productum omnium $= 1600^2.\ 21^4$

ita

ita vt huius aequationis biquadraticae

$$x^4 - 9 \cdot 21^2 \cdot x^3 + 110^2 \cdot 21^3 \cdot xx - 4800^2 \cdot 21^4 x + 1600^2 \cdot 24^4 = 0$$

radices ſint

$$21 \cdot 20\,;\ 21 \cdot 25\,;\ 21 \cdot 64\,;\ 21 \cdot 80.$$

17. Ex cognita autem vna ſolutione, certa methodo aliae imo infinitae elici poſſunt; quod quo facilius oſtendam, hac poſtrema ſolutione vtar, qua poſito $\frac{b}{d} = \frac{5}{4}$ inuenimus in genere $\frac{a}{c} = \frac{yy - 22y + 101}{yy - 20}$ vnde vt $abcd$ fiat quadratum, reddi oportet hanc formam:

$$5\,(yy - 20)(yy - 22y + 101) = \text{Quadrato}$$

id quod euenit ſumto $y = 5$. Statuatur ergo $y = z + 5$ et habebitur:

$$5\,(zz + 10z + 5)(zz - 12z + 16) = \square$$

ſeu $400 + 500z - 495zz - 10z^3 + 5z^4 = \square$

cui etiam ſatisfacit $z = 1$ et $y = 6$, vnde autem eadem ſolutio reſultat.

18. Vt aliam ſolutionem eliciamus; fingamus radicem quadratam huius formae $20 + \frac{25}{2}z - \frac{521}{32}zz$, cuius quadratum

$$400 + 500z - 495zz - \frac{25 \cdot 521}{32}z^3 + \frac{521^2}{32^2}z^4$$

illi formae aequatum praebet

$$\left(\frac{521^2}{32^2} - 5\right)z = \frac{25 \cdot 521}{32} - 10$$

ſeu $z = \frac{32 \cdot 17705}{266331} = \frac{32 \cdot 1155}{24211} = \frac{32 \cdot 105}{2201}$

ideoque $z = \frac{3360}{2201}$ et $y = \frac{14365}{2201}$, vnde pro a et c numeri enormes reſultant, quos euoluere operae non eſt pretium.

19. Vt autem plures ſolutiones deriuare liceat, ob caſum cognitum $z = 1$, ponamus $z = \frac{1}{1+v}$, et prodibit haec forma ad quadratum redigenda

$$\begin{array}{l} 400 + 1600v + 2400vv + 1600v^3 + 400v^4 \\ +500 + 1500v + 1500vv + \ \ 500v^3 \\ -495 - \ \ 990v + \ \ 495vv \\ - \ \ 10 - \ \ \ \ 10v \\ + \ \ \ \ 5 \\ \hline \end{array}$$

ſeu $400 + 2100v + 3405v^2 + 2100v^3 + 400v^4 = \Box$

cuius radix poſita $= 20 + \frac{105}{2}v - 20vv$ dat

$$4205 - \frac{105^2}{4} + 4200v = 0$$

ſeu $v = -\frac{1159}{3360}$ et $1 + v = \frac{2201}{3360}$ vt ante.

Ob formam reciprocam erit etiam $v = -\frac{3360}{1159}$ et $1 + v = -\frac{2201}{1159}$ et $z = -\frac{1159}{2201}$, hincque $y = \frac{9146}{2201}$ vnde autem non alia ſolutio obtinetur.

20. Quanquam autem hoc modo ex qualibet ſolutione aliae innumerae deduci poſſunt; tamen quia in primas caſu quaſi fortuito incidimus, methodus adhuc certa deſideratur, quae ad huius problematis ſolutionem perducat; cuius inuentio in analyſi Diophantea vtique maximi foret momenti. Verum antequam talem methodum expectare liceat, neceſſe videtur, vt natura huius formae

$$ac(xx + yy) + (a + c)^2 xy$$

ad

ad quadratum reducendae accuratius inueſtigetur, et rationes pro $a:c$ aſſumendae, quibus reſolutio ſuccedit, explorentur, vnde hanc quaeſtionem perſcrutandam propono.

Inuenire omnes valores idoneos pro ratione $a:c$ *ſubſtituendos, vt haec expreſſio:*

$$ac(xx+yy)+xy(aa+cc)+2acxy$$

quadrato aequalis reddi poſſit.

21. Ex ſuperioribus iam ſatis liquet, rationem $a:c$ neutiquam pro lubitu accipi poſſe, ſed eam certis conditionibus eſſe adſtrictam, quas potiſſimum determinari oportet. Ad has conditiones explorandas ſtatuamus:

$$ac(xx+yy)+xy(aa+cc)+2acxy=zz$$

quam aequationem in ſequentes formas transfundere licet:

I. $(aa+cc)(xx+yy)=(a+c)^2(x+y)^2-2zz$

II. $(aa+4ac+cc)(xx+4xy+yy)=6zz+(a-c)^2(x-y)^2$

III. $(aa+cc)(xx+4xy+yy)=2zz+(a-c)^2(x+y)^2$

IV. $(aa+4ac)(xx+yy)=2zz+(a+c)^2(x+y)^2$.

22. Cum iam ex prima forma intelligamus, formulam $aa+cc$ factorem eſſe numeri huius formae $tt-2zz$, qui, vti conſtat, alios non admittit diuiſores, niſi qui ipſi ſint vel huius formae $AA-2BB$ vel huius $2AA-BB$, ſequitur numerum $aa+cc$ in alterutra harum formarum contineri debere. Ex tertia autem forma intelligitur,

 eundem

eundem numerum $aa + cc$, cum ſit diuiſor formae $2zz + tt$, etiam in forma $2AA + BB$ contineri debere. Iam vero numeri formae $2AA - BB$ vel $AA - 2BB$ praeter binarium alios non habent diviſores primos, niſi qui in forma $8n \pm 1$ contineantur, et numeri formae $2AA + BB$ alios non habent diuiſores primos praeter binarium, niſi qui vel in hac forma $8n + 1$ vel $8n + 3$ contineantur. Ex quo concluditur haec conditio, vt numerus $aa + cc$ alios praeter binarium non habeat diviſores primos, niſi qui ſint formae $8n + 1$.

23. Simili modo cum altera formula $aa + 4ac + cc$ ſit diuiſor formae $6zz + tt$, quae alios diuiſores praeter 2 et 3 non admittit primos, niſi qui in aliqua harum formularum:

$$24n + 1, \; 24n + 5, \; 24n + 7, \; 24n + 11$$

contineantur; tum vero quia eadem formula $aa + 4ac + cc$ etiam eſt diuiſor formae $2zz + tt$, ea praeter 2 alios non admittit diuiſores primos, niſi qui in alterutra harum formarum $8n + 1$ vel $8n + 3$ contineantur. Ex quibus coniunctis ſequitur numerum $aa + 4ac + cc$ praeter 2 et 3 alios diuiſores primos habere non poſſe, niſi qui contineantur vel in hac formula $24n + 1$ vel hac $24n + 11$.

24. Hinc e valoribus rationis $a:c$ primum omnes ii excluduntur, quibus numerus $aa + cc$, haberet diuiſorem primum formae $8n + 5$, ſiquidem reliquae formae ineptae $8n + 3$ et $8n + 7$ ſponte

ſponte excluduntur, propterea quod ſumma duorum quadratorum $aa + cc$ per tales numeros nunquam diuiſibilis exiſtit. Deinde etiam ii valores rationis $a:c$ excluduntur, quibus numerus $aa + 4ac + cc$, qui per ſe praeter 2 et 3 alios habere nequit diuiſores, niſi qui ſint huius formae, $12n + 1$ vel huius formae $12n + 11$; haberet diuiſorem vel huius formae $24n + 13$ vel huius $24n + 23$. Quocirca ex rationibus pro $a:c$ adhibendis primo expungi debent omnes eae, quibus numerus $aa + cc$ diuidi poteſt per numerum primum formae $8n + 5$, deinde etiam eae, quibus numerus $aa + 4ac + cc$ admitteret diuiſorem formae $24n + 13$ vel $24n + 23$.

25 Quando autem ratio $a:c$ ita eſt comparata, vt numerus $aa + cc$ nullum habeat diuiſorem formae $8n + 5$; tum viciſſim certum eſt, eundem numerum tam in hac forma $2AA - BB$ quam hac $2AA + BB$ contineri. Ac ſi quoque numerus $aa + 4ac + cc$ nullum habet diuiſorem formae $24n + 13$ vel $24n + 23$; tum perinde certum eſt, eundem numerum tam in hac forma $2AA + BB$ quam iſta $6AA + BB$ contineri. Hac duplici regula obſeruata facili negotio omnes rationes, quas loco $a:c$ aſſumi non licet, excluduntur.

26. Facta autem hac excluſione, pro fractione $\frac{a}{c}$ ſequentes valores ſunt relicti:

$\frac{1}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{13}{12}$,
$\frac{15}{7}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{16}{1}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{16}{13}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{19}{8}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{20}{1}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{20}{7}$, $\frac{20}{11}$,
$\frac{20}{13}$, $\frac{20}{19}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{21}{20}$, $\frac{23}{8}$, $\frac{24}{1}$, $\frac{24}{5}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{24}{11}$, $\frac{24}{19}$, $\frac{25}{1}$, $\frac{25}{4}$
$\frac{25}{9}$, $\frac{25}{12}$, $\frac{25}{16}$, $\frac{25}{17}$, $\frac{27}{11}$, $\frac{27}{20}$, $\frac{28}{5}$, $\frac{28}{13}$, $\frac{28}{15}$, $\frac{28}{25}$, $\frac{29}{3}$

vbi obſeruari conuenit, reliquas rationes omnes fruſtra adhibitum iri; num autem hae omnes poſt excluſiones expoſitas relictae ſuccedant; quaeſtio eſt maximi momenti, quae vix decidi poſſe videtur.

27. Hic prima ratio in praecedentibus nondum inuenta eſt $\frac{8}{7}$, quae igitur an ſolutionem quaeſtionis admittat, videamus. Fieri nempe oportet:

$$56(xx+yy)+225xy=\square.$$

Ponatur $x=p+q$ et $y=p-q$, vt prodeat haec forma:

$$337pp-113qq=\square$$

quod an fieri poſſit, facilius exploratur, quam ex forma praecedente: ſatisfaciunt autem hi valores minimi $p=3$, et $q=4$, vnde colligitur $x=7$ et $y=-1$, ſeu $\frac{x}{y}=-7$, ſtatuatur ergo $\frac{x}{y}=-\frac{7+v}{1}$, et prodit:

$$1225-559v+56vv=\square$$

vnde colligitur $v=\frac{70t-559}{tt-56}$ et $\frac{x}{y}=-\frac{7tt+70t-167}{tt-56}$ ſeu $\frac{x}{y}=\frac{7tt\pm70t+167}{56-tt}=\frac{7mm-14mn-nn}{20nn+12mn-mm}$.

28. Cum deinde etiam alios plures caſus examinaſſem, inueni negotium ſemper ſuccedere; ex quo aſſeuerare vix dubito, omnes iſtas fractiones poſt binas excluſiones ante memoratas relictas ſemper ita eſſe comparatas, vt loco rationis $a:c$ poſitae aequationem

$$ac(xx+yy)+(a+c)^2xy=\square$$

reſo-

reſolubilem reddant. Nunc igitur omnino operae foret pretium in indolem harum fractionum accuratius inquirere, earumque verum characterem indagare, quo eae ab omnibus reliquis fractionibus diſtinguuntur. Primo quidem patet, in iis omnes fractiones huius formae $\frac{pp}{qq}$ occurrere, quomodo autem reliquarum indoles ſit comparata, altioris videtur indaginis.

29. Videamus autem, quomodo in genere numeri a et c comparati eſſe debeant, vt $aa+cc$ obtineat formam $AA-2BB$. Poſito autem

$$aa+cc=AA-2BB \text{ erit } AA-aa=cc+2BB$$

ideoque tam $A+a$ quam $A-a$, vtpote diuiſores formae $cc+2BB$, eiusdem formae numeri eſſe debent, vnde poſito

$$A+a=pp+2qq, \text{ et } A-a=rr+2ss$$

fit $A=\frac{pp+2qq+rr+2ss}{2}$ et $a=\frac{pp+2qq-rr-2ss}{2}$ et ob $cc+2BB=(pp+2pp)(rr+2ss)$ erit

$$c=2qs+pr \text{ et } B=ps-qr.$$

Quocirca conditio praeſcripta impletur ſumendo

$$a=pp-rr+2qq-2ss \text{ et } c=2pr+4qs$$

vnde fit

$$aa+cc=(pp+rr)^2+4(qq+ss)^2+4(pp-rr)(qq-ss)+16pqrs$$

quae forma non ſolum eſt

$$=(pp+rr+2qq+2ss)^2-2(2ps-2qr)^2,$$

ſed etiam

$$=(pp+rr-2qq-2ss)^2+2(2pq+2qs)^2.$$

Vnde

Vnde tam in hac forma $AA - 2BB$ quam iſta $AA + 2BB$ continetur.

30. Euoluamus ſimili modo alteram conditionem, quae poſtulat

$$aa + 4ac + cc = AA + 2BB,$$

et cum fiat

$$(a+2c)^2 - 3cc = AA + 2BB \text{ ſeu } (a+2c)^2 - AA = 2BB + 3cc$$

debet eſſe:

$$a + 2c + A = 2tt + 3uu \text{ et } a + 2c - A = xx + 6yy$$

ergo $a + 2c = \frac{2tt + 3uu + xx + yy}{2}$

tum vero ob $2BB + 3cc = (2tt + 3uu)(xx + yy)$ fit

$$B = tx - 3uy \text{ et } c = ux + 2ty, \text{ ideoque}$$

$$a = 2tt - 8ty + 6yy + 3uu - 4ux + xx$$

ſeu $a = 2(t-y)(t-3y) + (u-x)(3u-x)$

et $c = 2ux + 4ty.$

Vel ſit $t = y + v$ et $x = u - z$ vt fiat

$$a = 2v(y - 2v) + z(z + 2u)$$

$$c = 4y(y + v) + 2u(u - z)$$

hocque modo ſimul alteri conditioni, quae eſſe debet $aa + 4ac + cc = 6AA + BB$, ſatisfit.

31. Quo igitur vtrique conditioni ſatisfiat, neceſſe eſt, vt ambo numeri a et c ſimul inſequentibus binis formulis contineantur:

$$a = (p-r)(p+r) + 2(q-s)(q+s); \; c = 2pr + 4qs$$

$$a = (u-x)(3u-x) + 2(t-y)(t-3y); \; c = 2ux + 4ty.$$

Noua

Noua ergo hinc naſcitur quaeſtio, quomodo hae binae geminae formulae ad eundem valorem ſint reducendae; ad quod neceſſe eſt, vt huic aequalitati ſatisfiat:

$$(ux + 2ty)(pp - rr + 2qq - 2ss) =$$
$$(pr + 2qs)(3uu - 4ux + xx + 2tt - 8ty + 6yy)$$

quoniam totum negotium in ratione $a : c$ verſatur.

Aliud Problema Diophanteum.

Inuenire quotcunque numeros, quorum quilibet in ſummam reliquorum multiplicatus producat numerum quadratum.

32. Sint numeri quaeſiti p, q, r, s etc. eorumque ſumma $= S$; requiritur ergo, vt omnes hae formulae:

$$p(S - p),\ q(S - q),\ (S - r),\ s(S - s) \text{ etc.}$$

ſint quadrata, quae cum ſint ſimiles, ſufficit pro vna poſuiſſe $p(S - p) = ffpp$, vnde fit $p = \frac{S}{1 + ff}$. Quare numeri quaeſiti erunt

$$\frac{S}{1 + ff},\ \frac{S}{1 + gg},\ \frac{S}{1 + hh},\ \frac{S}{1 + kk} \text{ etc.}$$

dummodo eorum ſumma fiat $= S$; ſicque problema huc redit, vt quaerantur numeri quotcunque f, g, h, k etc. ita comparati, vt fiat

$$\frac{1}{1 + ff} + \frac{1}{1 + gg} + \frac{1}{1 + hh} + \frac{1}{1 + kk} + \text{etc.} = 1.$$

33. Statuamus, quoniam hi numeri plerumque ſunt fracti,

 $f = \frac{a}{\alpha}$,

$$f = \frac{a}{\alpha},\ g = \frac{b}{\beta},\ h = \frac{c}{\gamma},\ k = \frac{d}{\delta} \text{ etc.}$$

et quaeſtio huc redit, vt aliquot fractiones huiusmodi

$$\frac{\alpha\alpha}{aa+\alpha\alpha},\ \frac{\beta\beta}{bb+\beta\beta},\ \frac{\gamma\gamma}{cc+\gamma\gamma} \text{ etc.}$$

inueniantur, quorum ſumma vnitati aequetur; vbi obſeruo, quemlibet denominatorem eſſe ſummam duorum quadratorum. Quodſi ergo talis denominator ſit numerus primus, ex eo duae tantum eiusmodi naſcuntur fractiones, ſcilicet

$$\frac{\alpha\alpha}{aa+\alpha\alpha} \text{ et } \frac{aa}{aa+\alpha\alpha},$$

quarum ſumma cum vnitati aequetur, euidens eſt, ambas ſimul capi non poſſe, niſi quaeſtio de duobus numeris inſtituatur, quorum alter in alterum ductus praebeat quadratum. Tum enim ob

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha} + \frac{\alpha\alpha}{aa+\alpha\alpha} = 1,$$

ſumto S pro lubitu numeri ſatisfacientes erunt Maa et $M\alpha\alpha$, qui propterea caſus nullam habet difficultatem.

34. Quando autem plures duobus numeri ſunt inueſtigandi, qui problemati conueniant; neceſſe eſt vt etiam caſus, quibus denominatores ſunt numeri compoſiti, euoluantur; ſiquidem inde plures fractiones huius indolis formari poſſunt; quarum cum binae itidem vnitati aequentur, ſequente modo eas repraeſentabo.

Denominator $D = (aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)$

$\frac{(ab-\alpha\beta)^2}{D}$	$\frac{(a\beta+\alpha b)^2}{D}$
$\frac{(a\beta-\alpha b)^2}{D}$	$\frac{(ab+\alpha\beta)^2}{D}$

Deno-

Denominator $D = (aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)(cc + \gamma\gamma)$

$\frac{(a\beta c + \alpha bc - ab\gamma + \alpha\beta\gamma)^2}{D}$	$\frac{(a\beta\gamma + \alpha b\gamma + abc - \alpha\beta c)^2}{D}$
$\frac{(a\beta\gamma + \alpha b\gamma - abc + \alpha\beta c)^2}{D}$	$\frac{(a\beta c + \alpha bc + ab\gamma - \alpha\beta\gamma)^2}{D}$
$\frac{(abc + \alpha\beta c - a\beta\gamma + \alpha b\gamma)^2}{D}$	$\frac{(ab\gamma + \alpha\beta\gamma + a\beta c - \alpha bc)^2}{D}$
$\frac{(ab\gamma + \alpha\beta\gamma - a\beta c + \alpha bc)^2}{D}$	$\frac{(abc + \alpha\beta c + a\beta\gamma - \alpha b\gamma)^2}{D}$

35. Circa ordinem ſecundum annotaſſe iuuabit, eſſe

$$\frac{(ab - \alpha\beta)^2}{D} + \frac{(a\beta - \alpha b)^2}{D} = 1 - \frac{4ab\alpha\beta}{D} \text{ et}$$

$$\frac{(ab - \alpha\beta)^2}{D} + \frac{(ab + \alpha\beta)^2}{D} = -1 + \frac{aabb + \alpha\alpha\beta\beta - aa\beta\beta - \alpha\alpha bb}{D}.$$

Deinde in ordine tertio, ſi quatuor partes prioris columnae inuicem addantur, ſumma erit

$$2 - \frac{8(aa - \alpha\alpha)b\beta c\gamma}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)(cc + \gamma\gamma)}.$$

Hinc non contemnenda ſubſidia peti poterunt pro quauis numerorum quaeſitorum multitudine, dum, ſi ſolutio in genere tentaretur, inſignes difficultates occurrerent. Quoniam igitur caſus duorum numerorum per ſe eſt perſpicuus, a caſu trium exordiar inde ad quatuor progreſſurus.

Caſus trium numeror.

36. Ponamus pro tribus numeris quaeſitis has fractiones:

$$\frac{aa}{aa + \alpha\alpha};\ \frac{(ab - \alpha\beta)^2}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)};\ \frac{(a\beta - \alpha b)^2}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)}$$

quarum ſumma eſt

$$\frac{aa}{aa + \alpha\alpha} + 1 - \frac{4a\alpha b\beta}{(aa + \alpha\alpha)(bb + \beta\beta)}$$ vnitati aequanda

vnde ſit

$$aa(bb+\beta\beta)=4a\alpha b\beta \text{ hincque } \frac{a}{\alpha}=\frac{4b\beta}{bb+\beta\beta}.$$

Quare ſumtis $a=4b\beta$ et $\alpha=bb+\beta\beta$, numeri quaeſiti ad integros perducti erunt:

$$aa(bb+\beta\beta);\ (ab-\alpha\beta)^2;\ (a\beta-\alpha b)^2.$$

Iam vero eſt $ab-\alpha\beta=3bb\beta-\beta^3=\beta(2bb-\beta\beta)$ et $a\beta-\alpha b=3b\beta\beta-b^3=b(3\beta\beta-bb)$.

Conſequenter habebimus has formulas

$$16bb\beta\beta(bb+\beta\beta);\ \beta\beta(3bb-\beta\beta)^2;\ bb(3\beta\beta-bb)^2$$

quarum quaelibet in ſummam reliquarum ducta producit quadratum.

37. Euoluamus hinc ſolutiones ſimpliciores, ponendo numeros minores loco b et β, quorum tantum ratio ſpectatur, ac ſi ambo ſint impares, numeri quaeſiti per 4 deprimantur:

numeri quaeſiti

I.	$\frac{b}{\beta}=\frac{1}{1}$;	$p=8$	; $q=1$	; $r=1$
II.	$\frac{b}{\beta}=\frac{2}{1}$;	$p=320$	; $q=121$	; $r=4$
III.	$\frac{b}{\beta}=\frac{3}{1}$;	$p=360$	; $q=169$	; $r=81$
IV.	$\frac{b}{\beta}=\frac{3}{2}$;	$p=7488$	; $q=2116$	; $r=81$
V.	$\frac{b}{\beta}=\frac{4}{1}$;	$p=4352$	; $q=2209$	; $r=2704$
VI.	$\frac{b}{\beta}=\frac{4}{3}$;	$p=57600$	; $q=13689$	; $r=1936$
VII.	$\frac{b}{\beta}=\frac{5}{1}$;	$p=2600$	; $q=1369$	; $r=12100$

38. Aliae ſolutiones reperientur ex his formulis:

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha};\quad \frac{(ab-\alpha\beta)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)};\quad \frac{(ab+\alpha\beta)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

quarum ſumma eſt

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha}+1+\frac{aabb+\alpha\alpha\beta\beta-aa\beta\beta-\alpha\alpha bb}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

quae cum vnitati aequari debeat, fiet

$2aabb+\alpha\alpha\beta\beta-\alpha\alpha bb=0$, hinc $\frac{aa}{\alpha\alpha}=\frac{bb-\beta\beta}{2bb}$

ſeu $\frac{bb}{\beta\beta}=\frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha-2aa}$ vnde $b=\alpha$ et $\beta=\sqrt{(\alpha\alpha-aa)}$.

Capiatur ergo:

$a=2mn$; $\alpha=mm+2nn$; $b=mm+2nn$; $\beta=mm-2nn$

eruntque tres numeri quaeſiti

$$p=8mmnn(m^4+4n^4)$$
$$q=(mm+2mn-2nn)^2(mm+2nn)^2$$
$$r=(mm-2mn-2nn)^2(mm+2nn)^2$$

vnde ſequentes ſolutiones deducuntur

I.	$p=40$;	$q=9$;	$r=81$
II.	$p=8.9.85$;	$q=121.169$;	$r=121$
III.	$p=8.4.65$;	$q=81.121$;	$r=81.9$
IV.	$p=8.36.145$;	$q=289.169$;	$r=289.121$
V.	$p=8.9.325$;	$q=361.529$;	$r=361.121$
VI.	$p=8.100.689$;	$q=1089.1369$;	$r=1089.9$
VII.	$p=8.16.1025$;	$q=1089.1521$;	$r=1089.529$
VIII.	$p=8.144.1105$;	$q=1681.2209$;	$r=1681.1$
IX.	$p=8.225.949$;	$q=1849.1369$;	$r=1849.529$.

39. Neque vero haec ſolutio generalis eſt putanda, ſed potius innumerabiles aliae locum habent, quae in his geminis formulis non continentur. Pro generali enim ſolutione hanc aequationem reſolui oporteret:

$$\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{1+yy}+\frac{1}{1+zz}=1$$

vnde oritur $xxyyzz-xx-yy-zz-2=0$ hincque $zz=\frac{xx+yy+2}{xxyy-1}$, ita vt haec formula

$$(xxyy-1)(xx+yy+2)$$

in genere ad quadratum reduci debeat; quod quomodo ſit efficiendum, non patet.

40. Interim ex ſolutione iam aliunde cognita ope huius formulae infinitae aliae elici poſſunt Diuidantur enim terni numeri inuenti veluti 40, 9, 81 per eorum ſummam 130, vt hae fractiones obtineantur:

$$\tfrac{4}{13};\quad \tfrac{9}{130};\quad \tfrac{81}{130},$$

quae cum generalibus comparatae praebent

$$x=\tfrac{3}{2};\quad y=\tfrac{11}{3};\quad z=\tfrac{7}{9},$$

quarum vna tantum $x=\frac{3}{2}$ pro cognita ſumatur, pro binis reliquis vero haec aequatio reſoluatur:

$$\tfrac{9}{4}yyzz-yy-zz-\tfrac{17}{4}=0;\ \text{ſeu}\ zz=\frac{4yy+17}{9yy-4}$$

vnde fit

$$(9yy-4)z=\sqrt{(9yy-4)(4yy+17)}.$$

Quia autem nouimus, ſatisfacere valorem $y=\frac{11}{3}$, ſtatuamus $y=\frac{11+u}{3}$ fitque

$$3(9yy-4)z = \sqrt{(9.13+22u+uu)(49.13+88u+4uu)}$$

ita vt haec formula ad quadratum ſit reducenda

$$273^2 + 22.1105u + 3041uu + 176u^3 + 4u^4$$

cuius radix ſi ſtatuatur $273 + \frac{85.11}{21}u \pm 2uu$ fit

$$\left(\frac{8.13.4489}{21^2} \mp 4.13.21\right)uu + 44\left(4 \mp \frac{85}{21}\right)u^3 = 0$$

et $u = -\frac{13(8978 \mp 9261}{11.21(84 \mp 85)}$ ſicque

pro ſigno ſuperiori $u = \frac{-13.283}{11.21}$ et $y = \frac{-1138}{693}$

pro ſigno inferiori $u = \frac{-1403}{231}$ et ob $y = +\frac{1138}{693}$

qui duo valores conueniunt et ob $y = \frac{1138}{693}$ fit

$$z = \sqrt{\frac{4.1138^2 + 17.693^2}{9.1138^2 - 4.693^2}} = \frac{3655}{8.13.40} = \frac{281}{840}$$

vnde ternae fractiones prodeunt

$$\frac{4}{13};\quad \frac{480249}{13.136561};\quad \frac{57600}{136561}$$

quae in integris dant hos numeros:

$$p = 4.136561 = 4.17.29.277 = 546244$$
$$q = 480249 = 693^2 = 480249$$
$$r = 13.57600 = 240^2 = 748800$$

hincque $p+q+r = 13.17.29.277 = 1775293$. Hac ergo methodo ſolutiones particulares datae ad maiorem generalitatem euehuntur.

Caſus quatuor numerorum.

41. Statuamus quatuor fractiones:

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha};\quad \frac{bb}{bb+\beta\beta};\quad \frac{(ab-\alpha\beta)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)};\quad \frac{(a\beta-\alpha b)^2}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

quarum ſumma eſt

$$\frac{aa}{aa+\alpha\alpha} + \frac{bb}{bb+\beta\beta} + 1 - \frac{4\alpha a b\beta}{(aa+\alpha\alpha)(bb+\beta\beta)}$$

vnita-

vnitati aequanda; vnde fit:

$$2aabb + aa\beta\beta + \alpha\alpha bb = 4a\alpha b\beta$$

ideoque $\frac{b}{\beta} = \frac{2a\alpha \pm \surd(4aa\alpha\alpha - 2a^4 - \alpha\alpha\alpha\alpha)}{2aa + \alpha\alpha}$

ſeu $\frac{b}{\beta} = \frac{2a\alpha \pm a\surd(3\alpha\alpha - 2aa)}{2aa + \alpha\alpha}$.

Quare litteras a et α ita accipi oportet, vt formula $3\alpha\alpha - 2aa$ quadratum euadat.

42. Hunc in finem ponamus:

$\surd(3\alpha\alpha - 2aa) = \alpha + \frac{m}{n}(\alpha - a)$ fietque

$$2nn\alpha + 2nna = 2mn\alpha + mm\alpha - mma.$$

Ergo $a = mm + 2mn - 2nn$

et $\alpha = mm + 2nn$

hinc $\alpha = a = -2mn + 4nn$ et

$\surd(3\alpha\alpha - 2aa) = -mm + 4mn + 2nn.$

Quocirca habebimus

vel $\frac{b}{\beta} = \frac{(mm+2mn-2nn)(3mm-4mn+2nn)}{2(mm+2mn-nn)^2+(mm+2nn)^2} = \frac{mm+2mn-2nn}{7mm+4mn+6nn}$

vel $\frac{b}{\beta} = \frac{(mm+2mn-2nn)(mm+4mn+6nn)}{2(mm+2mn-2nn)^2+(mm+2nn)^2} = \frac{mm+2mn-2nn}{3mm-4mn+2nn}$.

Tandem numeri quaeſiti habebuntur

$p = aa(bb+\beta\beta)$; $q = bb(aa+\alpha\alpha)$; $r = (ab-\alpha\beta)^2$

$s = (a\beta - \alpha b)^2$.

43. Cum ſit $\alpha = mm + 2nn$, loco α alii numeri aſſumi nequeunt, niſi qui ſint vel primi huius formae $8m+1$ ſeu $8m+3$; vel ex huiusmodi primis compoſiti. Simpliciores cum numeris a et

et $\sqrt{(3\alpha\alpha - 2aa)}$ ipſis reſpondentibus in ſequenti tabella exhibeo:

	$\alpha =$	1	3	9	11	11	17	17	19	19
	$a =$	1	1	11	1	13	11	13	11	23
	$\gamma =$	1	5	1	19	5	25	23	29	5
	$\beta =$	3	11	323	123	459	531	627	603	1419
	$b =$	3	1	187	3	221	99	143	99	759
vel	$b =$	1	11	209	41	351	549	741	737	989
vel	$\beta =$	1	1	19	3	17	9	11	9	33
	$b =$	1	1	11	1	13	11	13	11	23
vel	$\beta =$	3	11	17	41	27	59	57	67	43
	$b =$	1	1	11	1	13	11	13	11	23

44. Cum ergo in genere ſit:

$$a = mm + 2mn - 2nn;\quad b = mm + 2mn - 2nn$$
$$\alpha = mm + 2nn \qquad \beta = mm + 4mn + 6mn$$
$$\text{vel}\quad \beta = 3mm - 4mn + 2nn$$

erit

$$ab - \alpha\beta = -8nn(m+n)^2 \quad\text{vel}\quad = -2mm(m-2n)^2$$
$$a\beta - \alpha b = 4n(m+n)(mm+2mn-2nn)$$
$$\text{vel}\quad = 2m(m-2n)(mm+2mn-2nn).$$

Item $aa + \alpha\alpha = 2mm(m+n)^2 + 2nn(m-2n)^2$

et $bb + \beta\beta = 2(m+n)^2(m+2n)^2 + 2nn(m+4n)^2$

vel $= 2mm(2m-n)^2 + 2(m-n)^2(m-2n)^2$

vnde in numeris ſequentes nanciſcimur ſolutiones:

I.	$p=1$;	$q=1$;	$r=0$;	$s=0$
II.	$p=5$;	$q=1$;	$r=2$;	$s=2$
III.	$p=61$;	$q=5$;	$r=512$;	$s=32$
IV.	$p=841$;	$q=61$;	$r=225.450$;	$s=450$
V.	$p=121.205$;	$q=121.101$;	$r=16.32$;	$s=121.32$
VI.	$p=121.289$;	$q=121.101$;	$r=25.50$;	$s=121.50$
VII.	$p=121.2305$;	$q=121.241$;	$r=576.1152$;	$s=121.1152$
VIII.	$p=169.229$;	$q=169.145$;	$r=9.18$;	$s=169.18$
IX.	$p=169.449$;	$q=169.145$;	$r=64.128$;	$s=169.128$.

45. Formulae generales autem ita ſe habebunt

vel

$$p=(mm(m+n)^2+nn(m-2n)^2)(mm+2mn-3nn)^2$$
$$q=((m+n)^2(m+2n)^2+nn(m+4n)^2)(mm+2mn-2nn)^2$$
$$r=8nn(m+n)^2(mm+2mn-2nn)^2$$
$$s=8nn(m+n)^2\ 4nn(m+n)^2$$

vel

$$p=(mm(m+n)^2+nn(m-2n)^2(mm+2mn-2nn)^2$$
$$q=(mm(2m-n)^2+(m-n)^2(m-2n)^2)(mm+2mn-2nn)^2$$
$$r=\ 2mm(m-2n)^2(mm+2mn-2nn)^2$$
$$s=\ 2mm(m-2n)^2\ mm(m-2n)^2.$$

Vtroque caſu quatuor numeri p, q, r, s ita ſunt comparati, vt quilibet in ſummam trium reliquorum ductus producat numerum quadratum. Quanquam autem hinc innumerabiles ſolutiones deriuare licet, haec ſolutio nonniſi pro maxime particulari eſt habenda.

46. Solutio autem generaliter inſtruitur, ponendo in genere pro quaternis fractionibus:

$\frac{1}{1+zz}$, $\frac{1}{1+yy}$, $\frac{1}{1+xx}$, $\frac{1}{1+vv}$

quarum ſumma cum vnitati eſſe debeat aequalis, orietur haec aequatio

$$vvxxyyzz = \begin{matrix} vvxx + vvyy + vvzz + 2vv + 2xx + 3 \\ + yyzz + xxzz + xxyy + 2yy + 2zz \end{matrix}$$

cuius autem reſolutio maximis difficultatibus eſt implicata. Verum ſi ex iam inuentis ſolutionibus, pro binis litteris x et v idonei valores accipiuntur, praeter valores reliquarum y et z cognitos innumerabiles alii aſſignari poterunt.

47. Vt hoc exemplo oſtendam, aſſumam ſolutionem ſecundam his fractionibus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ contentam indeque ſtatuo $v=2$ et $x=3$, reliquas autem, quae hoc exemplo ſunt $y=1$ et $z=2$ vt incognitas ſpecto. Habebimus ergo hanc aequationem

$$36yyzz = yyzz + 15yy + 15zz + 65$$

ſeu $7yyzz = 3yy + 3zz + 13$

ex qua prodit $zz = \frac{3yy+13}{7yy-3}$, ita vt haec formula $\frac{3yy+13}{7yy-3}$ quadrato aequari debeat, quod duobus caſibus $y=1$ et $y=2$ euenire nouimus. Iam $7yy-3$ in genere fit quadratum ponendo $y = \frac{mm+3}{mm+4m-3}$, qui in $3yy+13$ ſubſtitutus dat

$$16m^4 + 104m^3 + 148mm - 312m + 144 = \square$$

 cuius

cuius radix poſita $4mm + 13m + 12$ dat $m = -\frac{16}{3}$
at radix poſita $4mm - 13m + 12$ dat $m = \frac{9}{16}$.
vtrinque reperitur $y = \frac{285}{37}$ et $z = \frac{254}{273}$.

48. Quanquam autem hoc modo ex inuenta quavis ſolutione continuo alias nouas elicere licet, tamen ſic mox ad numeros praegrandes peruenitur; quod eo maius eſt incommodum, cum aliunde ſolutiones multo ſimpliciores obtineri queant; id quod quidem nulla certa methodo, ſed mero tentamine praeſtatur: Conſiderantur ſcilicet plures fractiones huius formae $\frac{aa}{aa+\alpha\alpha}$, ex quibus quippe quatuor eligi oportet, quarum ſumma vnitati aequetur: Ita ſumtis fractionibus, quarum denominatores in 130 continentur:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{4}{13},\ \frac{1}{26},\ \frac{1}{65},\ \frac{16}{65},\ \frac{9}{130},\ \frac{49}{130}$$

$$\frac{4}{5},\ \frac{9}{10},\ \frac{9}{13},\ \frac{25}{26},\ \frac{64}{65},\ \frac{49}{65},\ \frac{121}{130},\ \frac{81}{130}$$

binarum $\frac{9}{130}$ et $\frac{49}{130}$ ſumma eſt $\frac{29}{65}$, huic addatur $\frac{16}{65}$, proditque $\frac{45}{65} = \frac{9}{13}$, quae cum $\frac{4}{13}$ producit vnitatem. Ita quatuor fractiones

$$\frac{4}{13},\ \frac{16}{65},\ \frac{9}{130},\ \frac{49}{130}$$

praebent hos numeros

$$p = 40,\ q = 32,\ r = 9,\ s = 49.$$

Alio modo fit

$$\frac{9}{130} + \frac{1}{5} = \frac{35}{130} = \frac{7}{26},\ \text{porro}\ \frac{7}{26} + \frac{1}{26} = \frac{4}{13},$$

quae cum $\frac{9}{13}$ dat vnitatem, vnde ex fractionibus

$$\frac{9}{130},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{26},\ \frac{9}{13}$$

naſcuntur hi numeri:

$$p = 9;\ q = 26;\ r = 5;\ s = 90$$

qui

qui vtique multo ſunt minores, quam ſuperiores certa ratione inuenti, primis quidem ibi exceptis, qui ob aequales numeros excludendi videntur.

49. Simili modo poſita ſumma $p+q+r+s=170$ reperiuntur duae ſolutiones:

I. $p=1$, $q=10$, $r=34$, $s=125$

II. $p=10$, $q=17$, $r=45$, $s=98$

ſumma numerorum 290 dat

$p=1$, $q=40$, $r=121$, $s=128$.

Hinc itaque patet, caſu quaſi fortuito multo ſimpliciores numeros problemati ſatisfacientes reperiri, atque adeo hac ratione non difficulter quinque numeri aſſignari poſſunt, vt quilibet per reliquorum ſummam multiplicatus praebeat numerum quadratum, cuiusmodi ſunt:

2, 40, 45, 58, 145
et 32, 61, 98, 169, 250.

Hocque modo etiam plures numeros huius indolis detegere licet, ad quos inueniendos nulla certa methodus adhuc eſt explorata.

Appendix.

50. Si problemati modo tractato haec conditio adiungatur, vt ſinguli numeri eſſe debeant quadrati; quaeſtionis quaſi natura immutatur, quae ita enunciabitur:

Inuenire quotcunque numeros quadratos, vt ſumma omnium quolibet imminuta fiat numerus quadratus.

Sint numeri quadrati quaeſiti

A^2, B^2, C^2, D^2 etc.

quorum ſumma ponatur $= S$, fierique debet

$$S - A^2 = P^2,\ S - B^2 = Q^2,\ S - C^2 = R^2 \text{ etc.}$$

vnde patet, S eſſe ſummam eiusmodi binorum quadratorum, quae pluribus modis in bina quadrata ſe diſtribui patiatur; ſeu poſito $S = xx + yy$, hanc duorum quadratorum ſummam indefinite in alia bina quadrata ſecari oportet, quod in genere ita praeſtatur:

$$S = \left(\frac{2fx + (ff-1)y}{ff+1}\right)^2 + \left(\frac{(ff-1)x - 2fy}{ff+1}\right)^2 = xx + yy.$$

51. Pro caſu ergo trium quadratorum poni debet:

$$A = x;\ B = \frac{2fx - (ff-1)y}{ff+1} \text{ et } C = \frac{2gx - (gg-1)y}{gg+1}$$

et ſumma quadratorum tum ipſi $xx + yy$ aequari. Quod cum in genere difficulter praeſtetur, in ſolutionem particularem inquiramus ponendo $g = \frac{f+1}{f-1}$, vnde fit

$$C = \frac{(ff-1)x - 2fy}{ff+1},$$

et haec oritur aequatio:

$$xx + xx + yy - \frac{8f(ff-1)}{(ff+1)^2}xy = xx + yy,$$

ex qua ſequitur

$$x = \frac{8f(ff-1)}{(ff+1)^2}y \text{ ſeu } x = 8f(ff-1) \text{ et } y = (ff+1)^2$$

hincque quadratorum quaeſitorum radices in integris

A = 8

$$A = 8f(ff-1)(ff+1)$$
$$B = 2f(3f^4 - 10ff + 3) = 2f(3ff-1)(ff-3)$$
$$C = (ff-1)(f^4 - 14ff + 1) = (ff=1)(ff+4f+1)(ff-4f+1)$$

vnde ſi $f = 2$ ſequuntur hi numeri

$$A = 16.\,3.\,5;\quad B = 4.\,11.\,1;\quad C = 3.\,13.\,3$$

ſeu $A = 240$; $B = 44$; $C = 117$.

52. Ad caſum autem quatuor quadratorum progrediamur, quandoquidem tum problema fit difficillimum, vt ſolutio adeo ſimpliciſſima iam ad maximos numeros exſurgat. Faciamus ergo

$$A = x;\quad B = \frac{2fx-(ff-1)y}{1+ff};\quad C = \frac{(ff-1)x-2fy}{1+ff};$$
$$D = \frac{2px-(pp-1)y}{pp+1}$$

et cum ſit

$$BB + CC = xx + yy - \frac{8f(ff-1)xy}{(1+ff)^2},$$

poſito breuitatis ergo $\frac{4f(ff-1)}{(ff+1)^2} = g$ prodit haec aequatio:

$$xx + \frac{4ppxx - 4p(pp-1)xy + (pp-1)^2 yy}{(pp+1)^2} - 2gxy = 0 \text{ ſeu}$$

$$(pp-1)^2 yy = 2g(pp+1)^2 xy - 4ppxx + 4p(pp-1)xy - (pp+1)^2 xx \quad \text{hincque}$$

$$\frac{(pp-1)^2 y}{x} = g(pp+1)^2 + 2p(pp-1) \pm \sqrt{\left(gg(pp+1)^4 + 4gp(pp-1)(pp+1)^2 + 4pp(pp-1)^2 - (pp-1)^2(pp+1)^2 - 4pp(pp-1)^2\right)}$$
$$= g(pp+1)^2 + 2p(pp-1) \pm (pp+1)\sqrt{\left(gg(pp+1)^2 + 4gp(pp-1) - (pp-1)^2\right)}$$

53. Haec formula rationalis reddenda inſigni moleſtia premi videtur, quam autem ponendo $p = \frac{q+1}{q-1}$ tollere licet. Facilior vero redditur ſolutio,

tio, ſi pro primo numero ſumatur $A = y$ vnde fit:

$$4ppxx = 2g(pp+1)^2 xy - (pp-1)^2 yy + 4p(pp-1)xy - (pp+1)^2 yy$$ hincque

$$\frac{4ppx}{y} = g(pp+1)^2 + 2p(pp-1) \pm (pp+1)\sqrt{(gg(pp+1)^2 + 4gp(pp-1) - 4pp)}$$

vbi quantitas rationalis reddenda eſt

$$ggp^4 + 4gp^3 + (2gg-4)pp - 4gp + gg$$

cuius radix poſita $gpp + 2p + g$ dat $p = -g$ ita vt ſit

$$\frac{4ggx}{y} = g(gg+1)^2 - 2g(gg-1) \pm (gg+1)(g^3-g) \text{ ſeu}$$

$$\frac{4gx}{y} = (gg+1)^2 - 2(gg-1) \pm (gg+1)(gg-1) \text{ Ergo}$$

vel $\frac{4gx}{y} = 2(g^4+1)$ vel $\frac{4gx}{y} = 4$.

54. Euoluamus primo poſteriorem ſolutionem vtpote ſimpliciorem, et ob $\frac{y}{x} = \frac{g}{1}$ et $p = -g$ habebitur:

$A = g$; $B = \frac{2f - g(ff-1)}{ff+1}$; $C = \frac{ff-1-2fg}{ff+1}$; $D = \frac{-2g - g(gg-1)}{gg+1}$

ſeu $D = -g$; forent ergo duo quadrata A^2 et D^2 inter ſe aequalia ſcilicet $A = D = g = \frac{4f(ff-1)}{(ff+1)^2}$, et pro reliquis

$$B = \frac{2f(f^4-6ff+1)}{(ff+1)^3} \text{ et } C = \frac{(ff-1)(f^4-6ff+1)}{(ff+1)^3}$$

quae radices per $(ff+1)^3$ multiplicando ad numeros integros reuocatae fient

$A = D = 4f(ff-1)(ff+1)$; $B = 2f(f^4-6ff+1)$;
$C = (ff-1)(f^4-6ff+1)$

vnde

vnde ſumto $f = 2$ oritur haec ſolutio:

$A = 8.3.5;\ D = 8.3.5;\ B = 4.7;\ C = 8.7$

ſeu $A = 120;\quad D = 120;\quad B = 28;\quad C = 21.$

55. Si aequalitas duorum numerorum minus placet, euoluamus alteram ſolutionem $\frac{x}{y} = \frac{g^4+1}{2g}$ vnde ſit $x = g^4+1$, $y = 2g$ et ob $p = -g$; erit

$A = 2g;\ B = \frac{2f(g^4+1) - 2g(ff-1)}{ff+1};\ C = \frac{(ff-1)(g^4+1) - 4fg}{ff+1}$

et $D = \frac{-2g(g^4+1) - 2(gg-1)g}{gg+1} = 2g^3$ ſeu

$$A = 2g(ff+1)$$
$$B = 2f(g^4+1) - 2g(ff-1)$$
$$C = (ff-1)(g^4+1) - 4fg$$
$$D = 2g^3(ff+1)$$

vbi $g = \frac{4f(ff-1)}{(ff+1)^2}$, ſeu ponatur $g = \frac{m}{n}$ et omnibus ad integros reductis fiet

$$A = 2mn^3(ff+1)$$
$$B = 2f(m^4+n^4) - 2mn^3(ff-1)$$
$$C = (ff-1)(m^4+n^4) - 4fmn^3$$
$$D = 2m^3n(ff+1).$$

Hinc ſumto $f = 2$ vt ſit $g = \frac{24}{25} = \frac{m}{n}$ erunt quatuor quadratorum radices:

$$A = 2^4 . 3 . 5^7 \quad = 3750000$$
$$B = 6^2 . 7 . 22843 = 639604$$
$$C = 3^3 . 7 . 13219 = 832797$$
$$D = 2^{10} . 3^3 . 5^3 \quad = 3456000.$$

56. Ob hos numeros tam grandes problema eo magis eſt attentione dignum, quamobrem operae pretium videtur, adhuc aliam eius ſolutionem etſi particularem proponere. Poſitis igitur quatuor quadratis quaeſitis vv, xx, yy, zz, primo has duas tantum conditiones conſidero:

$$vv + yy + zz = \square \quad \text{et} \quad xx + yy + zz = \square$$

quibus vt ſatisfaciam, aſſumo binos numeros a et α vt ſit $aa + \alpha\alpha = AA$, ac ſtatuo

$$vv + yy + zz = \frac{Av + \alpha x}{a} \quad \text{et}$$

$$xx + yy + zz = \frac{Ax + \alpha v}{a}$$

vt vtrinque eadem prodeat aequatio

$$aa(yy + zz) = \alpha\alpha(vv + xx) + 2\alpha Avx$$

ſimili modo pro binis reliquis conditionibus pono

$$yy + vv + xx = \frac{Ay - az}{\alpha}$$

$$zz + vv + xx = \frac{Az - ay}{\alpha}$$

prodibitque hinc

$$\alpha\alpha(vv + xx) = aa(yy + zz) - 2Aayz$$

quae duae aequationes additae dant

$$\alpha vx = ayz; \text{ hincque } z = \frac{\alpha vx}{ay}$$

qui valor in priori ſubſtituatur fietque

$$aayy + \frac{\alpha\alpha vvxx}{yy} - \alpha\alpha vv - \alpha\alpha xx - 2\alpha Avx = 0$$

ſeu $\alpha\alpha xx(vv - yy) = 2\alpha Avxyy + \alpha\alpha vvyy - aay^4$

et $\alpha x = \frac{Avyy \pm y\sqrt{(AAvvyy + \alpha\alpha v^4 - \alpha\alpha vvyy - aavvy^3 + aay^4)}}{vv - yy}$

quae

quae ob $AA = \alpha\alpha + aa$ abit in

$$\frac{\alpha x}{y} = \frac{Avy \pm \sqrt{(\alpha\alpha v^4 + aay^4)}}{vv - yy}.$$

57. Ponatur $v = y(1 + s)$ et cum fiat

$$\sqrt{(\alpha\alpha v^4 + aay^4)} = yy\sqrt{(AA + 4\alpha\alpha s + 6\alpha\alpha ss + 4\alpha\alpha s^3 + \alpha\alpha s^4)}$$

ſtatuatur haec radix $= A + \frac{2\alpha\alpha}{A}s + \alpha ss$ eritque

$$6\alpha\alpha ss + 4\alpha\alpha s^3 = \left(\frac{4\alpha^4}{AA} + 2\alpha A\right)ss + \frac{4\alpha^3}{A}s^3$$

hincque $s = \frac{A^3 - 3\alpha AA + 2\alpha^3}{2\alpha A(A - \alpha)} = \frac{AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}$.

Quare $\frac{v}{y} = \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}$ et radix illa

$$= A + \frac{\alpha(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{AA} + \frac{(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)^2}{4\alpha AA}$$

$$= A + \frac{(AA - 2\alpha A + 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha AA}$$

$$= \frac{A^4 + 4\alpha\alpha AA - 4\alpha^4}{4\alpha AA}.$$

Porro eſt $vv - yy = \frac{(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha\alpha AA}yy$

hincque $\frac{(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha AA}\cdot\frac{x}{y}$

$$= \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha} \pm \frac{(A^4 + 4\alpha\alpha AA - 4\alpha^4)}{4\alpha AA}$$

$=$ vel $\frac{A^4 - 8\alpha\alpha AA + 4\alpha^4}{4\alpha AA} = \frac{(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)}{4\alpha AA}$

vel $\frac{3A^4 - 4\alpha^4}{4\alpha AA}$.

Conſequenter habebimus

vel $\frac{x}{y} = 1$

vel $\frac{x}{y} = \frac{3A^4 - 4\alpha^4}{(AA - 2\alpha\alpha)^2 - 4\alpha\alpha AA}$

denique eſt $\frac{z}{y} = \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}\cdot\frac{x}{y}$ ob $\frac{v}{y} = \frac{AA - 2\alpha\alpha}{2\alpha A}$.

58. Duas igitur adepti ſumus ſolutiones, quarum prior ita ſe habet: ſumto $y = 2\alpha a A$

$$v = a(AA - 2\alpha\alpha)$$
$$x = 2\alpha a A$$
$$y = 2\alpha a A$$
$$z = a(AA - 2\alpha\alpha)$$

vnde ſumendo $\alpha = 3$, $a = 4$ et $A = 5$ prodit ſolutio ſimpliciſſima

$$v = 28;\ x = 120;\ y = 120;\ z = 21.$$

Altera autem ſolutio in numeris integris dat

$$v = a(AA - 2\alpha\alpha)(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)$$
$$x = 2a\alpha A(3A^4 - 4\alpha^4)$$
$$y = 2a\alpha A(AA + 2\alpha A - 2\alpha\alpha)(AA - 2\alpha A - 2\alpha\alpha)$$
$$z = a(AA - 2\alpha\alpha)(3A^4 - 4\alpha^4).$$

Vnde ſumtis $\alpha = 3$, $a = 4$, $A = 5$ ſolutio ſimpliciſſima emergit:

$$v = 4 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 23 = 23828$$
$$x = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1551 = 186120$$
$$y = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 23 = 102120$$
$$z = 3 \cdot 7 \cdot 1551 = 32571$$

quorum numerorum quadrata ſunt

$$vv = 567773584$$
$$xx = 34640654400$$
$$yy = 10428494400$$
$$zz = 1060870041$$

repe-

reperiturque

$xx+yy+zz=214779^2$; $vv+yy+zz=109805^2$

$vv+xx+zz=190445^2$; $vv+xx+yy=213628^2$

at $vv+xx+yy+zz=25.1201.1555297.$

59. Quo ratio harum formularum clarius perſpiciatur, notari conuenit eſſe:

$$3A^4-4\alpha^4=-(AA+2aA-2aa)(AA-2aA-2aa),$$

vnde erit:

$$v=a(AA-2aa)(AA+2\alpha A-2\alpha\alpha)(AA-2\alpha A-2\alpha\alpha)$$
$$z=\alpha(AA-2\alpha\alpha)(AA+2aA-2aa)(AA-2aA-2aa)$$
$$x=2a\alpha A(AA+2\alpha A-2\alpha\alpha)(AA-2\alpha A-2\alpha\alpha)$$
$$y=2a\alpha A(AA+2aA-2aa)(AA-2aA-2aa)$$

ſicque patet, numeros a et α inter ſe permutari, vt natura rei poſtulat. Quod facilius ex his formulis perſpicietur:

$$v=a(aa-\alpha\alpha)(3\alpha^4+6aa\alpha\alpha-a^4)$$
$$z=\alpha(aa-\alpha\alpha)(3a^4+6aa\alpha\alpha-\alpha^4)$$
$$y=2a\alpha A(3a^4+6aa\alpha\alpha-\alpha^4)$$
$$y=2a\alpha A(3\alpha^4+6aa\alpha\alpha-a^4).$$

Hinc eſt in genere:

$$vv+xx+yy=a^2(a^6+13a^4\alpha\alpha+11aa\alpha^4+7\alpha^6)^2$$
$$xx+yy+zz=\alpha^2(\alpha^6+13aa\alpha^4+11a^4\alpha\alpha+7a^6)^2$$
$$vv+yy+zz=A^2(a^6-a^4\alpha\alpha+15a^2\alpha^4+\alpha^6)^2$$
$$vv+xx+zz=A^2(\alpha^6-a^2\alpha^4+15a^4\alpha^2+a^6)^2$$

et ſumma omnium $xx + yy + zz + vv =$

$$A^2(a^{12} + 34a^{10}\alpha^2 + 175a^8\alpha^4 + 92a^6\alpha^6 + 175a^4\alpha^8 + 34a^2\alpha^{10} + \alpha^{12})$$

quae in hos factores reſoluitur:

$$A^2(a^4 + 6a^2\alpha^2 + \alpha^4)(a^8 + 28a^6\alpha^2 + 6a^4\alpha^4 + 28a^2\alpha^6 + \alpha^8).$$

60. Neque tamen hae formulae minimos numeros ſuppeditant; ſequenti enim modo minores reperiuntur. Vt formula

$$\alpha\alpha v^4 + aay^4$$

fiat quadratum, ſumtis ſimilibus numeris b et β, vt ſit

$$bb + \beta\beta = BB,$$

ſtatuatur

$$\alpha vv = \beta M \text{ et } ayy = bM,$$

ſeu $\frac{vv}{yy} = \frac{a\beta}{\alpha b}$, vt fiat

$$\sqrt{(\alpha\alpha v^4 + aay^4)} = BM = \frac{aB}{b}yy,$$

vbi neceſſe eſt, vt $\frac{a}{\alpha}.\frac{\beta}{b}$ ſit quadratum. Sit ergo

$$\frac{a}{\alpha}.\frac{\beta}{b} = \frac{mm}{nn}, \text{ eritque } \frac{v}{y} = \frac{m}{n} \text{ tum}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{Am}{n} + \frac{aB}{b}}{\alpha\left(\frac{a\beta}{\alpha b} - 1\right)} = \frac{Abm + aBn}{a\beta n - \alpha bn} \text{ et}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{\alpha m}{an}.\frac{x}{y} = \frac{\beta(Abm \pm aBn)}{bm(a\beta - \alpha b)}.$$

Iam ponatur

$$a = 21,\ \alpha = 20,\ A = 29,\ b = 35,\ \beta = 12 \text{ et } B = 37,$$

eritque $\frac{mm}{nn} = \frac{21}{20}.\frac{12}{35} = \frac{9}{25}$,

vt

vt ſit $m = 3$ et $n = 5$, vnde colligitur:

$$\frac{v}{y} = \frac{3}{5};\ \frac{x}{y} = \frac{29 \cdot 35 \cdot 3 \pm 37 \cdot 21 \cdot 5}{-5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 16} = \frac{3(29 \pm 37)}{64}$$

et $\frac{z}{y} = \frac{3(29 \pm 37)}{16 \cdot 7}$.

Pro ſigno ſuperiori ergo erit

$$\frac{v}{y} = \frac{3}{5};\ \frac{x}{y} = \frac{3}{8} \text{ et } \frac{z}{y} = \frac{3}{14},$$

vnde in integris

$$\begin{array}{l|l} v = 8 \cdot 37 = 168 & \sqrt{(xx+yy+zz)} = 305 \\ x = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 & \sqrt{(vv+yy+zz)} = 332 \\ y = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280 & \sqrt{(vv+xx+zz)} = 207 \\ z = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 & \sqrt{(vv+xx+yy)} = 343 \end{array}$$

$$vv + xx + yy + zz = 121249 = 29 \cdot 37 \cdot 113.$$

Huiusmodi autem formulae generales ſunt:

$$v = 4fg(f+g)(3f-g)(3ff+gg)$$

$$y = 4fg(f-g)(3f+g)(3ff+gg)$$

$$z = (ff-g)(9ff-gg)(3ff+gg)$$

$$z = 2fg(ff-gg)(9ff-gg).$$

OB-

OBSERVATIONES CIRCA BINA BIQVADRATA QVORVM SVMMAM IN DVO ALIA BIQVADRATA RESOLVERE LICEAT.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quum demonſtratum ſit, neque ſummam neque differentiam duorum biquadratorum, quadratum eſſe poſſe, multo minus biquadratum eſſe poterit; haud minori autem fiducia negari ſolet, ſummam trium adeo biquadratorum vnquam biquadratum eſſe poſſe, etiamſi hoc nusquam demonſtratum reperiatur. Vtrum autem quatuor biquadrata reperire liceat, quorum ſumma ſit biquadratum; merito dubitamus, quum a nemine adhuc talia biquadrata ſint exhibita.

2. Quamuis autem demonſtrari poſſet, non dari terna biquadrata, quorum ſumma quoque ſit biquadratum; id tamen neutiquam ad differentias extendere liceret, neque enim propterea affirmari poſſet, talem aequationem $A^4 + B^4 - C^4 = D^4$ eſſe impoſſibilem; obſeruaui enim hanc aequationem adeo infinitis modis reſolui poſſe. Neque tamen aſſeuerare auſim, hoc a nemine adhuc eſſe praeſtitum et nunc quidem

quidem minime vacat, omnia monumenta in hoc Analyſis genere euoluere; quicquid autem ſit, ſpero, methodum, qua ſum vſurus, non omni attentione fore indignam. Manifeſtum autem eſt, hanc quaeſtionem verſari circa bina biquadratorum paria, quorum ſiue ſummae ſiue differentiae inter ſe ſint aequales, ſi enim fuerit $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$; vtique etiam erit $A^4 - D^4 = C^4 - B^4$; vnde hoc Problema nobis ſit propoſitum.

Problema.

Inuenire bina biquadrata A^4 *et* B^4, *quorum ſummam in alia duo biquadrata reſoluere liceat, ita vt habeatur talis aequalitas* $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$.

Solutio.

3. Quum igitur hinc eſſe debeat $A^4 - B^4 = C^4 - D^4$, ponamus

$$A = p + q;\quad D = p - q;\quad C = r + s \text{ et } B = r - s$$

vt prodeat iſta aequatio concinnior

$$pq(pp + qq) = rs(rr + ss)$$

cui quidem ſatisfieri liquet, ſumendo $r = p$ et $s = q$, verum inde nihil plane lucraremur, quum oriatur caſus per ſe obuius $C = A$ et $B = D$, interim tamen hic ipſe caſus ad alias ſolutiones manuducere valet.

4. Iam ſtatuamus:

$$p = ax;\quad q = by;\quad r = kx \text{ et } s = y$$

 vt

vt obtineat iſta aequatio reſoluenda

$$ab(aaxx+bbyy)=k(kkxx+yy)$$

vnde ſtatim deducimus $\frac{yy}{xx}=\frac{k^3-a^3b}{ab^3-k}$

quam ergo fractionem quadratum reddi oportet. Hic autem ſtatim in oculos incurrit caſus, quo hoc vſu venit, ſcilicet ſumendo $k=ab$, tum enim fit

$$\frac{yy}{xx}=\frac{a^3b(bb-1)}{ab(bb-1)}=aa,$$

vnde fieret $y=a$, $x=1$ hincque $p=a$, $q=ab$, $r=ab$, $s=a$, qui valores producunt ipſum illum caſum per ſe obuium.

5. Hunc igitur caſum proſequentes, ſtatuamus $k=ab(1+z)$ et aequatio noſtra transfundetur in hanc formam

$$\frac{yy}{xx}=\frac{a^3b((bb-1)+3bbz+3bbz^2+bbz^3)}{ab(bb-1-z)}=aa\frac{(bb-1+3bbz+3bbz^2+bbz^3)}{bb-1-z};$$

atque ex hac aequatione elicimus

$$\frac{y}{x}=\frac{a\sqrt{((bb-1)^2+(3bb-1)(bb-1)z+3bb(bb-2)z^2+bb(bb-4)z^3bbz^4)}}{bb-1-z}.$$

Quo igitur formulam:

$$(bb-1)^2+(bb-1)(3bb-1)z+3bb(bb-2)zz+bb(bb-4)z^3-bbz^4$$

ad quadratum perducamus, ſtatuamus eius radicem $=$

$$bb-1+fz+gzz;$$

et litteras f et g ita aſſumamus, vt terni termini priores deſtruantur, quare quum huius formae quadratum ſit:

$$(bb-1)^2+2(bb-1)fz+2(bb-1)gzz+2fgz^3+ggz^4$$
$$+ffzz.$$

primi

primi quidem termini ſe ſponte deſtruunt, vt autem idem in ſecundis eueniat, ſumi debet

$$f = \frac{3bb-1}{2},$$

atque pro tertiis habebimus

$$3bb(bb-2) = 2(bb-1)g + \frac{9b^4-6bb+1}{4},$$

vnde colligitur

$$g = \frac{3b^4-18bb-1}{8(bb-1)},$$

quibus valoribus definitis, aequatio reſoluenda fit

$$(gg+bb)z = bb(bb-4) - 2fg$$

vnde colligimus

$$z = \frac{bb(bb-4)-2fg}{bb+gg}.$$

6. Hinc igitur littera b adhuc arbitrio noſtro permittitur; ea igitur pro lubitu aſſumta, ſimul atque hinc quantitatem z determinauerimus, ſtatim habebimus

$$x = bb-1-z \quad \text{et} \quad y = a(bb-1+fz+gzz)$$

hincque porro

$$p = a(bb-1-z) \qquad r = ab(1+z)(bb-1-z)$$
$$q = ab(bb-1+fz+gzz) \qquad s = a(bb-1+fz+gzz)$$

quae formulae quum omnes ſint per a diuiſibiles, eam diuiſione tollere licebit, ita vt ſit

$$p = bb-1-z \qquad r = b(1+z)(bb-1-z)$$
$$q = b(bb-1+fz+gzz) \qquad s = bb-1+fz+gzz$$

vbi notandum, ſi numeri x et y communem habuerint factorem, eum diuiſione ante tolli poſſe, quam

 litterae

litterae p, q, r, s inde definiuntur. Operae igitur pretium erit, ſolutiones quasdam ſpeciales euoluere; at vero ſtatim apparet, ſumi non poſſe $b = 1$, quia fieret $g = \infty$; multo vero minus ponere licet $b = 0$, quia fieret $q = 0$; ex quo caſus expediamus duos tantum, primo ſcilicet $b = 2$, tum vero $b = 3$.

Ima Solutio Specialis.

7. Sit $b = 2$ ac ſuperiores valores colliguntur, vt ſequitur:

$$f = \tfrac{11}{2};\ g = -\tfrac{25}{24};\ z = \tfrac{6600}{2929},$$

deinde quia littera a plane non in computum ingreditur, eius loco vnitas ſcribatur, tum vero erit

$$x = 3 - \tfrac{6600}{2929} = \tfrac{2187}{2929};\ y = 3 + \tfrac{11}{2}\cdot\tfrac{6600}{2929} - \tfrac{25}{24}\cdot\tfrac{6600^2}{2929^2} =$$

$$3 + \frac{55407\cdot 1100}{2929^2} = \frac{3\cdot 28894941}{2929^2},$$

totum autem negotium redit ad rationem inter x et y, quae quum ſit

$$\frac{y}{x} = \frac{3\cdot 28894941}{2187\cdot 2929} = \frac{28894941}{2929\cdot 729} = \frac{3210549}{2929\cdot 81} = \frac{1070183}{27\cdot 2929},$$

habebimus

$$x = 79083 \quad\text{et}\quad y = 1070183,$$

tum igitur ob

$$k = 2(1 + z) = \frac{2\cdot 9529}{2929} = \frac{19058}{2929},$$ concludimus fore

$p = 79083$; $\qquad r = 27\cdot 19058 = 514566$

$q = 2\cdot 1070183 = 2140366$ $\qquad s = 1070\cdot 183$.

Conſequenter pro ipſis radicibus biquadratorum nanciſcimur

$A = p + q = 2219449$; $C = 1584749$
$B = r - s = -555617$; $D = 2061283$
eritque propterea $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$.

II^da Solutio Specialis.

8. Sit $b = 3$ eritque $f = 13$; $g = \frac{5}{4}$, hinc $z = \frac{200}{169}$ ideoque

$$k = \frac{3.369}{169} = \frac{1107}{169} = \frac{9.123}{169} = \frac{27.41}{169},$$ porro $$x = \frac{8.144}{169} = \frac{128.9}{169}$$ et

$$y = 8 + \frac{200}{169}\left(13 + \frac{5}{4}.\frac{200}{169}\right) = 8 + \frac{200}{169}.\frac{2447}{169} = \frac{8.150911}{169^2},$$

ſicque erit:

$$x : y = 8.144.169 : 8.150911 = 144.169 : 150911$$

ideoque

$$x = 144.169 = 24336 \text{ et } y = 150911$$

ex quibus valoribus conſequimur

$p = 24335$; $r = 159408 = 144.1107$
$q = 452733$; $s = 150911$.

Atque hinc ipſae litterae A, B, C, D colliguntur

$A = 477069$; $C = 310319$
$B = 8497$; $D = 428397$

eritque iterum $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, atque hi numeri videntur minimi quaeſtioni noſtrae ſatisfacientes.

DE VARIIS INTEGRABILITATIS GENERIBVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si quantitas variabilis p abſolute ſpectetur et quaeratur, quomodo quantitatem V comparatam eſſe oporteat, vt formula V dp fiat integrabilis; tunc nullum eſt dubium, quin iſta quantitas V debeat eſſe functio quaepiam ipſius p. Vocabulum enim integrabilitatis ita hic ſenſu latiſſimo accipio, vt quaecunque functio ipſius p fuerit V, formulam V dp, ſemper integrabilem eſſe dicam, nihilque interſit, ſiue eius integrale algebraice, ſiue per logarithmos, ſiue per arcus circulares, ſiue per quaſcunque altiores quantitates tranſcendentes, exprimatur, quandoquidem formulam integralem $\int$V dp, ſemper per quadraturam cuiuspiam curuae exhibere licet.

2. Longe aliter autem ſe res habet, quando quantitas p certa quadam ratione ad alias quantitates variabiles refertur, tum enim praeter functiones ipſius p quantitati illi V, etiam alios valores tribuere licet, quibus formula V dp integrabilis redditur. Veluti ſi p ita ad binas coordinatas x et y

refe-

referatur, vt ſit $dy = p\,dx$ ſiue $p = \frac{dy}{dx}$, tum loco V etiam ſumi poterit x, quoniam formula $x\,dp$ reuera eſt integrabilis, quum enim ſit

$$\int x\,dp = px - \int p\,dx\text{, ob } \int p\,dx = y$$

erit vtique

$$\int x\,dp = px - y.$$

3. Quin etiam idem locum habet in ipſis differentialibus primitiuis dx et dy; vt enim formula V dx ſit integrabilis, hoc non ſolum vſu venit, ſi fuerit V functio quaecunque ipſius x; ſed etiam caſu, quo $V = p$, quum ſit $\int p\,dx = y$, ſimili modo, vt formula $\int V\,dy$ fiat integrabilis, loco V non ſolum functio quaecunque ipſius y accipi poterit, ſed etiam caſu $V = \frac{1}{p}$, fit $\int \frac{dy}{p} = x$.

4. Quo haec generalius proſequamur, vocemus quantitatem V multiplicatorem, per quem quaepiam formula differentialis reddatur integrabilis, vnde ex praemiſſis patet, ſi formula differentialis fuerit vel dp vel dx vel dy, tum multiplicatorem eſſe vel $V = x$, vel $V = p$, vel $V = \frac{1}{p}$.

5. Quantumuis haec facilia et obuia videantur; tamen ſaepenumero inueſtigatio huiusmodi multiplicatorum maxime ardua deprehenditur, et quod eius vſum maxime commendat, ſaepius hoc modo aequationes differentiales, tam ſecundi, quam altiorum graduum, ſatis commode reſoluere licet, ad quas absque his ſubſidiis vix alius aditus patere videatur. Saepius enim iam notaui, praecipuum nego-

negotium in aequationibus differentialibus integrandis ad inuentionem idoneorum multiplicatorum reduci, ex quo inueſtigatio huiusmodi multiplicatorum ſine dubio maximi momenti cenſeri debet.

6. Haec accuratius perſcrutandi occaſionem mihi dedit haec quaeſtio, qua linea curua inter binas coordinatas x et y contenta quaeritur, cuius radius oſculi aequalis ſit futurus lineae rectae

$$\sqrt{(xx+yy)},$$

quum enim poſito $dy = p\,dx$ ſit radius oſculi

$$= \frac{dx}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

haec habetur aequatio reſoluenda

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

cuius vtrumque membrum non ſine admiratione integrabile fieri deprehendi, ope multiplicatoris $x+py$, tum enim, pro poſteriori membro fit

$$\frac{dx(x+py)}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{(xx+yy)}}$$

cuius integrale eſt

$$\sqrt{(xx+yy)}$$

pro priori vero membro, res non adeo eſt manifeſta, poſito autem

$$y = px+v,$$

vt fiat

$$dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp + dv, \text{ ideoque } dv = -x\,dp$$

habebimus

$$dp(x+py) = xdp + ypdp = x(1+pp)dp + vpdp = -dv(1+pp) + vpdp$$

ita

ita vt prius membrum fiat

$$-\frac{dv(1+pp)+vp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

cuius integrale manifeſto eſt

$$=-\frac{v}{\surd(1+pp)}=\frac{px-y}{\surd(1+pp)}$$

ſicque tota aequatio integralis erit

$$\surd(xx+yy)+C=\frac{px-y}{\surd(1+pp)}.$$

7. Haec igitur perpendens, non amplius dubitaui, quin omnes huiusmodi formulae differentiales duplicem admittant multiplicatorem, ita vt, ſi talis formula iam per ſe ſit integrabilis, quae in genere ſit dv, praeter multiplicatores naturales, qui ſunt functiones ipſius v, etiam dentur multiplicatores alius indolis, qui non ſint functiones ipſius v, quemadmodum in exemplis allatis fieri vidimus.

8. Statim autem ac vnus quispiam multiplicator fuerit cognitus, ex eo mox infinitos alios multiplicatores concludere licet, ita quum formulae dx multiplicator ſit p, et $\int p\,dx=y$, tum functio quaecunque ipſius y, quae ſit Y, per p multiplicata, dabit etiam multiplicatorem idoneum, nam dx multiplicatum in Yp dat $Y\,dy$, quod manifeſto eſt integrabile. Deinde ſi X denotet functionem quamcunque ipſius x, formula dy multiplicatorem habebit $\frac{X}{p}$, tum enim prodit $\frac{X\,dy}{p}=X\,dx$. Simili modo quum ſit

$$\int x\,dp=px-y,$$

ſi V denotet functionem quamcunque formulae $px-y$; tum Vx erit multiplicator ipſius dp, ſi quidem erit

$$Vxdp = V.d(px-y),$$

huiusmodi autem multiplicatores, qui hoc modo ex vno quodam multiplicatore cognito concluduntur, omnes eiusdem generis ſunt cenſendi, vnde ſimpliciſſimum eorum in quouis genere primitiuum appellabo, quippe quo cognito, reliqui omnes innoteſcunt.

9. Ita ſi in genere propoſita ſit huiusmodi formula differentialis,

$$Pdp + Qdx + Rdy$$

vbi P, Q, R ſint functiones quaecunque ipſarum x, y et p, quae integrabilis reddatur ope multiplicatoris M, ſequenti modo omnes reliqui multiplicatores eiusdem generis inueniri poterunt. Ponatur

$$M(Pdp + Qdx + Rdy) = dv,$$

ita vt dv ſit verum differentiale, ac denotet V functionem quamcunque ipſius v, manifeſtumque erit, multiplicatorem quoque fore VM, ſi quidem tum habebitur

$$VM(Pdp + Qdx + Rdy) = Vdv,$$

quae formula per hypotheſin eſt integrabilis.

10. Simili modo, ſi pro eadem formula propoſita

$$Pdp + Qdx + Rdy$$

adhuc

adhuc alius multiplicator primitiuus N fuerit repertus; tum ex eo etiam infiniti alii eiusdem generis erui poterunt, ita vt hoc modo duae inueniantur formulae generales, pro multiplicatoribus formulae differentialis propoſitae. Hinc ergo iſta quaeſtio maximi momenti naſcitur, quam ſeorſim proponi operae pretium erit.

Problema.

Si formula

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy$$

integrabilis fiat tam per multiplicatorem M, quam per alium diuerſae naturae N, inuenire expreſſionem generalem, quae omnes plane multiplicatores poſſibiles eiusdem formulae in ſe complectatur.

Solutio.

Quum M et N ſint multiplicatores, ponamus

$$M(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = dv$$

et $$N(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = du$$

eruntque quantitates v et u cognitae functiones, iam denotet z functionem quamcunque binarum harum variabilium v et u, cuius differentiale propterea huiusmodi formam habebit:

$$dz = S\,dv + T\,du$$

vbi functiones S et T ex functione z erunt cognitae, hac forma iam inuenta, dico expreſſionem generalem,

neralem, omnes plane multiplicatores in ſe complectentem, fore:

$$= S M + T N,$$

tum enim habebitur:

$$(S M + T N)(P dp + Q dx + R dy) = S dv + T du = dz,$$

cuius integrale per hypotheſin eſt z, vbi pro z functio quaecunque binarum variabilium z et u pro lubitu ſumi poteſt.

11. Vt hoc exemplo illuſtremus, ſit propoſita formula $d p$, cuius duo multiplicatores conſtant

$M = 1$ et $N = x$, hinc ergo fit
$d p = d v$ et $x d p = d u$, ideoque
$v = p$ et $u = p x - y$,

quare ſi z denotet functionem quamcunque harum duarum variabilium v et u, ſitque

$$d z = S d v + T d u,$$

multiplicator vniuerſalis erit $S + T x$.

12. Circa hanc formulam obſeruandum eſt, non abſolute neceſſarium eſſe, vt valores litterarum S et T ex certa quadam functione z deriuentur. Dummodo enim pro litteris S et T eiusmodi functiones ipſarum v et u capiantur, vt ſit $(\frac{dS}{du}) = (\frac{dT}{dv})$, tum enim ſemper formula $S M + T N$ erit multiplicator idoneus formulae differentialis

$$P d p + Q d x + R d y,$$

et producti integrale erit ipſa functio illa z, quam ex litteris S et T facile inuenire licet.

13. Quod autem iſta formula $S M + T N$ omnes plane multiplicatores formulae differentialis propoſitae in ſe complectatur, ratio in eo eſt ſita, quod ſemper duo tantum eiusmodi multiplicatores primitiui M et N exhiberi queant, qui a ſe inuicem non pendeant; ſi enim plures eiusmodi multiplicatores locum haberent; tum forma iſta vtique non foret generalis, ſed alia multo generalior exhiberi poſſet; ratio autem, cur duo tantum huiusmodi multiplicatores locum inueniant, in eo eſt quaerenda, quod inter ternas noſtras variabiles, x, y et p vnica detur relatio, ſcilicet $p = \frac{dy}{dx}$, ſi enim vlterius progredi et inſuper litteram q introducere velimus, vt ſit

$$dp = q\,dx, \text{ ſiue } q = \frac{dp}{dx}$$

quaelibet formula differentialis tres adeo multiplicatores admitteret, quemadmodum ex forma ſimpliciſſima dq manifeſtum eſt, quae primum ipſa eſt integrabilis, ſeu multiplicator $= 1$, ſecundus multiplicator eſt y, quoniam

$$\int y\,dq = qy - \int q\,dy \text{ at } \int q\,dy = \int pq\,dx = \int p\,dp = \frac{pp}{2}$$

vnde fit

$$\int y\,dq = qy - \frac{pp}{2},$$

tertius vero multiplicator eſt x, quum ſit

$$\int x\,dq = xq - p,$$

ex quo ſatis patet his caſibus tria integrabilitatis genera locum habere.

14. Contemplemur autem hic tantum ternas variabiles x, y et p, exiſtente $p = \frac{dy}{dx}$, et quo clarius appareat, ſemper duos multiplicatores primitivos locum habere, varios caſus ſimpliciores in medium afferamus, quibus hos duos multiplicatores, ſiue diuinando, ſiue quocunque alio modo, reperire licuit, quos caſus ſequenti modo adiungamus.

I. $\alpha x dp + \beta p dx$.

15 Haec formula primo per ſe eſt integrabilis, quum eius integrale ſit

$$\alpha(px - y) + \beta y$$

ita vt multiplicator primus ſit $= 1$. Alter multiplicator erit $p^{\alpha-1} x^{\beta-1}$; tum enim integrale fit $p^\alpha x^\beta$. Pro multiplicatore igitur vniuerſali inueniendo erit ex §. 10.

$$M = 1 \quad \text{et} \quad N = p^{\alpha-1} x^{\beta-1} \text{ hinc}$$

$$v = \alpha(px - y) + \beta y = \alpha px + (\beta - \alpha) y$$

et $u = p^\alpha x^\beta$,

quare ſi fuerit

$$dZ = S dv + T du,$$

multiplicator generalis erit

$$S.1 + T p^{\alpha-1} x^{\beta-1}.$$

16. Vnico autem caſu, quo $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, haec ſolutio fit incongrua, quippe quo ambo multiplicatores non amplius erunt diuerſi, vterque enim fieret $= 1$, hocque incommodum etiam vſu venit, quoties $\beta = \alpha$, tum enim prius integrale eſt αpx et

et alter multiplicator $p^{\alpha-1}x^{\beta-1}$ eius foret poteſtas, neque propterea a priori multiplicatore differret, quod quidem per ſe euidens eſt, quum totum negotium a ratione inter α et β pendeat, quare hic noua quaeſtio oritur, num caſu $\beta=\alpha$ exhiberi queat alius multiplicator, et quomodo futurus ſit expreſſus, quem caſum ſeorſim euoluamus.

II. $x\,dp+p\,dx$.

17. Circa priorem multiplicatorem $=1$ hic nulla eſt difficultas, quum integrale ſit px, alter vero multiplicator, non tam facile ſe offert, re autem diligentius perpenſa, multiplicator ſe obtulit, $=\mathrm{L}\,x$, erit enim

$$\int(x\,dp+p\,dx)\,\mathrm{L}\,x=px\,\mathrm{L}\,x-y,$$

ſimili autem modo alius colligitur multiplicator $\frac{y}{pp+xy}$, fiet enim integrale

$$=\frac{-y}{px}+\int\frac{dy}{px}=\frac{-y}{px}+\mathrm{L}\,x,$$

neque vero hic multiplicator tertius a duobus prioribus diſcrepat, quum enim ex prioribus ſit

$$\mathrm{M}=1,\ v=px \text{ et } \mathrm{N}=\mathrm{L}x \text{ et } u=px\mathrm{L}x-y,$$

manifeſtum eſt, tertium integrale eſſe functionem ipſius u et v, quum ſit

$$\frac{u}{v}=\mathrm{L}\,x-\frac{y}{px}.$$

Ex hoc igitur exemplo intelligitur, ſaepenumero plures multiplicatores diuerſos videri poſſe, quum tamen ad duos reduci queant, ad quod diiudicandum tantum ex binis multiplicatoribus eliciantur litterae

v et u

v et u, ex quibus ſemper reliqua integralia, quotcunque fuerint inuenta, componi reperientur.

III. $\alpha y dp + \beta p dy$.

18. Hic iterum vnus multiplicator ſponte ſe offert, ſcilicet $p^{\alpha-1} y^{\beta-1}$, cui reſpondet integrale $p^\alpha y^\beta$ ſiue quod eodem redit, ſumto multiplicatore $\frac{1}{py}$, erit integrale

$$= \alpha lp + \beta ly = \mathrm{L}\, p^\alpha y^\beta,$$

quod quum ſit illius logarithmus, etiam a priore differre non eſt cenſendum; alter multiplicator re probe perpenſa colligitur $x p y^{\frac{\beta}{\alpha}}$, integrale enim erit

$$x p y^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta+\alpha}\right) y^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}},$$

tum etiam quaſi ſponte ſe prodit multiplicator $\frac{1}{pp}$, erit enim

$$\int \frac{\alpha y dp}{pp} = -\frac{dy}{p} + \int \frac{\alpha dy}{p} = -\frac{\alpha y}{p} + \alpha x \text{ et } \int \frac{p dy}{pp} = \int \frac{dy}{p} = x,$$

vnde totum integrale erit

$$= \frac{-\alpha y}{p} + (\alpha + \beta) x,$$

hoc autem iam in duobus praecedentibus continetur, erit enim

$$\mathrm{M} = p^{\alpha-1} y^{\beta-1} \text{ et } v = p^\alpha y^\beta,\ \mathrm{N} = x p y^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\text{et } u = x p y^{\frac{\beta}{\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta+\alpha}\right) y^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}},$$

vnde diuidendo u per

$$\frac{V^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+\beta} = \frac{p y^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha+\beta}, \text{ oritur integrale } (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha y}{p}.$$

Haec

Haec autem reductio non ſuccedit, caſu quo $\beta = -\alpha$, quem caſum ſeorſim euoluamus.

IV. $y\,dp - p\,dy$.

19. Cum hoc caſu ſit $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, erit prior multiplicator $\frac{1}{yy}$, praeterea vero colligitur multiplicator $\frac{x}{yy}$, tum enim erit

$$\int \frac{x(y\,dp - p\,dy)}{yy} = \frac{px}{y} - \mathrm{L}y$$

haec enim formula differentiata praebet

$$\frac{x(y\,dp - p\,dy)}{yy} = \frac{p\,dx + x\,dp}{y} - \frac{dy\,px}{yy} - \frac{dy}{y} \text{ ob } dy = p\,dx$$

quum nunc habeamus duos multiplicatores, alterum $\mathrm{M} = \frac{1}{yy}$, et alterum $\mathrm{N} = \frac{x}{yy}$, vnde fit

$$v = \frac{p}{y} \text{ et } u = \frac{px}{y} - \mathrm{L}y$$

ſi Z denotet functionem quamcunque binarum quantitatum v et u, erit multiplicator generalis

$$= \mathrm{M}\left(\frac{d\,Z}{d\,v}\right) + \mathrm{N}\left(\frac{d\,Z}{d\,u}\right) = \frac{1}{yy}\left(\frac{d\,Z}{d\,v}\right) + \frac{x}{yy}\left(\frac{d\,Z}{d\,u}\right).$$

V. $p\,dp + x\,dx$.

20. Primo haec formula ipſa per ſe eſt integrabilis, ita vt ſit

$$\mathrm{M} = 1 \text{ et } v = \tfrac{1}{2}(pp + xx),$$

tum vero alius multiplicator deprehenditur arcus cuius tangens eſt $\frac{x}{p} = \mathrm{N}$, tum enim erit

$$\int (p\,dp + x\,dx)\,\mathrm{A.\,tang.}\frac{x}{p} = \tfrac{1}{2}(pp+xx)\,\mathrm{A.\,tang.}\frac{x}{p}$$
$$-\int \tfrac{1}{2}(pp + xx)\,d.\,\mathrm{A.\,tang.}\frac{x}{p} = \tfrac{1}{2}(pp+xx)\,\mathrm{A.\,tang.}\frac{x}{p}$$
$$-\int \tfrac{1}{2}(p\,dx - x\,dp)$$

 at

at eſt

$$\int \tfrac{1}{2}(p\,dx - x\,dp) = y - \tfrac{px}{2},$$

vnde integrale quaeſitum erit

$$\tfrac{1}{2}(pp + xx)\,\mathrm{A.\,tang.}\tfrac{x}{p} - y + \tfrac{px}{2}.$$

21. Ex his exemplis abunde patet, inuentionem huiusmodi multiplicatorum neutiquam eſſe obuiam, ſed ſaepenumero admodum eſſe abſconditam, quin etiam euenire poteſt, vt vires analyſeos plane ſuperet. Interim tamen methodum quandam hic aperiam, ad hoc inſtitutum accommodatam, cuius ope plurimis caſibus tales multiplicatores inuenire licet.

22. Quum ratio duplicis multiplicatoris in eo lateat, quod huiusmodi formulae differentiales ſint ſecundi gradus, vnde fit, vt vterque multiplicator vnam tantum quaſi integrationem inuoluat, ideoque duplex integratio etiam duplicem multiplicatorem requirat, hinc viciſſim, ambos multiplicatores reperire licebit, ſi vtramque integrationem abſoluamus. Quemadmodum igitur hac methodo vti oporteat, in ſequentibus exemplis docebimus.

Exemplum 1.

23. Propoſita formula differentiali, $x\,dp + p\,dx$, eius vtrumque multiplicatorem inuenire. Quum haec formula per ſe ſit integrabilis, ideoque $M = 1$, ponatur

$$x\,dp + p\,dx = dv \text{ eritque } px = v,$$

ſicque

ſicque vna integratio eſt abſoluta, pro altera vero quum ſit $p = \frac{v}{x}$, per dx multiplicando ob $pdx = dy$ habebimus $dy = \frac{vdx}{x}$, vnde integrando elicimus

$$y = v\,Lx - \int dv . Lx, \text{ ideoque}$$

$$\int dv\,Lx = v\,Lx - y = px\,Lx - y,$$

vnde intelligimus, formulam $dv\,Lx$ eſſe integrabilem, ſiquidem eius integrale eſt $px\,Lx - y$, quare quum dv denotet ipſam formulam noſtram propoſitam, $xdp + pdx$, patet eius multiplicatorem fore Lx.

24. Eodem modo etiam alios multiplicatores reperire licet, quum enim ſit

$dy = \frac{vdx}{x}$ erit etiam $\frac{dy}{v} = \frac{dx}{x}$,

hinc integrando

$$\frac{y}{v} + \int \frac{ydv}{vv} = Lx, \text{ ergo } \int \frac{ydv}{vv} = Lx - \frac{y}{v} = Lx - \frac{y}{px},$$

integrabilis ergo eſt formula

$$\frac{ydv}{vv} \text{ ſeu } \frac{dv . y}{vv},$$

ſicque multiplicator erit

$$\frac{y}{vv} = \frac{y}{ppxx},$$

quem ergo loco N aſſumere licet, vnde, quum ſit

$$v = px \quad \text{et } u = Lx - \frac{y}{px},$$

ſi Z denotet functionem quamcunque ipſarum v et u erit multiplicator generalis

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) + \frac{y}{ppxx}\left(\frac{dZ}{du}\right),$$

veluti ſi fuerit $Z = v u$ erit

$$\left(\frac{dZ}{dv}\right) = u \text{ et } \left(\frac{dZ}{du}\right) = v,$$

vnde oritur hic multiplicator:

$$u + \frac{y}{ppxx} v = Lx - \frac{y}{px} + \frac{y}{px} = Lx,$$

qui eſt multiplicator priori loco inuentus.

Exemplum 2.

25. Propoſita formula differentiali $\alpha x dp + \beta p dx$, eius ambos multiplicatores inuenire. Quum haec formula iam per ſe ſit integrabilis, erit $M = 1$ et poſito:

$$\alpha x dp + \beta p dx = dv \text{ erit } v = \alpha p x + (\beta - \alpha) y,$$

vnde colligitur

$$p = \frac{v}{\alpha x} + \frac{(\alpha - \beta) y}{\alpha} x,$$

quae per dx multiplicata praebet,

$$dy = p\,dx = \frac{v\,dx}{\alpha x} + \frac{\alpha - \beta}{x} \cdot \frac{y\,dx}{x},$$

hincque

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha\,dy}{v + (\alpha - \beta) y},$$

integrando igitur obtinebimus

$$Lx = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} L v + (\alpha - \beta) y - \int \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \frac{dv}{v + (\alpha - \beta) y}$$

ſicque erit

$$\alpha \int \frac{dv}{v + (\alpha - \beta) y} = \alpha L v + (\alpha + \beta) y - (\alpha - \beta) L x,$$

vnde patet, formulae noſtrae dv multiplicatorem fore

$$\frac{\alpha}{v + (\alpha - \beta) y} = \frac{1}{px},$$

vti

vti per ſe eſt manifeſtum, tum enim integrale erit

$$\alpha L p + \beta L x.$$

Exemplum 3.

26. Propoſita formula $p\,dp + x\,dx$, eius ambos multiplicatores inuenire. Hic iterum primus multiplicator eſt $M = 1$ et poſito

$$p\,dp + x\,dx = dv \text{ erit } pp + xx = 2v, \text{ hinc}$$

$$p = \sqrt{(2v - xx)}$$

et per dx multiplicando

$$dy = p\,dx = dx\sqrt{(2v - xx)},$$

ponatur tantisper $2v = ss$, fietque

$$y = \tfrac{1}{2}x.\sqrt{(ss - xx)} + \tfrac{ss}{2}.\text{ Arc. ſin. }\tfrac{x}{s} - \int \frac{xsds}{2\sqrt{(ss - xx)}}$$
$$+ sds.\text{ Arc. ſin. }\tfrac{x}{s} - \frac{sxds}{2\sqrt{(ss - xx)}} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(ss - xx)}$$
$$+ \tfrac{ss}{2}\text{ Arc. ſin. }\tfrac{x}{s} - \int sds.\text{ Arc. ſin. }\tfrac{x}{s},$$

ideoque

$$\int sds.\text{ A. ſin. }\tfrac{x}{s} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(ss - xx)} + \tfrac{ss}{2}\text{ A. ſin. }\tfrac{x}{s} - y = \tfrac{px}{2}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(pp + xx)\text{ A. ſin. }\frac{x}{\sqrt{(pp + xx)}} - y,$$

at eſt

$$sds = p\,dp + x\,dx,$$

vnde patet, noſtrae formulae multiplicatorem eſſe

$$\text{Arc. ſin. }\frac{x}{\sqrt{(pp + xx)}}, \text{ ſiue Arc. tang. }\tfrac{x}{p}.$$

27. Haec autem operatio nimis eſt moleſta, quam vt ea, in formulis magis complicatis, vti

 quea-

queamus, quare eam ſequenti modo faciliorem reddere conemur. Quum inuenerimus:

$$dy = dx\sqrt{(ss - xx)},$$

ſtatuamus hic $x = sz$ fietque

$$dy = ss\,dz\sqrt{(1 - zz)} + zs\,ds\sqrt{(1 - zz)},$$

quae per ss diuiſa dat

$$\frac{dy}{ss} = dz\sqrt{(1 - zz)} + \frac{z\,ds}{s}\sqrt{(1 - zz)}$$

et integrando

$$\frac{y}{ss} + 2\int\frac{y\,ds}{s^3} = \int dz.\sqrt{(1 - zz)} + \int\frac{z\,ds}{s}\sqrt{(1 - zz)}$$

vbi membrum penultimum

$$\int dz\sqrt{(1 - zz)}$$

abſolute datur, quum ſit certa quaedam functio ipſius $z = \frac{x}{s}$, poſtremum autem membrum reſtituto pro z valore $\frac{x}{s}$, abit in

$$\int\frac{x\,ds}{s^3}\sqrt{(ss - xx)},$$

vnde binis integralibus per $\frac{ds}{s^3}$ affectis coniungendis, conſequimur

$$+\int\frac{ds}{s^3}(2y - x\sqrt{(ss - xx)}) = \int dz\sqrt{(1 - zz)} - \frac{y}{ss}$$

ex quo patet, formulae noſtrae

$$p\,dp + x\,dx = s\,ds$$

multiplicatorem eſſe

$$\frac{1}{s^4}(2y - x\sqrt{(ss - xx)})$$

qui ob

$$ss = pp + xx,$$

trans-

tranſmutatur in hanc formam $\frac{2y - px}{(pp + xx)^2}$, qui ſi ponatur $= M$, erit

$$u = \int dz \sqrt{(1 - zz)} - \frac{y}{pp + xx} \text{ exiſtente } z = \frac{x}{\sqrt{(pp + xx)}}$$

atque hinc multiplicatorem generalem facile elicere licet.

28. Hinc patet, ſi formula propoſita ſit $\alpha p dp + \beta x dx$, quo caſu iterum eſt $M = 1$ et

$$v = \frac{\alpha pp}{2} + \frac{\beta}{2} . xx,$$

alterum multiplicatorem repertum iri

$$N = \frac{2y - xp}{(\alpha pp + \beta xx)^2}$$

tum enim integrale hinc natum erit

$$u = \int \frac{s\,ds}{s^4} (2y - px) = \int dz \sqrt{\frac{(1 - \beta zz)}{\alpha}} - \frac{y}{\alpha pp + \beta xx},$$

exiſtente

$$z = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{(\alpha pp + \beta xx)}}.$$

Exemplum 4.

29. Propoſita formula differentiali:

$$p^{n-1} dp + \beta x^{n-1} dx,$$

eius multiplicatores inuenire. Quum alter multiplicator iterum ſit cognitus $= 1$, poſita noſtra formula $= dv$, erit

$$p^n + \beta x^n = nv$$

vnde fit

$$p = (nv - \beta x^n)^{\frac{1}{n}},$$

hincque

$$dy = p\,dx = dx(nv - \beta x^n)^{\frac{1}{n}},$$

ſtatuatur nunc

$$n\,v = s^n, \text{ ſitque } x = s\,z,$$

habebimus

$$d\,y = (s\,d\,z + z\,d\,s)\,s\,(1 - \beta\,z^n)^{\frac{1}{n}},$$

quae per $s\,s$ diuiſa, dat

$$\frac{d\,y}{s\,s} = d\,z\,(1 - \beta\,z^n)^{\frac{1}{n}} + \frac{z\,d\,s}{s}(1 - \beta\,z^n)^{\frac{1}{n}},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{s\,s} + \int \frac{2\,y\,d\,s}{s^3} = \int d\,z\,(1 - \beta\,z^n)^{\frac{1}{n}} + \int \frac{z\,d\,s}{s}(1 - \beta\,z^n)^{\frac{1}{n}},$$

vbi membrum penultimum eſt determinatum, quippe certa quaedam functio ipſius

$$z = \frac{x}{s} = \frac{x}{(n\,v)^{\frac{1}{n}}},$$

vltimum vero membrum, ſi in eo reſtituatur $z = \frac{x}{s}$ abit in

$$\int \frac{x\,d\,s}{s^3}(s^n - \beta\,x^n)^{\frac{1}{n}},$$

atque ob

$$(s^n - \beta\,x^n)^{\frac{1}{n}} = p$$

erit

$$\int \frac{x\,d\,s}{s^3}(s^n - \beta\,x^n)^{\frac{1}{n}} = \int \frac{p\,x\,d\,s}{s^3},$$

quibus ſubſtitutis fiet

$$\int \frac{d\,s}{s^3}(2\,y - p\,x) = \int d\,z\,(1 - \beta\,z^n)^{\frac{1}{n}} - \frac{y}{s\,s}.$$

Quum autem ſit $s = (n\,v)^{\frac{1}{n}}$, erit

$$d\,s = (n\,v)^{\frac{1}{n} - 1}\,d\,v \text{ et } \frac{d\,s}{s^3} = \frac{d\,v}{(n\,v)^{\frac{2+n}{n}}}$$

ex quo primum membrum fiet

$$\int \frac{dv}{(nv)^{\frac{2+n}{n}}}(2y-px),$$

cuius integrale quum iam ſit inuentum, patet formulae propoſitae dv multiplicatorem eſſe

$$=\frac{2y-px}{(nv)^{\frac{2+n}{n}}}=\frac{2y-px}{(p^n+\beta x^n)^{\frac{2+n}{n}}}.$$

Exemplum 5.

30. Propoſita formula differentiali:

$$p^{m-1}\,dp+\beta x^{n-1}\,dx=dv,$$

eius multiplicatorem alterum inuenire. Quum hinc ſit

$$v=\tfrac{1}{m}p^m+\tfrac{\beta}{n}x^n;\ \text{erit}$$

$$p=(mv-\tfrac{m\beta}{n}.x^n)^{\frac{1}{m}}\ \text{et}\ dy=p\,dx=dx(mv-\tfrac{m\beta}{n}.x^n)^{\frac{1}{m}}$$

ponatur hic iterum

$$mv=s^n\ \text{et}\ x=sz,\ \text{erit}$$

$$dy=(s\,dz+z\,ds)\,s^{\frac{n}{m}}(1-\tfrac{m\beta}{n}.z^n)^{\frac{1}{m}},$$

quae diuiſa per $s^{\frac{m+n}{m}}$, praebet

$$\frac{dy}{s^{\frac{m+n}{m}}}=dz(1-\tfrac{m\beta}{n}.z^n)^{\frac{1}{m}}+\tfrac{z\,ds}{s}(1-\tfrac{m\beta}{n}.z^n)^{\frac{1}{m}},$$

hinc integrando

$$\frac{y}{s^{\frac{m+n}{m}}}+\int\frac{m+n}{m}.\frac{y\,ds}{s^{\frac{2m+n}{m}}}=\int dz(1-\tfrac{m\beta}{n}.z^n)^{\frac{1}{m}}$$

$$+\int\tfrac{z\,ds}{s}(1-\tfrac{m\beta}{n}.z^n)^{\frac{1}{m}},$$

 vbi

vbi membrum penultimum eſt functio cognita ipſius z, vltimum autem ſubſtituto loco z valore $\frac{x}{s}$, abit in

$$\int \frac{x\,ds}{s^{\frac{2m+n}{m}}}\left(s^n - \frac{m\beta}{n}.\,x^n\right)^{\frac{1}{m}} = \int \frac{p\,x\,ds}{s^{\frac{2m+n}{m}}},$$

quare hinc colligimus

$$\int \frac{ds}{s^{\frac{2m+n}{m}}}\left(\frac{m+n}{m}y - px\right) = \int dz\left(1 - \frac{m\beta}{n}.\,z^n\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{y}{s^{\frac{m+n}{m}}},$$

quum autem ſit

$$s = (m\,v)^{\frac{1}{n}} \text{ erit } ds = \tfrac{1}{n}.\, m^{\frac{1}{n}}\, v^{\frac{1}{n}-1}\, dv$$

et

$$\frac{ds}{s^{\frac{2m+n}{m}}} = \tfrac{1}{n}.\,\frac{dv}{m^{\frac{m+n}{mn}}\; v^{\frac{m+n}{mn}}},$$

ex quo colligitur formulae noſtrae propoſitae multiplicatorem eſſe

$$\frac{\frac{m+n}{m}\,y - p\,x}{v^{\frac{m+n}{mn}} + 1} = \frac{\frac{m+n}{m}\,y - p\,x}{\left(\frac{1}{m}p^m + \frac{\beta}{n}x^n\right)^{\frac{m+n}{mn}} + 1}.$$

31. Hactenus eiusmodi formulas ſumus contemplati, quae cum per ſe ſunt integrabiles, tum vero duas tantum variabiles p et x contineant; ſimili autem modo iſtas formulas tractare licebit, quae tantum has duas variabiles p et y inuoluant, vbi quidem aſſumimus, has formulas per ſe eſſe integrabiles.

Exemplum 6.

Propoſita formula:

$$p^{m-1}\,dp + \beta\,y^{n-1}\,dp = dv,$$

eius

eius alterum multiplicatorem inueſtigare. Primum integrando colligimus

$$v = \frac{1}{m} p^m + \frac{\beta}{n} y,$$

vnde fit

$$p = (m v - \frac{m \beta}{n} . y^n)^{\frac{1}{m}}$$

et $d y = p\, d x = d x (m v - \frac{m \beta}{n} y^n)^{\frac{1}{m}}$

ideoque

$$d x = \frac{d y}{(m v - \frac{m \beta}{n} . y^n)^{\frac{1}{m}}},$$

ſtatuatur iam hic $m v = s^n$ et $y = s z$, vt obtineamus

$$d x = \frac{s\, d z + z\, d s}{s^{\frac{n}{m}}(1 - \frac{m \beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}},$$

quae aequatio diuiſa per $s^{\frac{m-n}{m}}$ dat

$$\frac{d x}{s^{\frac{m-n}{m}}} = \frac{d z}{(1 - \frac{m \beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}} + \frac{z\, d s}{s (1 - \frac{m \beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}},$$

haec aequatio ſimili modo vt ſupra integratur, et ex penultimo membro iterum naſcitur functio determinata ipſius z; ſi in membro poſtremo loco z ipſius valorem $\frac{y}{s}$ reſtituamus, conſequimur,

$$\frac{x}{s^{\frac{m-n}{m}}} + \int \frac{m-n}{m} \frac{x\, d s}{s^{\frac{2m-n}{m}}} = \int \frac{d z}{(1 - \frac{m \beta}{n} . z^n)^{\frac{1}{m}}} + \int \frac{y\, d s}{s^{\frac{2m-n}{m}}},$$

ex his igitur colligimus

$$\int \frac{ds}{s^{2-\frac{n}{m}}}\left(\left(1-\frac{n}{m}\right)x-\frac{y}{p}\right)=\int \frac{dz}{\left(1-\frac{m\beta}{n}.\ z^n\right)^{\frac{1}{m}}}-\frac{x}{s^{\frac{m-n}{m}}},$$

quum nunc ſit $s=(m\,v)^{\frac{1}{n}}$, erit $ds=\frac{1}{n}.m^{\frac{1}{n}}v^{\frac{1}{n}-1}\,dv$, hinc

$$\frac{ds}{s^{n-\frac{n}{m}}}=\frac{1}{n}\,dv.\frac{1}{m^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}\,v^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}$$

vnde concludimus formulae noſtrae propoſitae multiplicatorem fore

$$\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)x-\frac{y}{p}}{v^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}=\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)x-\frac{y}{p}}{\left(\frac{1}{m}p^m+\frac{\beta}{n}y^n\right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1}}$$

32. Etſi haec exempla iam ſatis late patere videntur; tamen, ſi res ipſa ſpectetur, ea etiam nunc ſunt vehementer particularia, ſiquidem pro v formula binomialis vtroque caſu prodit, in exemplo penultimo litteras p et x, in vltimo vero p et y inuoluens, atque hinc vix liquet, quomodo operationes inſtitui oporteat, ſi plures termini in valore ipſius v occurrant. Interim tamen ſequenti modo iſta inueſtigatio multo generalior reddi poterit.

Problema.

Si Ω eiusmodi fuerit functio quantitatum p et x, vt ea poſito $p=x^\lambda q$, induat hanc formam $x^n\,Q$, ita vt Q tantum ſit functio ipſius q, tum propo-

propoſita formula differentiali $d\Omega$ eius alternm multiplicatorem inuenire.

Solutio.

Poſito vt ante $d\Omega = dv$, vt ſit $v = \Omega$, ponatur $p = x^\lambda q$ eritque per hypotheſin $v = x^n Q$, hinc $Q = \frac{v}{x^n}$, nunc ſtatuatur porro $x^n = \frac{v}{z}$, vt fiat $Q = z$, iam quotcunque dimenſiones ipſius q in functione Q contineantur, etiamſi reſolutio iſtius aequationis vires analyſeos ſuperet, tamen certum eſt, inde valorem radicis q per certam quandam functionem ipſius z, quae ſit Z, expreſſum iri, ita vt ſit $q = Z$, hinc

$$p = x^\lambda Z \text{ et } dy = p\,dx = x^\lambda Z\,dx,$$

iam cum ſit

$$x^n = \frac{v}{z}, \text{ erit } x^{\lambda+1} = \left(\frac{v}{z}\right)^{\frac{\lambda+1}{n}}$$

$$\text{et } x^\lambda dx = \frac{1}{n}.\frac{zdv - vdz}{zz}.\left(\frac{v}{z}\right)^{\frac{\lambda+1}{n}-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{dv.\,v^{\frac{\lambda+1}{n}-1}}{z^{\frac{\lambda+1}{n}}} - \frac{dz.\,v^{\frac{\lambda+1}{n}}}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}\right)$$

et multiplicando per $\frac{n}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}$, habebimus

$$\frac{n\,dy}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}} = \frac{Z\,dv}{v.\,z^{\frac{\lambda+1}{n}}} - \frac{Z\,dz}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}},$$

 vbi

vbi membrum vltimum variabilem z continens dabit functionem determinatam ipſius z, penultimum vero pro z reſtituto valore $\frac{v}{x^n}$ ob $Z=\frac{p}{x^\lambda}$, abit in $\frac{p\,x\,d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$, quare integrando habebimus

$$\frac{n\,y}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}+\int(\lambda+1)\frac{y\,d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}=\int\frac{p\,x\,d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}-\int\frac{Z\,d\,z}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}},$$

vnde fit

$$\int\frac{d\,v}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}(p\,x-(\lambda+1)y)=\int\frac{Z\,d\,z}{z^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}+\frac{n\,y}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}.$$

Quocirca concludimus, formulae noſtrae $d\,v=d\,\Omega$ multiplicatorem quaeſitum eſſe

$$\frac{p\,x-(\lambda+1)y}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}.$$

Problema.

33 Si Ω eiusmodi fuerit functio ipſarum p et y, vt poſito $p=y^\lambda q$ ea obtineat hanc formam $y^n\,Q$, exiſtente Q functione ipſius q; tum propoſita formula differentiali $d\,\Omega$, eius multiplicatorem invenire.

Solutio.

Poſito iterum $d\,\Omega=d\,v$, erit $v=\Omega$, et poſito $p=y^\lambda q$, fiet $v=y^n\,Q$, hincque $Q=\frac{v}{y^n}$

ſtatua-

ſtatuatur nunc $y^n = \frac{v}{z}$, vt fiat $Q = z$, vnde quum Q ſit functio ipſius q, per reſolutionem aequationum q aequabitur certae cuipiam functioni ipſius z, quae ſit Z, ita vt ſit

$q = Z$, hinc $p = y^\lambda Z$

et $dy = p\,dx = y^\lambda Z\,dx$, vnde fit $dx = \frac{dy}{y^\lambda Z}$,

quum autem ſit $y^n = \frac{v}{z}$, erit

$$y = \frac{v^{\frac{1}{n}}}{z^{\frac{1}{n}}} \text{ et } dy = \tfrac{1}{n}\left(\frac{dv.\,v^{\frac{1}{n}-1}}{z^{\frac{1}{n}}} - \frac{v^{\frac{1}{n}}dz}{z^{\frac{1}{n}+1}}\right),$$

ex quo habebitur

$$dx = \tfrac{1}{n}.\frac{v^{\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{n}-1}dv}{z^{\frac{1-\lambda}{n}}.Z} - \tfrac{1}{n}.\frac{v^{\frac{1-\lambda}{n}}dz}{Z.z^{\frac{1-\lambda}{n}+1}},$$

quod multiplicatum per $n.\,v^{\frac{\lambda-1}{n}}$ praebebit

$$n\,dx.\,v^{\frac{\lambda-1}{n}} = \frac{dv}{v.\,z^{\frac{1-\lambda}{n}}.Z} - \frac{dz}{z^{\frac{1-\lambda}{n}+1}.Z},$$

hic vltimi membri integrale manifeſto eſt certa poteſtas ipſius z, quam ſaltem per quadraturas exhibere licet; penultimum vero membrum ob

$Z = q = \frac{p}{y^\lambda}$, abit in $\frac{dv\,y^\lambda}{p\,v.\,z^{\frac{1-\lambda}{n}}}$

et ſubſtituto pro z eius valore $\frac{v}{y^n}$, transformatur in

$$\frac{y\,dv}{p.\,v^{\frac{1-\lambda}{n}+1}},$$

quare

quare primo membro per reductionem integrando, conſequimur

$$n x . v^{\frac{\lambda-1}{n}} - \int (\lambda-1) x . v^{\frac{\lambda-1}{n}-1} d v = \int \frac{y\, d v . v^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{p}$$

$$- \int \frac{d z . z^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{Z},$$

atque hinc colligitur

$$\int d v . v^{\frac{\lambda-1}{n}-1} \left((\lambda-1) x + \tfrac{y}{p}\right) = n x . v^{\frac{\lambda-1}{n}} + \int \frac{d z . z^{\frac{\lambda-1}{n}-1}}{Z},$$

quum igitur ſit $d v = d \Omega$, patet formulam propoſitam $d \Omega$ integrabilem reddi, ſi multiplicetur per

$$(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1} \left((\lambda-1) x + \tfrac{y}{p}\right),$$

qui idcirco eſt multiplicator quaeſitus.

34. Quum in problemate penultimo formulae $d \Omega$ multiplicator ſit

$$\frac{p x - (\lambda+1) y}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}, \text{ huius formulae } \frac{d \Omega}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}+1}},$$

quae etiam eſt verum differentiale, quippe cuius integrale eſt, $\frac{n}{\lambda+1} . \frac{1}{(\Omega)^{\frac{\lambda+1}{n}}}$, multiplicator erit $p x - (\lambda+1) y$, ſimili modo quum in vltimo problemate formulae $d \Omega$ multiplicator ſit inuentus $(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1} \left((\lambda-1) x + \frac{y}{p}\right)$; erit huius formulae

quippe

$d\Omega\,(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}-1}$, quae etiam eſt verum differentiale, quippe cuius integrale eſt $\frac{n}{\lambda-1}.(\Omega)^{\frac{\lambda-1}{n}}$, multiplicator erit $(\lambda-1)x+\frac{y}{p}$; hi duo caſus ob ſimplicitatem multiplicatoris inprimis notatu digni videntur, ex quo operae pretium erit, in genere omnes formulas differentiales inueſtigare, quibus talis multiplicator conueniat, quem in finem hoc Lemma praemittimus.

Lemma.

35. Si formulae differentialis $d\Omega$ multiplicator fuerit V, tum viciſſim formulae differentialis dV multiplicator erit Ω, quum enim ſit

$$\int \Omega\, dV = V\,\Omega - \int V.\,d\Omega,$$

quoniam formula $V\,d\Omega$ per hypotheſin eſt integrabilis; neceſſe eſt, etiam formulam $\int \Omega\, dV$ eſſe integrabilem.

Problema.

36. Inuenire omnes formulas differentiales $d\Omega$, quibus conueniat multiplicator $\alpha y + p x$, denotante α numerum quemcunque.

Solutio.

Quum ob $dy = p\,dx$, ſit

$$d(\alpha y + p x) = (\alpha + 1)\,p\,dx + x\,dp,$$

huius formulae multiplicatorem oportet eſſe Ω, ex

qua conditione quantitatem Ω determinare licet. Sit igitur propoſita haec formula differentialis

$$(\alpha + 1) p\, d x + x\, d p,$$

pro qua habetur multiplicator

$$M = 1 \text{ eritque } v = \alpha y + p x,$$

alter vero multiplicator erit

$$N = x^\alpha, \text{ fietque tum } u = p . x^{\alpha + 1},$$

quare ſi Z denotet functionem quamcunque binarum variabilium

$$v = \alpha y + p x \quad \text{et} \quad u = p . x^{\alpha + 1},$$

in genere multiplicator noſtrae formulae erit,

$$M \left(\frac{d Z}{d v}\right) + N \left(\frac{d Z}{d u}\right),$$

quamobrem, quum ſit

$$\Omega = \left(\frac{d Z}{d v}\right) + x^\alpha \left(\frac{d Z}{d u}\right),$$

eius differentiale $d \Omega$ continebit omnes formulas differentiales, quibus conuenit multiplicator $\alpha y + p x$.

37. Si pro Z ſumatur functio quaecunque ipſius u, erit

$$\left(\frac{d Z}{d v}\right) = 0$$

et $\left(\frac{d Z}{d u}\right)$ erit functio quaedam ipſius u quae ſit $f : u$, hinc noſtrum erit Ω

$$x^\alpha . f : u = x^\alpha f : x^{\alpha + 1},$$

quae forma probe conuenit cum problemate §. 32. vbi multiplicator erat $p x - (\lambda + 1) y$, ita, vt ſit $\alpha = -(\lambda + 1)$. Deinde quod hic eſt $d \Omega$,

ibi

ibi erat $\frac{dv}{v^{\frac{\lambda+1}{n}+1}}$,

ſicque quod hic eſt Ω;

ibi erat $\frac{n}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}}$,

at vero ibi erat

$$v = x^n Q = x^n \Phi : \frac{p}{x^\lambda},$$

ita vt inde ſit

$$\frac{1}{v^{\frac{\lambda+1}{n}}} = x^{-\lambda+1} \cdot \Delta : \left(\frac{p}{x^\lambda}\right),$$

quam formam in illa contineri, ſatis manifeſtum eſt. Hinc ergo patet illud problema eſſe caſum maxime particularem huius problematis, huiusque ſolutionem infinities latius patere.

Problema.

38. Inuenire omnes formulas differentiales $d\Omega$, quibus conueniat multiplicator $ax+\frac{y}{p}$.

Solutio.

Quum ob $dx = \frac{dy}{p}$, ſit

$$d.(ax+\frac{y}{p}) = (a+1)\frac{dy}{p} - \frac{y\,dp}{pp},$$

conſideremus hoc ipſum differentiale tanquam formulam propoſitam, cuius multiplicator Ω ſit inveſtigandus, et quum primus multiplicator ſit $M=1$,

erit $v = xx + \frac{y}{p}$, alter autem multiplicator colligitur $N = y^{\alpha}$, ex quo fit $u = \frac{y^{\alpha+1}}{p}$, quare ſi Z denotet functionem quamcunque binarum variabilium

$$v = ax + \frac{y}{p} \text{ et } u = \frac{y^{\alpha+1}}{p},$$

expreſſio generalis pro multiplicatore quaeſito erit

$$\Omega = \left(\frac{dZ}{dv}\right) + y^{\alpha}\left(\frac{dZ}{du}\right),$$

vbi notandum, ſi pro Z ſumatur tantum functio vnicae variabilis u, tum hanc ſolutionem ad caſum problematis §. 33. perducere.

39. Quae hactenus de inueſtigatione multiplicatorum ſunt tradita, inſignem praeſtant vſum in reſolutione aequationum differentialium ſecundi gradus, quum enim ob $dy = p\,dx$, omnes aequationes huius ordinis ad hanc formam redigere liceat,

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy = 0,$$

manifeſtum eſt, ſi vnus huius formulae multiplicator innoteſcat; tum ſtatim aequationem ſemel integratam, quae erit differentialis primi ordinis, obtineri, quam deinceps ſecundum praecepta cognita tractari conueniet; at vero ſi bini eius formulae multiplicatores fuerint cogniti, tum ſtatim aequationem finitam ſeu bis integratam elicere licebit, ita vt non opus ſit integratione repetita, quam operationem ſequenti problemate doceamus.

Problema.

40. Propoſita aequatione differentiali:

$$P\,dp + Q\,dx + R\,dy = 0,$$

ſi eius duo multiplicatores innoteſcant M et N, eius aequationem finitam bis integratam inuenire.

Solutio.

Quum M et N ſint multiplicatores cogniti, ponamus:

$$M(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = dv$$

et $N(P\,dp + Q\,dx + R\,dy) = du$,

hinc habebuntur quantitates v et u, quomodocunque ex ternis variabilibus p, x et y conflatae. Ob priorem igitur multiplicatorem fiet $v = a$ et ob poſteriorem $u = b$, vbi a et b ſunt binae conſtantes, vtraque integratione ingreſſae; quum igitur duae habeantur aequationes finitae inter ternas variabiles x, y et p, ſi inde p eliminetur, prodibit aequatio finita inter binas coordinatas x et y, vel quod eodem redit, inde determinari poterunt binae harum litterarum per tertiam.

41. Hanc methodum ex praecedentibus per plura exempla facile illuſtrare liceret, verum inſtar omnium nobis erit, problema initio huius diſſertationis commemoratum, quo linea curua aequatione inter binas coordinatas x et y exprimenda quaeritur, cuius radius oſculi aequetur formulae $n\sqrt{(xx+yy)}$.

Exemplum.

Propoſita aequatione differentiali ſecundi gradus

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n\,dx}{\sqrt{(xx+yy)}} = 0,$$

inuenire aequationem finitam inter x et y, ope duplicis multiplicatoris. Primum multiplicatorem iam ſupra obſeruauimus eſſe $x+py$, vnde fit

$$dv = \frac{dp\,(x+py)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n\,(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

adeoque erit

$$v = \frac{px-y}{\sqrt{(1+pp)}} - n\sqrt{(xx+yy)} = a.$$

Pro altero multiplicatore, quoniam is tam facile non liquet, tam eum, quam integrale inde natum ſimul inueſtigemus, ponamus primo $y = xz$, et ob $dy = p\,dx$ fiet

$$p\,dx = z\,dx + x\,dz \text{ hincque } \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z},$$

quo valore ſubſtituto, formula noſtra erit

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n\,dz}{(p-z)\sqrt{(1+zz)}} = 0,$$

quare poſito porro $z = \frac{p+q}{1-pq}$, vnde fit

$$p-z = -\frac{q(1+pp)}{1-pq}, \quad \sqrt{(1+zz)} = \frac{\sqrt{(1+pp)(1+qq)}}{1-pq},$$

et $dz = \frac{dp\,(1+qq)+dq\,(1+pp)}{(1-pq)^2}$

trans-

tranſformatur noſtra formula in hanc

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n\,dp(1+qq) + n\,dq(1+pp)}{q(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+qq)}}$$

$$= \frac{(q\sqrt{(1+qq)} + n(1+qq))dp + n\,dq(1+pp)}{q(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+qq)}},$$

vel in

$$\frac{q+n\sqrt{(1+qq)}}{q\sqrt{(1+pp)}}\left(\frac{dp}{1+pp} + \frac{n\,dq}{q+n\sqrt{(1+qq)}}\right),$$

hinc igitur patet, pro altero multiplicatore ſumi debere

$$M = \frac{q\sqrt{(1+pp)}}{q+n\sqrt{(1+qq)}},$$

tumque fit

$$du = \frac{dp}{1+pp} + \frac{n\,dq}{q+n\sqrt{(1+qq)}}$$

quae formula eſt integrabilis fietque inde

$$u = \int\frac{dp}{1+pp} + \int\frac{n\,dq}{q+n\sqrt{(1+qq)}} = b$$

ex qua vel q per p, vel p per q determinabitur, tum vero quum ſit

$$z = \frac{p+q}{1-pq} = \frac{y}{x}$$

inde fit

$$y = \frac{(p+q)x}{1-pq},$$

qui valor in prima aequatione ſubſtitutus praebet

$$\frac{-qx\sqrt{(1+pp)}}{(1-pq)} - nx\frac{\sqrt{(1+pp)(1+qq)}}{1-pq} = a,$$

nunc

nunc igitur inueniri poteſt x, vnde colligitur

$$x = \frac{-a(1-pq)}{(q+n\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+pp)}},$$

ſicque quia datur p per q, vel q per p, etiam x eodem modo definitur, deinde vero erit

$$y = \frac{-a(p+q)}{(q+n\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+pp)}}$$

quae eſt ſolutio completa problematis.

OBSER-

OBSERVATIONES CIRCA AEQVATIONEM DIFFERENTIALEM

$$y\,dy + My\,dx + N\,dx = 0.$$

Auctore

L. EVLERO.

I.

In hac aequatione quantitates M et N vt functiones quaecunque variabilis x ſpectantur; et cum haec aequatio ita ſit comparata, vt in genere nullo modo integrari queat, methodis ſaltem etiamnunc cognitis; praecipua quaeſtio in ea indole binarum functionum M et N inueſtiganda verſatur, qua integratio abſolui queat; vnde quidem caſus per ſe obvios, veluti quando vel altera euaneſcit, vel ambae in ratione conſtante conſiſtunt, excludi conuenit.

II. Cum forma huius aequationis ſatis ſit ſimplex, vt mirari liceat, quod eius integratio vires Analyſeos adhuc eluſerit, eius certe conſideratio eo maiori attentione digna videtur; idque potiſſimum quod in forma generaliori, a Comite Riccatio olim tractata

$$dz + Pz^n\,dx + Q\,dx = 0,$$

continetur, ad quam adeo duplici modo reuocari poteſt. Primo enim per y diuiſa praebet

$$dy + N y^{-1} dx + M dx = 0,$$

ita vt $n = -1$, tum vero poſito $yy = z$, prodit

$$dz + 2 M z^{\frac{1}{2}} dx + 2 N dx = 0,$$

ita vt ſit $n = \frac{1}{2}$. Vbi in genere obſeruaſſe iuuabit, poſito $z = y^{\frac{-1}{n-1}}$ formam generalem in hanc mutari

$$dy + (1 - n) Q y^{\frac{n}{n-1}} + (1 - n) P dx = 0,$$

ita vt in hoc negotio exponentes n et $\frac{n}{n-1}$ pro aequiualentibus ſint habendi.

III. Patet ergo, quod tantum in tranſitu monuerim, caſum $n = 2$, quem Ricatus olim imprimis eſt contemplatus, hac proprietate prae reliquis eſſe praeditum, vt hac reductione ad ſe ipſum reuocetur, dum $\frac{n}{n-1}$, iterum dat binarium. Tum vero caſus $n = 1$, quo aequatio

$$dz + P z dx + Q dx = 0$$

generatim eſt integrabilis, perducitur ad alterum $\frac{n}{n-1} = \infty$; vnde cum poteſtati y^{∞} aequiualeat quaſi forma exponentialis e^{y}, etiam haec aequatio

$$dy + P e^{y} dx + Q dx = 0$$

pro integrabili eſt habenda, cuius integratio ponendo

$$e^{y} = \frac{1}{v}, \text{ vt fiat } y = -l v \text{ et } dy = -\frac{dv}{v},$$

hincque prodeat

$$dv - Q v dx - P dx = 0,$$

per ſe eſt manifeſta.

IV.

IV. Vt autem ad ipſam aequationem propoſitam reuertar, ante omnia obſeruo me ad ſimilem formam, cum olim aequationem differentialem tertii gradus hanc:

$$d^3 v + A\,dt\,ddv + B\,dt^2\,dv + C\,v\,dt^3 = 0$$

tractaſſem, vbi quidem A, B, C et dt ſunt conſtantes, eſſe perductum. Poſito ſcilicet $v = e^{\int x\,dt}$ obtinueram

$$ddx + 3x\,dt\,dx + A\,dt\,dx + (x^3 + Axx + Bx + C)\,dt^2 = 0$$

ſeu rationem elementi conſtantis dt exuendo:

$$d.\frac{dx}{dt} + (3x + A)\,dx + (x^3 + Axx + Bx + C)\,dt = 0.$$

Nunc poſueram $\frac{dx}{dt} = y$ hincque $dt = \frac{dx}{y}$, ex quo nata erat haec aequatio

$$dy + (3x + A)\,dx + Cx^3 + Axx + Bx + C)\frac{dx}{y} = 0$$

ſiue $y\,dy + (3x + A)\,y\,dx + (x^3 + Axx + Bx + C)\,dx = 0$

quae vtique in forma propoſita comprehenditur.

V. Cum igitur aequatio differentialis tertii ordinis, vnde hanc deriuauimus, ſit integrabilis, ac poſito

$$x^3 + Axx + Bx + C = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

eius integrale completum ſit

$$v = F\,e^{\alpha t} + G\,e^{\beta t} + H\,e^{\gamma t}$$

hinc ſequitur, etiam noſtrae aequationis

$$y\,dy + (3x + A)\,y\,dx + (x^3 + Axx + Bx + C)\,dx = 0$$

 inte-

integrale in genere exhiberi poſſe; quod quidem adeo algebraice ita expreſſum inde elicui

$$(y+(x-\alpha)(x-\beta))^{\beta-\alpha}(y+(x-\beta)(x-\gamma))^{\gamma-\beta}(y+(x-\gamma)(x-\alpha))^{\alpha-\gamma}=E$$

vbi notandum eſt, eſſe

$$A=-\alpha-\beta-\gamma;\quad B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \text{ et } C=-\alpha\beta\gamma.$$

VI. Cum enim ob $v=e^{\int x\,dt}$ ſit $x=\frac{dv}{v\,dt}$, fiet

$$x=\frac{\alpha F e^{\alpha t}+\beta G e^{\beta t}+\gamma H e^{\gamma t}}{v} \text{ et ob } y=\frac{dx}{dt}$$

$$y=\frac{(\beta-\alpha)^2 FGe^{(\alpha+\beta)t}+(\gamma-\alpha)^2 FHe^{(\alpha+\gamma)t}+(\gamma-\beta)^2 GHe^{(\beta+\gamma)t}}{vv}$$

Inde porro colligitur:

$$x-\alpha=\frac{(\beta-\alpha)Ge^{\beta t}+(\gamma-\alpha)He^{\gamma t}}{v} \text{ et } x-\beta=\frac{(\alpha-\beta)Fe^{\alpha t}+(\gamma-\beta)He^{\gamma t}}{v}$$

ſicque conficitur

$$y+(x-\alpha)(x-\beta)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)He^{\gamma t}}{v}$$

ſimilique modo

$$y+(x-\beta)(x-\gamma)=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)Fe^{\alpha t}}{v}$$

$$\text{et } y+(x-\gamma)(x-\alpha)=\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)Ge^{\beta t}}{v}$$

vnde veritas integralis exhibiti fit manifeſta, et quia id inuoluit quantitatem conſtantem E per arbitrarias F, G, H definitam, pro completo erit habendum.

VII. Haec conſideratio viam nobis aperit, a priori ad aequationes formae propoſitae perueniendi.

Sumtis

Sumtis enim tribus functionibus ipſius x, quae ſint P, Q, R ſtatuatur aequatio integralis:

$$(y+P)^{\lambda}(y+Q)^{\mu}(y+R)^{\nu} = \text{Conſt.}$$

vnde haec naſcitur aequatio differentialis:

$$\frac{\lambda dy + \lambda dP}{y+P} + \frac{\mu dy + \mu dQ}{y+Q} + \frac{\nu dy + \nu dR}{y+R} = 0$$

quae a fractionibus liberata hanc induit formam:

$$(\lambda+\mu+\nu)yydy + ydy(\lambda(Q+R)+\mu(P+R)+\nu(P+Q))$$
$$+dy(\lambda QR+\mu PR+\nu PQ)+yy(\lambda dP+\mu dQ+\nu dR)$$
$$+y[\lambda(Q+R)dP+\mu(P+R)dQ+\nu(P+Q)dR)$$
$$+\lambda QR dP+\mu PR dQ+\nu PQ dR = 0$$

ex qua forma propoſita reſultat ſtatuendo:

1°. $\lambda+\mu+\nu=0$

2°. $\lambda QR+\mu PR+\nu PQ=0$

3°. $\lambda dP+\mu dQ+\nu dR=0$ ſeu $\lambda P+\mu Q+\nu R=\text{Conſt.}$

VIII. Si hic ponamus $\lambda P+\mu Q+\nu R=a$ et $P+Q+R=S$, vt ſingulas litteras P, Q, R hinc definire valeamus, ratione habita primae conditionis, qua eſſe oportet $\lambda+\mu+\nu=0$, reperiemus hos valores:

$$P = \frac{3\lambda\mu\nu S+(\lambda\lambda+2\mu\nu)a+(\mu-\nu)\sqrt{((\lambda\lambda-\mu\nu)aa-3\lambda\mu\nu aS)}}{9\lambda\mu\nu}$$

$$Q = \frac{3\lambda\mu\nu S+(\mu\mu+2\lambda\nu)a+(\nu-\lambda)\sqrt{((\mu\mu-\lambda\nu)aa-3\lambda\mu\nu aS)}}{9\lambda\mu\nu}$$

$$R = \frac{3\lambda\mu\nu S+(\nu\nu+2\lambda\mu)a+(\lambda-\mu)\sqrt{(\nu\nu-\lambda\mu)aa-3\lambda\mu\nu aS}}{9\lambda\mu\nu}$$

vbi ſigna radicalia ob $\lambda\lambda-\mu\nu=\mu\mu-\nu\nu-\lambda\mu$ inter ſe conueniunt.

IX. Irrationalitate harum formularum ſublata ad eandem aequationem peruenitur, cuius integrale ſupra exhibui (§. V.) vnde hanc euolutionem vlterius non proſequor. Interim tamen maximi momenti eſſe arbitror, obſeruaſſe aequationem differentialem generalem §. VII. expoſitam per ſe reddi integrabilem, ſi ea diuidatur per

$$(y+P)(y+Q)(y+R);$$

quod ſi ad aequationem ſuperiorem

$$y\,dy+(3x+A)y\,dx(x^3+Axx+Bx+C)dx=0,$$

attendamus; reperiemus, eam per ſe integrabilem reddi, ſi diuidatur per hanc formam:

$$y^3+yy(3xx+2Ax+B)+y(3x+A)(x^3+Axx+Bx+C)$$
$$+(x^3+Axx+Bx+C)^2$$

etiamſi hinc minus pateat, integrale adeo algebraice exhiberi poſſe. Quae obſeruatio me deducit ad methodum illam generalem iam dudum a me expoſitam, qua oſtendi, omnium aequationum differentialium integrationes commodiſſime per multiplicatores abſolui poſſe.

X. Cum igitur hic multiplicator ſeu diuiſor ita comparatus eſſe debeat, vt formula per ſe fiat integrabilis, vtique neceſſe eſt, vt criteria huiusmodi formularum perſpecta habeamus, quae integrabilitatem certo indicent, etiamſi forte ipſa integratio difficulter ac nonniſi per quadraturas ſatis complicatas confici queat. Omnium autem formularum integrabilium, cuiuscunque gradus differentialia implicent,

cent, hanc eſſe proprietatem nuper demonſtraui, vt poſitis

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\quad dq = r\,dx \text{ etc.}$$

quo pacto eae ſemper ad talem formam $V\,dx$ reducuntur, in qua littera V vtcunque quantitates x, y, p, q, r etc implicabit, tam futurum ſit

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}dd.\left(\frac{dV}{dq}\right) - \frac{1}{dx^3}d^3.\left(\frac{dV}{dr}\right) + \text{etc} = 0$$

ac viciſſim quoties haec conditio locum habeat, toties quoque formulam $V\,dx$ eſſe integrabilem.

XI. Hanc igitur quaeſtionem nunc euoluendam ſuſcipio.

Inueſtigare eiusmodi functionem Z *binarum variabilium* x *et* y, *per quam aequatio noſtra*

$$y\,dy + M\,y\,dx + N\,dx = 0$$

diuiſa fiat integrabilis!

Hoc ergo caſu erit $V = \frac{yp + My + N}{Z}$ vnde colligitur

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{p}{Z} - \frac{yp}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right) + \frac{M}{Z} - \frac{(My + N)}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right)$$

tum vero ob $\left(\frac{dV}{dp}\right) = \frac{y}{Z}$ porro differentiando reperitur

$$\frac{1}{dx}d.\left(\frac{dV}{dp}\right) = \frac{p}{Z} - \frac{yp}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right) - \frac{y}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ ob } \frac{dZ}{dx} = \left(\frac{dZ}{dx}\right) + p\left(\frac{dZ}{dy}\right).$$

Cum itaque fieri oporteat

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{1}{dx}d.\left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$$

habebimus hanc aequationem pro definienda functione Z

$$\frac{M}{Z} - \frac{(My + N)}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dy}\right) + \frac{y}{ZZ}\left(\frac{dZ}{dx}\right) = 0$$

ſeu $MZ - My\left(\frac{dZ}{dy}\right) - N\left(\frac{dZ}{dy}\right) + y\left(\frac{dZ}{dx}\right) = 0.$

XII.

XII. Si loco diuiſoris Z ſumatur poteſtas quaecunque Z^n, vt integrabilis reddi debeat haec forma:

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{Z^n}$$

functionem Z ex hac aequatione definiri oportebit

$$MZ - n(My + N)\left(\frac{dZ}{dy}\right) + ny\left(\frac{dZ}{dx}\right) = 0$$

vnde viciſſim inueſtigatio ita inſtitui poterit, vt ſumta pro lubitu forma functionis Z, inde indoles quantitatum M et N, quae per ſolam variabilem x determinantur, quaeratur, vt aequatio propoſita hoc modo integrabilis reddi queat. Quamobrem his veſtigiis inſiſtens ſequentes caſus euoluam, vbi quidem litteris P, Q, R etc. functiones ſolius variabilis x indicari moneo.

Caſus I.

Quo integrabilis reddi debet haec forma:

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{(y + P)^n}.$$

XIII. Cum ergo ſit $Z = y + P$ erit

$$\left(\frac{dZ}{dy}\right) = 1 \text{ et } \left(\frac{dZ}{dx}\right) = \frac{dP}{dx}$$

vnde §. praec. hanc ſuppeditat aequationem:

$$0 = My + MP - nMy - nN + \frac{ny\,dP}{dx}$$

quoniam igitur M, N et P ſunt functiones ſolius x, ſeorſim eſſe debet:

1°. $n\,dP = (n-1)M\,dx$ et 2°. $nN\,dx = MP\,dx$.

Quare

Quare pro lubitu ſumta functione P habebimus

$$M\,dx = \frac{n}{n-1}\,dP \quad \text{et} \quad N\,dx = \frac{1}{n-1}\,P\,dP$$

vnde diſcimus hanc aequationem:

$$y\,dy + \frac{n}{n-1}\,y\,dP + \frac{1}{n-1}\,P\,dP = 0$$

integrabilem reddi, ſi diuidatur per formam $(y+P)^n$.

XIV. Haec autem aequatio nullam plane habet difficultatem, quoniam eſt homogenea, atque adeo per hanc formam $(n-1)yy + nyP + PP$ diuiſa integrabilis euadat, ex quo diuiſore, quia conſtat factoribus $(y+P)((n-1)y+P)$ deducitur aequatio:

$$\frac{1}{n-2}.\ \frac{dy+dP}{y+P} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}.\ \frac{(n-1)dy+dP}{(n-1)y+P} = 0$$

cuius integralis manifeſto eſt

$$(y+P)^{n-1} = A((n-1)y+P)$$

quae etiam ex illo diuiſore concluditur. Tantum obſeruo caſu $n=2$, quo haec forma fit incongrua, integrale fore

$$l(y+P) - \frac{y}{y+P} = \text{Conſt.}$$

quippe cuius differentiatio praebet

$$\frac{y\,dy + 2y\,dP + P\,dP}{(y+P)^2} = 0.$$

XV. Singularis hic ſe obtulit caſus, quo aequatio:

$$(y+P)^{n-1} = A((n-1)y+P),$$

quae ob conſtantem arbitrariam A eſt indefinita, ſumto $n=2$ hac indole penitus priuatur. Vt autem tum eius vera forma eliciatur, ſtatuatur more ſoli-

to $n = 2 + \omega$, denotante ω fractionem infinite parvam, vt ſit

$$(y + P)^{\omega} = 1 + \omega\, l\,(y + P);$$

ſic illa aequatio hanc induet formam:

$$y + P + \omega(y + P)\, l(y + P) = A(y + P) + A\omega y$$

ſit nunc $A = 1 + B\omega$ ac prodibit

$$(y + P)\, l\,(y + P) = y + B\,(y + P)$$

ſicque loco conſtantis A alia arbitraria B eſt introducta.

XVI. Vt aequationem inuentam elegantiorem reddamus, ponamus $P = x^{n-1}$, vt prodeat

$$y\,dy + n\,x^{n-2}\,y\,dx + x^{2n-3}\,dx = 0$$

quam ergo integrabilem fieri nouimus, ſi diuidatur per $(y + x^{n-1})^{n}$, et integrale eius completum erit

$$(y + x^{n-1})^{n-1} = A\,((n-1)\,y + x^{n-1})$$

dum obſeruetur caſu $n = 2$ integrale eſſe

$$l(y + x^{n-1}) - \frac{y}{y + x^{n-1}} = \text{Conſt.} = l\,(y + x) - \frac{y}{y + x}.$$

Hic vero nouus caſus ſingularis occurrit $n = 1$, aequationem praebens

$$y\,dy + \frac{y\,dx}{x} + \frac{dx}{x} = 0,$$

quae per $y + 1$ diuiſa integrale dat $y + l\frac{x}{y+1} = \text{Conſt.}$ Quod vt ex forma illa generali eruatur, poſito $n = 1 + \omega$ erit

$$(y + 1 + \omega l x)^{\omega} = 1 + \omega l(y + 1) = A(\omega y + 1 + \omega l x)$$

ſit ergo $A = 1 + B\omega$ prodibitque

$$l(y+1) = y + lx + B \text{ ſeu } y + l\frac{x}{y+1} = \text{Conſt. vt ante.}$$

Caſus II.

Quo integrabilis reddenda eſt haec forma

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{(yy + Py + Q)^n}.$$

XVII. Quia hic eſt $Z = yy + Py + Q$ pro §. 12. habebimus:

$$\left(\frac{dZ}{dy}\right) = 2y + P \text{ et } \left(\frac{dZ}{dx}\right) = \frac{y\,dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}$$

hincque iſtam aequationem reſoluendam

$$\begin{array}{llll} 0 = Myy & + MPy & + MQ \\ -2nMP & -nMP & -nNP \\ + \frac{n\,dP}{dx} & +2nN & \\ & + \frac{n\,dQ}{dx}, & \end{array}$$

vnde reſultant hae tres:

$$n\,dP = (2n-1)M\,dx \quad \text{ſeu } M\,dx = \frac{n\,dP}{2n-1}$$

$$n\,dQ = (n-1)MP\,dx + 2nN\,dx$$

$$nNP = MQ, \quad \text{ſeu } N\,dx = \frac{MQ\,dx}{nP} = \frac{Q\,dP}{(2n-1)P},$$

Ergo $n\,dQ = \frac{n(n-1)P\,dP}{2n-1} + \frac{2nQ\,dP}{(2n-1)P}$

ſeu $dQ - \frac{2Q\,dP}{(2n-1)P} = \frac{n-1}{2n-1}P\,dP$

quae aequatio per $P^{\frac{-2}{2n-1}}$ multiplicata et integrata dat

$P^{\frac{-2}{2n-1}} Q = \frac{1}{4} P^{\frac{4n-4}{2n-1}} + A$, hincque fit

$Q = \frac{1}{4} PP + A P^{\frac{2}{2n-1}}$ et per P reſolutio erit

$M dx = \frac{n dP}{2n-1}$, et $N dx = \frac{dP}{2n-1} (\frac{1}{4} P + A P^{\frac{3-2n}{2n-1}})$.

XVIII. Sit $P = 2 x^{2n-1}$; vt fiat
$Q = x^{4n-2} + Bxx$; $M dx = 2nx^{2n-2} dx$ et $N dx = x^{4n-3} dx + Bx dx$
atque hinc intelligimus hanc aequationem

$$y dy + 2nx^{2n-2} y dx + x^{4n-3} dx + Bx dx = 0$$

integrabilem reddi, ſi diuidatur per

$$(yy + 2x^{2n-1} y + x^{4n-2} + Bxx)^n.$$

Euidens eſt hanc aequationem ad ſimpliciorem formam perduci ponendo $y = z - x^{2n-1}$, tum enim prodit

$$z dz + Bx dx + x^{2n-2}(z dx - x dz) = 0$$

quae per $(zz + Bxx)^n$ diuiſa vtique fit integrabilis integrali exiſtente:

$$\frac{-1}{2(n-1)(zz+Bxx)^{n-1}} + \int \frac{x^{2n-2}(z dx - x dz)}{(zz+Bxx)^n} = 0$$

cuius poſterius membrum poſito $z = vx$ abit in

$$-\int \frac{dv}{(vv+B)^n},$$

ita vt nulla ſuperſit difficultas.

Caſus III.

Quo integrabilis reddenda eſt haec forma

$$\frac{y\,dy + My\,dx + N\,dx}{(y^3 + Py^2 + Qy + R)^n}.$$

XIX. Ob $Z = y^3 + Py^2 + Qy + R$ erit

$\left(\frac{dZ}{dy}\right) = 3yy + 2Py + Q$ et $\left(\frac{dZ}{dx}\right) = \frac{y^2\,dP + y\,dQ + dR}{dx}$

ex quo ſequenti aequationi eſt ſatisfaciendum

$$\begin{array}{llll} 0 = My^3 + & MPy^2 + & MQy + & MR \\ -3nM & -2nMP & -nMQ & -nNQ \\ +\frac{n\,dP}{dx} & -3nN & -2nNP & \\ & +\frac{n\,dQ}{dx} & +\frac{n\,dR}{dx} & \end{array}$$

quae ſuppeditat has quatuor determinationes:

1°. $n\,dP = (3n-1)M\,dx$
2°. $n\,dQ = (2n-1)MP\,dx + 3nN\,dx$
3°. $n\,dR = (n-1)MQ\,dx + 2nNP\,dx$
4°. $nNQ\,dx = MR\,dx$.

XX. Ex vltima colligimus $M:N = nQ:R$, vnde ex prioribus litteras M et N elidendo obtinemus:

$$(3n-1)Q\,dQ = (2n-1)PQ\,dP + 3R\,dP \text{ et}$$
$$(3n-1)Q\,dR = (n-1)QQ\,dP + 2PR\,dP$$

hincque $(2n-1)PQ\,dR + 3R\,dR = (n-1)QQ\,dQ + 2PR\,dQ$. Vnde ſi quantitates Q et R per P definire licuerit, tum erit

$$M\,dx = \frac{n}{3n-1}\,dP \quad \text{et} \quad N\,dx = \frac{R\,dP}{(3n-1)Q}.$$

Primum autem obſeruo illis aequationibus ſatisfieri poſſe ponendo

$$Q = \alpha P^2 \quad \text{et} \quad R = \beta P^3,$$

hosque coefficientes α et β duplicem determinationem ſortiri, ſcilicet

vel $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{1}{27}$

vel $\alpha = \frac{2n-1}{(3n-1)^2}$ et $\beta = \frac{-(n-1)(2n-1)^2}{(3n-1)^3}$

quo quidem caſu aequatio noſtra fit homogenea.

XXI. Conſideremus primo caſum quo $n = 1$, quippe quem iam ſupra aliunde elicuimus; eruntque noſtrae aequationes:

1°. $2QdQ = PQdP + 3RdP$ et 2°. $QdR = PRdP$

hincque 3°. $PQdR + 3RdR = 2PRdQ$.

Iam ex 2°. fit $Q = \frac{PRdP}{dR}$, ſumtoque dR conſtante

$$dQ = \frac{PRddP}{dR} + PdP + \frac{RdP^2}{dR},$$

vnde prima abit in hanc:

$$\frac{2PPRRdPddP}{dR^2} + \frac{2PPRdP^2}{dR} + \frac{2PRRdP^3}{dR^2} - \frac{PPRdP^2}{dR} = 3RdP$$

ſeu $\frac{2PPRRddP + 2PRRdP^2}{dR} + PPRdP = 3RdR$

diuidatur per $PR\sqrt{R}$ vt prodeat

$$\frac{2PddP\sqrt{R}}{dR} + \frac{2dP^2\sqrt{R}}{dR} + \frac{PdP}{\sqrt{R}} = \frac{3dR}{P\sqrt{R}}$$

cuius prius membrum integratum dat

$$\frac{2PdP\sqrt{R}}{dR} = 3\int\frac{dR}{P\sqrt{R}} \text{ hincque } dP = \frac{3}{2}\,\frac{dR}{P\sqrt{R}}\int\frac{dR}{P\sqrt{R}}$$

quae quidem forma parum lucri attuliſſe videtur.

XXII.

XXII. Ponamus autem $\int \frac{dR}{P\sqrt{R}} = u$, vt ſit $P = \frac{dR}{du\sqrt{R}}$ ac poſtrema aequatio $dP = \frac{3}{2} u\,du$ dabit $P = \frac{3}{4} uu + A$ vnde ſit $\frac{dR}{\sqrt{R}} = \frac{3}{4} uu\,du + A\,du$ hincque integrando

$$2\sqrt{R} = \tfrac{1}{4}u^3 + Au + 2B \text{ et } R = (\tfrac{1}{8}u^3 + \tfrac{1}{2}Au + B)^2$$

et ob $Q = \frac{PRdP}{dR} = \frac{PdP\sqrt{R}}{Pdu} = \frac{3}{2} u \sqrt{R}$ erit

$$Q = \tfrac{3}{2} u (\tfrac{1}{8} u^3 + \tfrac{1}{2} A u + B) \text{ ac denique}$$

$$M\,dx = \tfrac{1}{2} dP = \tfrac{3}{4} u\,du \text{ et}$$

$$N dx = \tfrac{1}{2} dP . \tfrac{R}{Q} = \tfrac{1}{2} \tfrac{dR}{P} = \tfrac{1}{2} du \sqrt{R} = \tfrac{1}{2} du (\tfrac{1}{8} u^3 + \tfrac{1}{2} Au + B)$$

ſtatuamus nunc $u = 2x + 2f$ vt fiat

$$P = 3xx + 6fx + 3ff + A;$$

$$Q = 3(x+f)\left(x^3 + 3fxx + \begin{array}{l} 3ffx + f^3 \\ + Ax + Af \\ \quad + B \end{array}\right)$$

$$R = \left(x^3 + 3fxx + \begin{array}{l} 3ff \\ + A \end{array} x + \begin{array}{l} f^3 \\ + Af \\ + B \end{array}\right)^2$$

$$Mdx = 3dx(x+f) \text{ et } Ndx = dx\left(x^3 + 3fxx + \begin{array}{l} 3ffx + f^3 \\ + Ax \;\; + Af \\ \qquad\quad + B \end{array}\right).$$

XXIII. Ponamus porro:

$$3f = a,\; 3ff + A = b \text{ et } f^3 + Af + B = c,$$

atque obtinebimus hanc aequationem

$$ydy + (3x+a)ydx + (x^3 + axx + bx + c)dx = 0$$

quae ergo integrabilis reddetur, ſi diuidatur per

$$y^3 + (3xx + 2ax + b)yy + (3x+a)(x^3 + axx + bx + c)y + (x^3 + axx + bx + c)^2$$

ſicque

ſicque diuiſoris forma hoc caſu aſſumta ad eam ipſam integrationem nos deduxit, quam iam ſupra §. IX. ſumus adepti. Circa hunc ergo diuiſorem annotaſſe iuuabit quod ſupra iam vidimus, ſi ponatur

$$x^3 + axx + bx + c = (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

vt ſit

$$a = \alpha + \beta + \gamma;\ b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma;\ \text{et}\ c = \alpha\beta\gamma,$$

diuiſorem noſtrum ſic in ternos factores reſolutum exhiberi poſſe

$$(y+(x+\alpha)(x+\beta))(y+(x+\alpha)(x+\gamma))(y+(x+\beta)(x+\gamma))$$

et aequationis noſtrae integrale completum fore

$$(y+(x+\alpha)(x+\beta))^{\alpha-\beta}(y+(x+\beta)(x+\gamma))^{\beta-\gamma}(y+(x+\gamma)(x+\alpha))^{\gamma-\alpha} = \text{Conſt.}$$

XXIV. Circa aequationem differentio-differentialem §. 21. quae per R diuiſa eſt:

$$\frac{2PPRddP + 2PRdP^2 + PPdPdR}{dR} = 3\,dR$$

obſeruo, eam multo facilius integrari poſſe, ſi modo per $\frac{dP}{dR}$ multiplicetur, vt habeatur

$$\frac{2PPRdPddP + 2PRdP^3 + PPdP^2dR}{dR^2} = 3\,dP$$

cuius integrale ſtatim eſt

$$\frac{PPRdP^2}{dR^2} = 3P + A \text{ hincque } \frac{dR}{\surd R} = \frac{PdP}{\surd(3P+A)}$$

cuius integrale denuo eſt

$$2\surd R = 2\left(\frac{P}{9} - \frac{2A}{27}\right)\surd(3P+A) + B.$$

XXV. Pro poſitione $n = 1$ calculum in genere expedire licuit, pro aliis autem valoribus ipſius n negotium minus ſuccedit, excepto vnico caſu $n = \frac{1}{3}$,

quo

quo aequatio prima §. 19. ſtatim dat $dP=0$ ideoque $P=a$; vnde inter Q et R haec prodit aequatio

$$-\tfrac{1}{3}aQdR+3RdR=-\tfrac{2}{3}QQdQ+2aRdQ$$

ſeu $9RdR+2QQdQ=6aRdQ+aQdR$

quam autem euoluere non licet, niſi ſumatur $a=0$, tum autem oritur

$$\tfrac{9}{2}RR+\tfrac{2}{3}Q^3=\text{Conſt. ſeu } R=\surd(A-\tfrac{4}{27}Q^3).$$

Deinde

$$Ndx=\tfrac{1}{3}dQ \quad \text{et} \quad Mdx=\tfrac{1}{9}dQ.\tfrac{Q}{R}.$$

Statuamus

$Q=3x$, vt fiat $R=\surd(A-4x^3)$; $Ndx=dx$ et $Mdx=\frac{x\,dx}{\surd(A-4x^3)}$

vnde deducimus hanc aequationem differentialem:

$$y\,dy+\frac{xy\,dx}{\surd(A-4x^3)}+dx=0$$

quam nunc nouimus integrabilem reddi, ſi diuidatur per

$$\sqrt[3]{}(y^3+3xy+\surd(A-4x^3)).$$

Hinc autem ipſum integrale neutiquam explicite exhiberi poteſt; quin etiam aequatio iſta ita eſt comparata, vt nulla alia via ad conſtructionem perduci queat.

Caſus IV.

Quo integrabilis reddenda eſt haec forma

$$\frac{y\,dy+My\,dx+N\,dx}{(y^4+Py^3+Qy^2+Ry+S)^n}.$$

XXVI. Pro hoc caſu methodus noſtra ſequentes ſuppeditat aequationes:

1°. $n\,dP = (4n-1)\,M\,dx$

2°. $n\,dQ = (3n-1)\,MP\,dx + 4n\,N\,dx$

3°. $n\,dR = (2n-1)\,MQ\,dx + 3n\,NP\,dx$

4°. $n\,dS = (n-1)\,MR\,dx + 2n\,NQ\,dx$

5°. $MS = nNR$ ſeu $M:N = nR:S$

vnde deriuantur iſtae

$$(4n-1)R\,dQ = (3n-1)PR\,dP + 4S\,dP$$
$$(4n-1)R\,dR = (2n-1)QR\,dP + 3PS\,dP$$
$$(4n-1)R\,dS = (n-1)RR\,dP + 2QS\,dP,$$

ex binis poſtremis elidendo Q oritur:

$$2(4n-1)RS\,dR - (2n-1)(4n-1)RR\,dS = 6PSS\,dP - (n-1)(2n-1)R^3\,dP.$$

XXVII. Quoniam hic in genere vix quicquam concludere licet, praeter caſum homogeneitatis, quo fieri poteſt

$$Q = \alpha P^2;\; R = \beta P^3; \;\text{ et }\; S = \gamma P^4$$

conſideremus caſum $n = 1$, vt diuiſor ſit

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S.$$

Habebimus ergo $M\,dx = \frac{1}{3}\,dP : N\,dx = \frac{S\,dP}{2R} = \frac{dS}{2Q}$ et

1°. $3R\,dQ = 2PR\,dP + 4S\,dP$

2°. $3R\,dR = QR\,dP + 3PS\,dP$

3°. $3R\,dS = 2QS\,dP$

vnde eliminato Q ex duabus poſtremis fit

$$2RS\,dR - RR\,dS = 2PSS\,dP$$

quae

quae per SS diuiſa commode integrationem admittit praebetque

$$\frac{RR}{S} = PP + A \quad \text{ſeu} \quad S = \frac{RR}{PP + A}$$

quare ex ſecunda elicitur

$$Q = \frac{3\,dR}{dP} - \frac{3PS}{R} = \frac{3\,dR}{dP} - \frac{3PR}{PP + A}.$$

XXVIII. Prima vero dat:

$$dQ = \tfrac{2}{3} P\,dP + \frac{4S\,dP}{3R} = \tfrac{2}{3} P\,dP + \frac{4R\,dP}{3(PP + A)}$$

inde vero ſumendo dP conſtans reperitur:

$$dQ = \frac{3\,ddR}{dP} - \frac{3P\,dR}{PP + A} + \frac{3PPR\,dP - 3AR\,dP}{(PP + A)^2}$$

ſicque oritur haec aequatio differentialis ſecundi gradus

$$\frac{ddR}{dP} - \frac{P\,dR}{PP + A} + \frac{5PPR\,dP - 13AR\,dP}{9(PP + A)^2} - \tfrac{2}{9} P\,dP = 0$$

quam dubito in genere reſolui poſſe.

XXIX. Conſiderabo ergo caſum quo $A = 0$, ideoque

$$S = \frac{RR}{PP} \quad \text{et} \quad Q = \frac{3\,dR}{dP} - \frac{3R}{P};$$

ita vt haec reſoluenda ſit aequatio:

$$\frac{ddR}{dP} - \frac{dR}{P} + \frac{5R\,dP}{9PP} - \tfrac{2}{9} P\,dP = 0.$$

Statuamus ergo $R = \alpha P^3 + u$ fietque

$$\frac{ddu}{dP} - \frac{du}{P} + \frac{5u\,dP}{9PP} + 6\alpha P\,dP - 3\alpha P\,dP + \tfrac{5}{9}\alpha P\,dP - \tfrac{2}{9} P\,dP = 0$$

et ſumto $\alpha = \frac{1}{16}$ erit

$$\frac{ddu}{dP} - \frac{du}{P} + \frac{5u\,dP}{9PP} = 0$$

pro qua porro $u = P^\lambda$ et ex aequalitate $\lambda\lambda - 2\lambda + \frac{5}{9} = 0$ colligo $\lambda = 1 \pm \frac{2}{3}$, hincque integrale completum

$$u = \alpha P^{\frac{5}{3}} + \beta P^{\frac{1}{3}}.$$

Quocirca habebimus:

$$R = \tfrac{1}{16} P^3 + \alpha P^{\frac{5}{3}} + \beta P^{\frac{1}{3}}$$

$$Q = \tfrac{3}{8} P^2 + 2 \alpha P^{\frac{2}{3}} - 2 \beta P^{-\frac{2}{3}}$$

$$S = (\tfrac{1}{16} P^2 + \alpha P^{\frac{2}{3}} + \beta P^{-\frac{2}{3}})^2$$

ac tandem $M\,dx = \tfrac{1}{3}\,dP$,

et $N\,dx = \frac{dP}{3P} (\tfrac{1}{16} P^2 + \alpha P^{\frac{2}{3}} + \beta P^{-\frac{2}{3}})$.

XXX. Statuamus nunc $P = t^3$, vt ſublata irrationalitate fiat:

$$M dx = tt\,dt \text{ et } N dx = \frac{dt}{t} (\tfrac{1}{16} t^2 + \alpha t^6 + \tfrac{\beta}{tt})$$

et aequatio noſtra huius ſit formae:

$$y\,dy + ytt\,dt + \frac{dt}{t^3} (\tfrac{1}{16} t^8 + \alpha t^4 + \beta) = 0$$

quam iam nouimus integrabilem reddi ſi diuidatur per

$$y^4 + t^3 y^3 + (\tfrac{3}{8} t^6 + 2 \alpha tt - \tfrac{2\beta}{tt}) y^2 + (\tfrac{1}{16} t^9 + \alpha t^5 + \beta t) y$$
$$+ (\tfrac{1}{16} t^6 + \alpha t^2 + \tfrac{\beta}{tt})^2.$$

Hic diuiſor duobus conſtat factoribus:

$$(yy + (\tfrac{1}{2} t^3 + \tfrac{2}{t} \sqrt{-\beta}) + \tfrac{1}{16} t^6 + \alpha tt + \tfrac{\beta}{tt}) (yy + (\tfrac{1}{2} t^3 \sqrt{-\beta}) y$$
$$+ \tfrac{1}{16} t^6 + \alpha tt + \tfrac{\beta}{tt})$$

ſi diuiſores magis complicatos adhibere vellemus, vix quicquam ad vſum inde concludere liceret.

CONSI-

CONSIDERATIO AEQVATIONIS DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS

$$(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dxdz}{x}+(f+gx)\frac{zdx^2}{xx}=0.$$

Auctore
L. EVLERO.

I.

Primo haec aequatio ad formam differentialem ſimplicem reuocari poteſt ponendo $lz=\int v\,dx$, vt ſit

$\frac{dz}{z}=v\,dx$ et $\frac{ddz}{z}-\frac{dz^2}{zz}=dx\,dv$,

ideoque

$$\frac{ddz}{z}=dx\,dv+vv\,dx^2.$$

Diuiſa enim illa aequatione per $z\,dx$ hinc orietur:

$$(a+bx)dv+(a+bx)vv\,dx+(c+ex)\frac{v\,dx}{x}+(f+gx)\frac{dx}{xx}=0$$

cuius integratio ſi pateret, foret pro propoſita $lz=\int v\,dx$.

II. Hinc duplici modo terminus ſimplici quantitate v affectus elidi poteſt. Pro altero ponamus $v=u+X$ denotante X functionem ipſius x mox determinandam; et facta ſubſtitutione fiet

$$\left.\begin{aligned}&(a+bx)du+(a+bx)uu\,dx+(c+ex)\frac{u\,dx}{x}+(f+gx)\frac{dx}{xx}\\&\quad+2(a+bx)uX\,dx+(a+bx)dX\\&\quad+(a+bx)XX\,dx\\&\quad+(c+ex)\frac{X\,dx}{x}\end{aligned}\right\}=0.$$

Iam ſtatuatur $X = \frac{-(c+ex)}{2x(a+bx)}$, vt ſit

$$dX = \frac{(ac+2bcx+bcxx)dx}{2xx(a+bx)^2}, \text{ prodibitque}$$

$$\left.\begin{array}{r}(a+bx)du+(a+bx)uudx+(f+gx)\frac{dx}{xx}+\frac{(ac+2bcx+bexx)dx}{2xx(a+bx)} \\ -\frac{(cc+2cex+eexx)dx}{4xx(a+bx)}\end{array}\right\} = 0$$

ſeu hoc modo:

$$du+uudx+\frac{4(a+bx)(f+gx)+2(ac+2bcx+bexx)-(c+ex)^2}{4xx(a+bx)^2}dx = 0.$$

III. Per alteram methodum cum priore coniunctam ponatur $v = Pu + X$, exiſtentibus P et X functionibus ipſius x, et ſubſtitutione facta obtinebitur:

$$\left.\begin{array}{r}(a+bx)Pdu+(a+bx)PPuudx+(c+ex)\frac{Pudx}{x}+\frac{(f+gx)dx}{xx} \\ +(a+bx)udP+(a+bx)dX \\ +2(a+bx)PXudx+(a+bx)XXdx \\ +(c+ex)\frac{Xdx}{x}\end{array}\right\} = 0$$

vnde fieri debet

$$\frac{(c+ex)Pdx}{x}+(a+bx)dP+2(a+bx)PXdx = 0.$$

Introduxi autem hic binas functiones P et X, quo inueſtigatio latius pateat; vulgo enim hac altera methodo vtentes ponere ſolemus $v = Pu$, vt ſit $X = 0$, quo caſu erit

$$\frac{dP}{P}+\frac{(c+ex)dx}{x(1+bx)} = 0 \text{ ſeu } \frac{dP}{P}+\frac{c}{a}\cdot\frac{dx}{x}+\frac{ae-bc}{a}\cdot\frac{dx}{a+bx} = 0$$

vnde integrando colligitur:

$$Px^{\frac{c}{a}}(a+bx)^{\frac{ae-bc}{ab}} = C \text{ et } P = Cx^{\frac{-c}{a}}(a+bx)^{\frac{c}{a}-\frac{e}{b}}$$

et aequatio noſtra differentialis primi gradus erit

C x

$$Cx^{\frac{-c}{a}}(a+bx)^{\frac{c}{a}-\frac{e}{b}+1}du+CCx^{\frac{-2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2c}{a}-\frac{2c}{b}+1}uudx + \frac{(f+gx)dx}{xx}=0$$

ſiue hoc modo

$$Cdu+CCx^{\frac{-c}{a}}(a+bx)^{\frac{c}{a}-\frac{e}{b}}uudx+x^{\frac{c}{a}}(a+bx)^{\frac{e}{b}-\frac{c}{a}-1}(f+gx)\frac{dx}{xx}=0.$$

IV. Sin autem in genere ponatur $v=Pu+X$ ſtatuaturque

$$\frac{dP}{P}+\frac{(c+ex)dx}{x(a+bx)}+2Xdx=0,$$

aequatio noſtra differentialis hanc induit formam:

$$Pdu+PPuudx+dX+XXdx+\frac{(c+ex)Xdx}{x(a+bx)}+\frac{(f+gx)dx}{xx(a+bx)}=0$$

in qua vel P vel X pro lubitu accipi poteſt, vnde altera definietur. Veluti ſi capiatur $P=\alpha x^n$, fiet

$$X=\frac{-n}{2x}-\frac{c-ex}{2x(a+bx)}=\frac{-na-c-(nb+e)x}{2x(a+bx)}.$$

Ex his formis caſus, quibus aequatio fit integrabilis, elicere licet, quos autem facilius ex ipſa aequatione propoſita cognoſcere poterimus.

V. Quodſi quaerere velimus caſus, quibus aequatio propoſita integrationem admittit, in quo quidem omnis opera collocanda videtur, quamdiu integrationem in genere inſtituere non licet, primum quidem ſtatim ſe offert forma $z=Ax^m(a+bx)^n$ quae vt ſatisfaciat, definiri oportet relationem quantitatum conſtantium a, b, c, e, f, g. Cum igitur ſit

$$\frac{dz}{z}=\frac{mdx}{x}+\frac{nbdx}{a+bx} \text{ et } \frac{ddz}{z}-\frac{dz^2}{zz}=\frac{-mdx^2}{xx}-\frac{nbbdx^2}{(a+bx)^2},$$

erit

erit

$$\frac{ddz}{z} = \frac{m(m-1)dx^2}{xx} + \frac{2mnbdx^2}{x(a+bx)} + \frac{n(n-1)bbdx^2}{(a+bx)^2},$$

hincque naſcitur facta diuiſione per dx^2 haec aequatio

$$\left.\begin{matrix} \frac{m(m-1)(a+bx)}{xx} + \frac{2mnb}{x} + \frac{n(n-1)bb}{a+bx} \\ + \frac{f+gx}{xx} \quad + \frac{m(c+ex)}{xx} + \frac{nb(c+ex)}{x(a+bx)} \end{matrix}\right\} = 0$$

quae vt ſubſiſtere poſſit, bini poſtremi termini collecti

$$\frac{nb((n-1)bx+c+ex)}{x(a+bx)}$$

denominatorem $a+bx$ amittere debent ex quo fit

$$a : c = b : (n-1)b+e, \text{ ſeu } n-1 = \frac{c}{a} - \frac{e}{b},$$

et $n = 1 + \frac{c}{a} - \frac{e}{b}$,

ita vt habeatur haec aequatio

$$\frac{m(m-1)a+mc+f}{xx} + \frac{m(m-1)b+2mnb+me+g+nbc:a}{x} = 0$$

vnde hae duae naſcuntur aequationes loco n valorem inuentum ſcribendo:

$$m(m-1)a+mc+f = 0 \text{ et}$$

$$m(m+1)b + \frac{(2m+1)bc}{a} - me - \frac{cc}{a} + \frac{bcc}{aa} + g = 0.$$

Multiplicetur haec per a et illa per $-b$ fiet ſumma:

$$2mab + mbc - mae + bc - ce + \frac{bcc}{a} + ag - bf = 0$$

hincque $m = \frac{abf - aag - abc + ace - bcc}{2aab + abc - aae}$ et

$$(m-1)a + c = \frac{abf - aag - 2aab + aae}{2ab + bc - ae}$$

qui valores in prima ſubſtituti dant

$$(bf-ag)^2 + f(2abb+3bbc-3abe-bce+aee) + c(2b-e)(ab-ae+bc) = 0$$
$$+g(2aab-aae+abc-ace+bcc)$$

quae

quae reſoluta praebet,

$$ag = bf - \tfrac{1}{2}(2ab - ae + bc) + \tfrac{c}{2a}(ae - bc) \pm (2ab - ae + bc)\sqrt{\left(\tfrac{(a-c)^2}{4aa} - \tfrac{f}{a}\right)}$$

ſiue

$$g = \frac{c(ae - bc) + 2abf - (2ab - ac + bc)(a \pm \sqrt{((a-c)^2 - 4af)})}{2aa}.$$

Quare ſi littera g hunc habeat valorem, aequatio noſtra integrale habebit $z = Ax^m(a + bx)^n$ exiſtente

$$m = \frac{a - c \pm \sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a} \text{ et } n = 1 + \frac{c}{a} - \frac{e}{b}.$$

VI. Alia via caſus integrabiles reperiuntur, ſi valor ipſius z in ſeriem conuertatur, quae ſi alicubi abrumpatur, expreſſionem finitam pro z exhibet. Fingatur ergo:

$$z = Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + Dx^{n+3} + Ex^{n+4} + \text{etc.}$$

et facta ſubſtitutione conſequemur:

$$\begin{array}{lllll}
n(n-1)Aax^{n-2} & +(n+1)nBax^{n-1} & +(n+2)(n+1)Cax^{n} & +(n+3)(n+2)Dax^{n+1} & \text{etc.} \\
 & +n(n-1)Ab & +(n+1)nBb & +(n+2)(n+1)Cb & \\
nAc & +(n+1)Bc & +(n+2)Cc & +(n+3)Dc & \\
 & +nAe & +(n+1)Be & +(n+2)Ce & \\
Af & +Bf & +Cf & +Df & \\
 & +Ag & +Bg & +Dg &
\end{array}$$

quos ſingulos terminos ad nihilum reduci oportet. Primo ergo erit $n(n-1)a + nc + f = 0$ hincque

$$n = \frac{a - c \pm \sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a} \text{ porro vero}$$

$$B = \frac{-n(n-1)b - ne - g}{(n+1)na + (n+1)c + f}A = \frac{-n(n-1)b - ne - g}{2na + c}A$$

$$C = \frac{-(n+1)nb - (n+1)e - g}{(n+2)(n+1)a + (n+2)c + f}B = \frac{-(n+1)nb - (n+1)e - g}{2((2n+1)a + c)}B$$

$$D = \frac{-(n+2)(n+1)b - (n+2)e - g}{(n+3)(n+2)a + (n+3)c + f}C = \frac{-(n+2)(n+1)b - (n+2)e - g}{3((2n+2)a + c)}C$$

etc.

Haec ergo ſeries alicubi abrumpitur, ſi ſumto pro i numero quocunque integro poſitiuo, quo etiam cyphra referatur, fuerit

$$g = -(n+i)(n+i-1)b-(n+i)e.$$

Cum autem ſit $n+i = \frac{(2i+1)a-c \pm \surd((a-c)^2-4af)}{2a}$ et $n+i-1 = \frac{(2i-1)a-c \pm \surd((a-c)^2-4af)}{2a}$ erit

$$g = \frac{-((2i+1)a-c \pm \surd((a-c)^2-4af))((2i-1)ab-bc+2ae \pm b\surd((a-c)^2-4af))}{4aa}$$

et euoluendo

$$g = \frac{2abf+c(ae-bc)-a(2iiab+(2i+1)(ae-bc)) \mp (2iab+ae-bc)\surd((a-c)^2-4af)}{2aa}$$

ſi ergo eſſet $i = -1$, quod autem hic ſumere non licet, caſus praecedens emergeret. Hinc igitur innumerabiles alii caſus ſimiles eruuntur.

VII. Poſſumus etiam ſeriem, in qua exponentes ipſius x decreſcant, aſſumere, hoc modo

$$z = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + Ex^{n-4} + \text{etc.}$$

qua ſubſtituta noſtra aequatio fit

$$\begin{array}{llll}
+n(n-1)Abx^{n-1} & +n(n-1)Aax^{n-2} & +(n-1)(n-2)Bax^{n-3} & +(n-2)(n-3)Cax^{n-4} + \text{etc.} \\
 & +(n-1)(n-2)Bb & +(n-2)(n-3)Cb & +(n-3)(n-4)Db \\
 & +\quad nAc & +\ (n-1)Bc & +\ (n-2)Cc \\
+nAe & +\ (n-1)Be & +\ (n-2)Ce & +\ (n-3)De \\
 & +\quad Af & +\quad Bf & +\quad Cf \\
+Ag & +\quad Bg & +\quad Cg & +\quad Dg
\end{array}$$

hincque eſſe debet $n(n-1)b+ne+g = 0$ ſeu

$$n = \frac{b-e \pm \surd((b-e)^2-4bg)}{2b}, \text{ vel } g = -nnb+nb-ne.$$

Praeterea vero:

B =

$$\mathrm{B} = \frac{+n(n-1)a+nc+f}{(2n-2)b+e}\,\mathrm{A}\,;\quad \mathrm{C} = \frac{(n-1)(n-2)a+(n-1)c+f}{2((2n-3)b+e)}\,\mathrm{B}$$

$$\mathrm{D} = \frac{(n-2)(n-3)a+(n-2)c+f}{3((2n-4)b+e)}\,\mathrm{C}\,;\quad \mathrm{D} = \frac{(n-3)(n-4)a+(n-3)c+f}{4((2n-5)b+e)}\,\mathrm{C}$$

etc.

Sit vt ante i numerus integer poſitiuus, cyphra non excluſa, et integrale finitum obtinebitur, quoties fuerit

$(n-1)(n-i-1)a+(n-i)c+f=0$ vnde fit

$$n = \frac{+(2i+1)a-c+\surd((a-c)^2-4af)}{2a}$$

vt inuenimus; $g=-n((n-1)b+e)$, ideoque

$$g = \frac{-(2i+1)a-c+\surd((a-c)^2-4af))((2i-1)ab-bc+2ae+b\surd((a-c)^2-4af))}{4aa}$$

quae euoluta praebet vt ante

$$g = \frac{2abf+c(ae-bc)-a(2iiab+(2i+1)(ae-bc))-(2iab+ae-bc)\surd((a-c)^2-4af)}{2aa}$$

ita vt hinc iidem caſus ac ante prodeant; atque adeo eadem integralia ordine retrogrado ſcripta obtineantur.

VIII. Verum ante quam integrale per ſeriem inueſtigemus, noſtra aequatio transformari poteſt in aliam eiusdem formae ponendo

$z=(a+bx)^m v$, vnde fit $\frac{dz}{z}=\frac{dv}{v}+\frac{mbdx}{a+bx}$

et $\frac{ddz}{z}=\frac{ddv}{v}-\frac{mb^2dx^2}{(a+bx)^2}+\frac{2mbdxdv}{v(a+bx)}+\frac{mmbbdx^2}{(a+bx)^2}$

factaque ſubſtitutione

$$\frac{(a+bx)ddv}{v}+\frac{2mbdxdv}{v}+\frac{m(m-1)bbdx^2}{a+bx}=0$$
$$+\frac{(c+ex)dxdv}{xv}+\frac{mb(c+ex)dx^2}{x(a+bx)}$$
$$+\frac{(f+gx)dx^2}{xx}$$

fiat $(m-1)bx+c+ex$ diuiſibile per $a+bx$, eritque

$$(m-1)b+e=\frac{bc}{a} \quad \text{et} \quad m=1+\frac{c}{a}-\frac{e}{b},$$

noſtraque aequatio

$$(a+bx)ddv+\left(c+\left(\frac{2bc}{a}+2b-e\right)x\right)\frac{dxdv}{x}+\left(f+\left(g+\frac{bc}{a}+\frac{bcc}{aa}-\frac{ce}{a}\right)x\right)\frac{vdx^2}{xx}=0.$$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{2bc}{a}+2b-e=\varepsilon$ et

$$g+\frac{bc}{a}+\frac{bcc}{aa}-\frac{ce}{a}=\eta,$$

vt habeatur forma propoſitae ſimilis

$$(a+bx)ddv+(c+\varepsilon x)\frac{dxdv}{x}+(f+\eta x)\frac{vdx^2}{xx}=0$$

quae ergo eſt integrabilis, ſi fuerit

$$\eta=\frac{2abf+c(a\varepsilon-bc)-a(2iiab+(2i+1)(a\varepsilon-bc))\mp(2iab+a\varepsilon-bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

at eſt $a\varepsilon-bc=2ab-ae+bc$, vnde habetur

$$\eta=\frac{2abf+c(2ab-ae+bc)-a(2(i+1)^2ab-(2i+1)(ae-bc))\mp(2(i+1)ab-ae+bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

$$=g+\frac{c(ab-ae+bc)}{aa}, \text{ ideoque}$$

$$g=\frac{2abf+c(ac-bc)-a(2(i+1)^2ab-(2i+1)(ae-bc))\mp(2(i+1)ab-ae+bc)\sqrt{((a-c)^2-4af)}}{2aa}$$

quae expreſſio congruit cum praecedente, ſi ibi loco i ponatur $-i-1$. Quare hic iam pro i omnes numeros integros tam poſitiuos quam negatiuos ſumere licet.

IX. Fieri autem poteſt, vt caſus, qui per priorem ſeriem ſunt integrabiles, iidem quoque per poſteriorem integrari ſicque pro eadem aequatione gemina integralia exhiberi queant. Ponamus enim numerum i pro hac poſteriori forma ſuperare numerum integrum i praecedentis formae exceſſu $\alpha-1$, ita

ita vt hic pro i ſcribamus $i + \alpha - 1$. Quo facto vt ambo valores ipſius g congruant fieri neceſſe eſt

$$2(i+\alpha)^2 ab - (2i + 2\alpha - 1)(ae - bc) = 2iiab + (2i+1)(ae - bc)$$

et $2(i+\alpha)ab - ae + bc = 2iab + ae - bc$

ex qua ſequitur $\alpha ab = ae - bc$. In priori autem ſcribendo αab loco $ae - bc$, prodit per ab diuidendo

$$2(i+\alpha)^2 - 2\alpha i - 2\alpha\alpha + \alpha = 2ii + 2\alpha i + \alpha$$

quae cum ſit identica pro omnibus valoribus ipſius i, habebimus $\alpha = \frac{ae - bc}{ab}$; quae expreſſio debet eſſe numerus integer.

X. Quoniam igitur infinitos valores pro littera g eruimus, quibus aequatio propoſita integrationem admittit, atque adeo formula algebraica pro z ſatisfaciens aſſignari poteſt; operae pretium eſt, vt hos caſus accuratius perpendamus. Denotante ergo i numerum quemcunque integrum ſiue poſitiuum ſiue negatiuum, euolutio prior §. 7. facta has duas conditiones poſtulat:

$$n(n-1)b + ne + g = 0 \quad \text{et}$$

$$(n-i)(n-i-1)a + (n-i)c + f = 0$$

ex quibus deducitur:

$$n = \frac{b - e + \surd((b-e)^2 - 4bg)}{2b} \quad \text{et}$$

$$n - i = \frac{a - c + \surd((a-c)^2 - 4af)}{2a} \quad \text{vnde fit}$$

$$i = \frac{bc - ae + a\surd((b-e)^2 - 4bg) - b\surd((a-c)^2 - 4af)}{2ab}.$$

Quoties ergo haec formula

$$\frac{qc - ae + a\surd((b-e)^2 - 4bg) - b\surd((a-c)^2 - 4af)}{2ab}$$

 vbi

vbi partes irrationales tam poſitiue quam negatiue accipi poſſunt, aequatur numero integro ſiue poſitivo ſiue negatiuo, toties propoſita aequatio integrationem admittit.

XI. Si coefficientes a, b, c, e, f, g ſint rationales, vt hoc fieri poſſit vel vtrumque ſignum radicale fieri rationale debet, vel ſe mutuo deſtruere. Pro hoc caſu fit

$$aa(b-e)^2-4aabg=bb(a-c)^2-4abbf \text{ ſeu}$$
$$4ab(ag-bf)=(ae-bc)(ae+bc-2ab)$$

tum vero ſit neceſſe eſt $i=\frac{bc-ae}{2ab}$.

Pro illo vero caſu ſi ſtatuamus:

$$\sqrt{((a-c)^2-4af)}=h \text{ et } \sqrt{((b-e)^2-4bg)}=k \text{ erit}$$
$$f=\frac{(a+c)^2-hh}{4a} \text{ et } g=\frac{(b-e)^2-kk}{4b}.$$

Tales igitur valores ſi habeant litterae f et g, diſpiciatur an haec expreſſio $\frac{bc-ae+ak+bh}{2ab}$ ſit numerus integer? Tum enim ſi ſit numerus integer poſitiuus, valor ipſius z per ſeriem priorem, ſin autem negatiuus, per poſteriorem exhiberi poterit. Ac ſi inſuper $\frac{ae-ac}{ab}$ fuerit numerus integer, vtroque modo integratio abſolui poterit, vnde integrale completum algebraicum obtinebitur.

XII. Caſus etiam integrabiles inueſtigari poſſunt quaerendo factorem, per quem aequatio multiplicata fiat integrabilis. In hunc finem conſideremus aequationem huius formae:

$$ddz+Qdxdz+Rzdx^2=0$$

ita

ita vt ſit

$$Q = \frac{c + ex}{x(a + bx)} \quad \text{et} \quad R = \frac{f + gx}{xx(a + bx)}.$$

Sitque multiplicator $2pdz + qzdx$, ideoque aequatio integrabilis:

$$2pdzddz + qzdxddz + 2pQdxdz^2 + Qqzdx^2dz + 2pRzdx^2dz + qRzzdx^3 = 0.$$

Statuatur aequatio integralis:

$$pdz^2 + qzdxdz + zzdx^2 \int Rqdx = Cdx^2$$

cuius differentiali inde ablato fieri debet:

$$\left.\begin{array}{l} +2Qpdxdz^2 - dpdz^2 - qdxdz^2 \\ +Qqzdx^2dz + 2Rpzdx^2dz - zdxdqdz - 2zdx^2dz\int Rqdx \end{array}\right\} = 0$$

vnde hae duae aequationes exiſtunt:

$$dp + qdx = 2Qpdx \text{ ſeu } \frac{dp}{p} + \frac{qdx}{p} = 2Qdx$$

et $Qqdx + 2Rpdx - dq - 2dx\int Rqdx = 0$.

Ponatur $\int Rqdx = S$, erit $Rdx = \frac{dS}{q}$ et

$$Qqdx + \frac{2pdS}{q} - dq - 2Sdx = 0 \text{ ſeu } dS - \frac{Sqdx}{p} = \frac{qdq}{2p} - \frac{Qqqdx}{2p}$$

et pro Qdx ſcripto ſuperiori valore

$$dS - \frac{Sqdx}{p} = \frac{qdq}{2p} - \frac{qqdp}{4pp} - \frac{q^3dx}{4pp}.$$

Sit $\varkappa$ numerus cuius logarithmus $= 1$ et integrando eruitur

$$\varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} S = \int \varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} \left(\frac{qdq}{2p} - \frac{qqdp}{4pp} - \frac{q^3dx}{4pp}\right) \text{ ſeu}$$

$$\varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} S = \tfrac{1}{4}C + \varkappa^{\frac{-\int qdx}{p}} \frac{qq}{4p}, \text{ vnde fit}$$

$S = \frac{1}{4}$

$$S = \tfrac{1}{4} C \varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}} + \frac{qq}{4p} = \int R\, q\, dx,$$ hincque porro

$$R = \frac{C\varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}}}{4p} + \frac{2p\,dq - q\,dp}{2pp\,dx} \text{ et } Q = \frac{dp}{2p\,dx} + \frac{q}{2p}.$$

Ex quibus colligimus, propoſita hac aequatione

$$ddz + \frac{(dp + q\,dx)dz}{2p} + (C\varkappa^{\frac{\int q\,dx}{2p}} p\,dx + 2p\,dq - q\,dp)\frac{zz\,dx}{4pp} = 0$$

ſi ea ducatur in $2p\,dz + qz\,dx$ fore integrale

$$p\,dz^2 + qz\,dx\,dz + (C\varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}} p + qq)\frac{zz\,dx^2}{4p} = A\,dx^2.$$

XIII. His ad propoſitum accommodatis primo obtinemus:

$\frac{(c+ex)dx}{x(a+bx)} = \frac{dp}{2p} + \frac{q\,dx}{2p}$ vnde colligimus

$\frac{\int q\,dx}{p} = -lp + \frac{2c}{a} lx + \frac{2(ae - bc)}{ab} l(a+bx)$, ideoque

$$\varkappa^{\frac{\int q\,dx}{p}} = \frac{x^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{cb}}}{p}$$ hincque

$$\frac{f+gx}{xx(a+bx)} = \frac{Cx^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ac-bc)}{ab}}dx + 2p\,dq - q\,dp}{4pp\,dx}.$$

At eſt $q = \frac{2p(c+ex)}{x(a+bx)} - \frac{dp}{dx}$ indeque

$$dq = \frac{2(c+ex)dp}{x(a+bx)} - \frac{2p\,dx(ac + 2bcx + bexx)}{xx(a+bx)^2} - \frac{d\,dp}{dx}$$

quibus ſubſtitutis aequatio reſoluenda erit

$$\frac{4(f+gx)pp\,dx}{xx(a+bx)} = Cx^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-be)}{ab}}dx + \frac{2(c+ex)p\,dp}{x(a+bx)}$$
$$- \frac{4pp\,dx(ac + 2bcx + bcxx)}{xx(a+bx)^2} - \frac{2p\,ddp}{dx} + \frac{dp^2}{dx}.$$

XIV.

XIV. Verum hoc modo haud minoribus difficultatibus implicamur, quam ſi ipſam aequationem propoſitam reſoluere vellemus. Aliam ergo viam magis particularem ingrediamur, et quaeramus conditiones coefficientium A, B, C vt haec aequatio:

$$A x^{\lambda} ddz + B x^{\lambda-1} dx dz + C x^{\lambda-2} z dx^2 = 0$$

ſi multiplicetur per $2 x dz + \alpha z dx$, fiat integrabilis. Cum igitur productum ſit

$$\begin{aligned} &+ 2 A x^{\lambda+1} dzddz + 2 B x^{\lambda} dx dz^2 + \alpha B x^{\lambda-1} z dx^2 dz + \alpha C x^{\lambda-2} zz dx^3 = 0 \\ &+ \alpha A x^{\lambda} z dx ddz \qquad\qquad + 2 C x^{\lambda-1} z dx^2 dz \end{aligned}$$

integrale ſit neceſſe eſt

$$A x^{\lambda+1} dz^2 + \alpha A x^{\lambda} z dx dz + \tfrac{\alpha}{\lambda-1} C x^{\lambda-1} zz dx^2 = E dx^2$$

cuius differentiale ſi inde auferatur, prodibit haec aequatio:

$$\left.\begin{aligned} &+ x^{\lambda} dx dz^2 (2 B - (\lambda+1) A - \alpha A) \\ &+ x^{\lambda-1} z dx^2 dz (\alpha B + 2 C - \alpha \lambda A - \tfrac{2 \alpha C}{\lambda-1}) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Vnde vtroque membro ſeorſim annihilato fit primo

$$B = \tfrac{\alpha+\lambda+1}{2} A \text{ hincque}$$

$$\tfrac{\alpha(\alpha-\lambda+1)}{2} A = \tfrac{2(\alpha-\lambda+1)}{\lambda-1} C$$

ex qua duplici modo eruitur:

$$\text{vel } \lambda = \alpha + 1 \quad \text{vel } C = \tfrac{\alpha(\lambda-1)}{4} A.$$

Duae ergo aequationes oriuntur

altera $A x^{\alpha+1} ddz + (\alpha+1) A x^{\alpha} dx dz + C x^{\alpha-1} z dx^2 = 0$

altera $A x^{\lambda} ddz + \frac{1}{2}(\alpha+\lambda+1) A x^{\lambda-1} dx dz + \frac{1}{4}\alpha(\lambda-1) A x^{\lambda-2} z dx^2 = 0$

quarum vtraque per $2\,x\,dz + \alpha\,z\,dx$ multiplicata fit integrabilis; illius enim integrale erit:

$$A x^{\alpha+2} dz^2 + \alpha A x^{\alpha+1} z\,dx\,dz + C x^{\alpha} zz\,dx^2 = E\,dx^2$$

huius vero

$$A x^{\lambda+1} dz^2 + \alpha A x^{\lambda} z\,dx\,dz + \tfrac{1}{4}\alpha\alpha A z^{\lambda-1} zz\,dx^2 = F\,dx^2.$$

XV. Summa ergo harum duarum aequationum eodem factore integrabilis reddetur. Scilicet haec aequatio:

$$(A x^{\alpha+1} + D x^{\lambda})\,ddz + ((\alpha+1) A x^{\alpha} + \tfrac{1}{2}(\alpha+\lambda+1) D x^{\lambda-1})\,dx\,dz$$
$$+ (C x^{\alpha-1} + \tfrac{1}{4}\alpha(\lambda-1) D x^{\lambda-2})\,z\,dx^2 = 0$$

multiplicata per $2\,x\,dz + \alpha\,z\,dx$ integrale praebet:

$$(A x^{\alpha+2} + D x^{\lambda+1})\,dz^2 + \alpha(A x^{\alpha+1} + D x^{\lambda})\,z\,dx\,dz$$
$$+ (C x^{\alpha} + \tfrac{1}{4}\alpha\alpha D x^{\lambda-1})\,zz\,dx^2 = E\,dx^2$$

quod iſto modo repraeſentari poteſt:

$$(A x^{\alpha} + D x^{\lambda-1})(x\,dz + \tfrac{1}{2}\alpha z\,dx)^2 = dx^2((\tfrac{1}{4}\alpha\alpha A - C) x^{\alpha} zz + E)$$

ita vt ſit

$$x\,dz + \tfrac{1}{2}\alpha z\,dx = \tfrac{1}{2}dx \sqrt{\frac{4E + (\alpha\alpha A - 4C) x^{\alpha} zz}{A x^{\alpha} + D x^{\lambda-1}}}.$$

Ponatur

$x^{\alpha} zz = v$ erit $x^{\alpha-1} z(2\,x\,dz + \alpha\,z\,dx) = 2\,v\,dv$,

ideoque

$$2\,x\,dz + \alpha\,z\,dx = \frac{dv}{x^{\alpha-1} z} = \frac{2\,dv}{x^{\frac{1}{2}\alpha-1}};$$ vnde fit

$$2\,x^{1-\frac{1}{2}\alpha}\,dv = dx \sqrt{\frac{4E + (\alpha\alpha A - 4C) vv}{A x^{\alpha} + D x^{\lambda-1}}}$$ ſeu

2 dv

$$\frac{2\,dv}{\sqrt{(4E+(\alpha\alpha A-4C)vv)}}=\frac{x^{\frac{1}{2}\alpha-1}dx}{\sqrt{(Ax^{\alpha}+Dx^{\lambda-1})}}$$

XVI. Quo nunc hanc aequationem ad noſtram formam perducamus, quod duplici modo fieri poteſt, ponamus primo $\lambda=\alpha$, vt facta diuiſione per x^{α} habeatur haec aequatio:

$$(D+Ax)ddz+((\alpha+\tfrac{1}{2})D+(\alpha+1)Ax)\frac{dxdz}{x}$$
$$+(\tfrac{1}{4}\alpha(\alpha-1)D+Cx)\frac{zdx^2}{xx}=0$$

quae multiplicata per $x^{\alpha}(2xdz+\alpha zdx)$ fit integrabilis, exiſtente integrali poſito

$$x^{\alpha}zz=vv \quad \text{ſeu} \quad z=x^{-\frac{1}{2}\alpha}v$$

$$\frac{2\,dv}{\sqrt{(4E+(\alpha\alpha A-4C)vv)}}=\frac{x^{\frac{1}{2}\alpha-1}dx}{\sqrt{x^{\alpha-1}(D+Ax)}}=\frac{dx}{\sqrt{x(D+Ax)}}$$

Sit iam $D=a$; $A=b$; $(\alpha+\frac{1}{2})a=c$, ſeu $\alpha=\frac{c}{a}-\frac{1}{2}$, et $C=g$ et prodibit haec aequatio:

$$(a+bx)ddz+(c+\frac{b(a+2c)}{2a}x)\frac{dxdz}{x}+(\frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}+gz)\frac{zdx^2}{xx}=0$$

ita vt pro forma propoſita ſit

$$e=\frac{b(a+2c)}{2a} \quad \text{et} \quad f=\frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$$

huiusque aequationis poſito $z=x^{\frac{1}{4}-\frac{c}{2a}}v$ integrale erit:

$$\frac{2\,dv}{\sqrt{(4E+(\frac{b(2c-a)^2}{4aa}-4g)vv)}}=\frac{dx}{\sqrt{x(a+bx)}}$$

XVII. Statuatur nunc ſecundo $\lambda=\alpha+2$, vt facta diuiſione per $x^{\alpha+1}$ oriatur haec aequatio:

S 2 (A + D

$$(A + Dx)\,ddz + ((\alpha + 1)A + (\alpha + \tfrac{3}{2})Dx)\frac{dxdz}{x}$$
$$+ (C + \tfrac{1}{4}\alpha(\alpha + 1)Dx)\frac{zdx^2}{xx} = 0$$

quae multiplicata per $x^{\alpha+1}(2xdz + \alpha zdx)$, poſito $x^\alpha zz = vv$ ſeu $z = x^{-\frac{1}{2}\alpha}v$ habebit integrale:

$$\frac{2dv}{\sqrt{(4E + (\alpha\alpha A - 4C)vv)}} = \frac{x^{\frac{1}{2}\alpha - 1}dx}{\sqrt{x^\alpha(A + Dx)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(A + Dx)}}.$$

Sit iam $A = a$; $D = b$; $(\alpha + 1)a = c$, ſeu $\alpha = \frac{c}{a} - 1$ et $C = f$ vt obtineatur haec aequatio:

$$(a + bx)ddz + (c + \frac{b(a+2c)}{2a}x)\frac{dxdz}{x} + (f + \frac{bc(c-a)}{4aa}x)\frac{zdx^2}{xx} = 0$$

et pro forma propoſita ſit

$$e = \frac{b(a+2c)}{2a} \quad \text{et} \quad g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$$

cuius poſito $z = x^{\frac{1}{2} - \frac{c}{2a}}v$ integrale eſt:

$$\frac{2dv}{\sqrt{(4E + (\frac{(c-a)^2}{a} - 4f)vv)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(a + bx)}}.$$

XVIII. Non ſolum autem quoties ipſa aequatio propoſita:

$$(a + bx)ddz + (c + ex)\frac{dxdz}{x} + (f + gx)\frac{zdx^2}{xx} = 0$$

in altera harum formarum eſt contenta, quod euenit ſi fuerit vel $e = \frac{b(a+2c)}{2a}$ et $f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$

vel $e = \frac{b(a+2c)}{2a}$ et $g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$

integrationem admittit, ſed etiam quoties eadem transformata in alterutra continetur. Transformatio autem vt ſupra §. 8. vidimus fit ſubſtitutione

$z =$

$$z = (a + bx)^{1 + \frac{c}{a} - \frac{e}{b}} v,$$

vnde oritur

$$(a + bx) ddv + (c + \varepsilon x)\frac{dx\,dv}{x} + (f + \eta x)\frac{v\,dx^2}{xx} = 0$$

exiſtente

$$\varepsilon = \frac{2b(a+c)}{a} - e \text{ et } \eta = g - \frac{ce}{a} + \frac{bc(a+c)}{aa}.$$

Haec autem ponendo $v = x^n s$, ob

$$\frac{dv}{v} = \frac{n\,dx}{x} + \frac{ds}{s} \text{ et } \frac{ddv}{v} = \frac{n(n-1)dx^2}{xx} + \frac{2n\,dx\,ds}{xs} - \frac{dds}{s},$$

transformatur in hanc:

$$\left.\begin{aligned} (a+bx)\frac{dds}{s} + 2n(a+bx)\frac{dx\,ds}{xs} + n(n-1)(a+bx)\frac{dx^2}{xx} \\ + (c+\varepsilon x)\frac{dx\,ds}{xs} + n(c+\varepsilon x)\frac{dx^2}{xx} \\ + (f+\eta x)\frac{dx^2}{xx} \end{aligned}\right\} = 0$$

vnde hi bini caſus integrabiles eruuntur.

Primus ſi $D = a$; $A = b$; $(\alpha + \frac{1}{2})a = 2na + c$

$$(\alpha + 1)b = 2nb + \frac{2b(a+c)}{a} - e$$

$$\tfrac{1}{4}\alpha(\alpha - 1)a = n(n-1)a + nc + f$$

$$C = n(n-1)b + \frac{2nb(a+c)}{a} - ne + g - \frac{ce}{a} + \frac{bc(a+c)}{aa}$$

hincque $\alpha = 2n - \frac{1}{2} + \frac{c}{a}$, et $e = \frac{3}{2}b + \frac{bc}{a} = \frac{b(3a+2c)}{2a}$

atque $(n - \frac{1}{2} + \frac{c}{2a})(n - \frac{3}{4} + \frac{c}{2a})a = n(n-1)a + nc + f$

vnde $f = \frac{cc}{4a} - \frac{c}{8} + \frac{3a}{16} = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$.

Alter caſus his conditionibus continetur:

$A = a$; $D = b$; $(\alpha + 1)a = 2na + c$; $(\alpha + \frac{3}{2})b = 2nb + \frac{2b(a+c)}{a} - e$

$C = n(n-1)a + nc + f$;

$\frac{1}{4}\alpha(\alpha+1)b = n(n-1)b + \frac{2nb(a+c)}{a} - ne + g - \frac{ce}{a} + \frac{ba(a+c)}{aa}$

vnde fit $\alpha = 2n - 1 + \frac{c}{a}$; $e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$ atque

$$g = \frac{bc}{4a} + \frac{bcc}{4aa} = \frac{bc(a+c)}{4aa}$$

vbi conſtat numerum n nihil conferre.

XIX. Quatuor ergo hinc nacti ſumus caſus integrabiles, qui ſunt:

$$1^\circ.\ e = \frac{b(a+2c)}{2a};\quad f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$$

$$2^\circ.\ e = \frac{b(a+2c)}{2a};\quad g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$$

$$3^\circ.\ e = \frac{b(3a+2c)}{2a};\quad f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{4aa}$$

$$4^\circ.\ e = \frac{b(3a+2c)}{2a};\quad g = \frac{bc(a+c)}{4a}$$

quibus adeo integrale completum exhibuimus. Videamus ergo quomodo hi caſus ſe habeant ad conditionem, quam ſupra ex ſerie deduximus, vtrum in ea contineantur nec ne?

Pro primo igitur habemus

$$bc - ae = \frac{-ab}{2};\quad b - e = \frac{b(a-2c)}{2a}$$

et $\sqrt{((a-c)^2 - 4af)} = \pm\frac{a}{2}$, vnde haec formula

$$-\tfrac{1}{4} \mp \tfrac{1}{4} + \frac{\sqrt{(bb(a-2c)^2 - 16aabg)}}{4aa}$$

numerus integer eſſe deberet.

Pro ſecundo eſt

$$bc - ae = \frac{-ab}{2};\ \text{et}\ \sqrt{((b-e)^2 - 4bg)} = \pm\frac{b}{2},$$

ergo haec formula

$$-\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{4} - \frac{\sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a}$$

numerus integer eſſe deberet.

Pro

Pro tertio eſt

$$bc - ae = \frac{-3ab}{2};\ b - e = \frac{-b(a+2c)}{2a},\ \text{et}$$

$$\sqrt{((a-c)^2 - 4af)} = \pm \frac{a}{2};$$

vnde haec formula

$$-\frac{3}{4} \mp \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{(bb(a+2c)^2 - 16aabg)}}{4ab}$$

numerus integer eſſe deberet.

Pro quarto eſt

$$bc - ae = \frac{-3ab}{2}\ \text{et}\ \sqrt{((b-e)^2 - 4bg)} = \pm \frac{b}{2}$$

vnde haec formula

$$-\frac{3}{4} \mp \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{((a-c)^2 - 4af)}}{2a}$$

numerus integer eſſe deberet.

Vnde perſpicitur hos quatuor caſus in ſuperiori conditione non contineri, ideoque hinc omnino nouos caſus integrabilitatis erui.

XX. Cum igitur hi caſus, quibus integrale completum eruimus, omnino diſcrepent ab iis, quibus ſupra integrale particulare exhibuimus, iuuabit oſtendiſſe, quomodo etiam his caſibus integrale completum obtineri poſſit; quod ſequenti modo facillime praeſtari videtur.

Si aequationi

$$P\,ddz + Q\,dx\,dz + R\,z\,dx^2 = 0$$

ſatisfaciat valor $z = V$, vt ſit

$$P\,ddV + Q\,dx\,dV + R\,V\,dx^2 = 0,$$

illa aequatio reddetur integrabilis ducta in $\frac{V}{P(V\,dz - z\,dV)}$.

Poſita

Poſito enim

$$\int \frac{P V d d z + Q V d x d z + R V z d x^2}{P(V d z - z d V)} = S d x, \text{ erit}$$

$$S d x - l P(V d z - z d V) = \int \frac{Q V d x d z + R V z d x^2 - V d P d z + P z d d V + z d V d P}{P(V d z - z d V)}$$

$$= \int \frac{Q d x}{P} - l P + \int \frac{z(P d d V + Q d x d V + R V d x^2)}{P(V d z - z d V)}.$$

At $P d d V + Q d x d V + R V d x^2 = 0$,

ideoque habetur:

$$S d x = l(V d z - z d V) + \int \frac{Q d x}{P} + \text{Conſt.} = \text{Conſt.}$$

vnde erit

$$V d z - z d V = C \varkappa^{\frac{-\int Q d x}{P}} d x \text{ et}$$

$$z = C V \int \frac{d x}{V V} \varkappa^{\frac{-\int Q d x}{P}}$$

quod eſt integrale completum ex particulari $z = V$ erutum.

XXI. Quoniam vtriusque generis caſus ex aequatione propoſita eliciuntur, ſi ea per formam $2 p d z + q d z d x$ multiplicata integrabilis efficiatur, poſito $p = u u$, vt ſit

$$q = \frac{2 u u (c + e x)}{x(a + b x)} - \frac{2 u d u}{d x},$$

erit aequatio integralis:

$$u u d z^2 + q z d x d z + \left(C \varkappa^{\frac{\int q d x}{u u}} + q q\right) \frac{z z d x^2}{4 u u} = A d x^2$$

vbi eſt

$$\varkappa^{\frac{\int q d x}{u u}} = \frac{x^{\frac{2c}{a}} (a + b x)^{\frac{2(ae - bc)}{ab}}}{u u}$$

ideo-

ideoque

$$(udz+\frac{qzdx}{2u})^2 = A\,dx^2 - \frac{Cx^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}}zzdx^4}{4u^4}$$

verum quantitatem u ex hac aequatione elici oportet.

$$\frac{ddu}{dx} - \frac{(c+ex)du}{x(a+bx)} + \frac{(f+gx)udx}{xx(a+bx)} + \frac{(ac+2bcx+bexx)udx}{xx(a+bx)^2}$$
$$= \frac{Cx^{\frac{2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}}dx}{4u^3}$$

et prioris quidem generis caſus hinc ſumta conſtante $C=0$ ſunt deducti. Verum haec aequatio poſito

$$u = x^{\frac{c}{a}}(a+bx)^{\frac{ae-bc}{ab}}v \text{ abit in hanc}$$

$$\frac{Cx^{\frac{-2c}{a}}(a+bx)^{\frac{2(bc-ae)}{ab}}dx^2}{4v^3} = ddv + \frac{(c+ex)dxdv}{x(a+bx)} + \frac{(f+gx)vdx^2}{xx(a+bx)}$$

cuius applicatio eſt facilior, vnde ſi $C=0$, quantitas v ſatisfacere debet huic aequationi

$$(a+bx)ddv + \frac{(c+ex)dxdv}{x} + \frac{(f+gx)vdx^2}{xx} = 0$$

ita vt hinc ex valore particulari obtineatur completus. At ſi ponamus $u = x^m(a+bx)^n$ erit

$$\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n} = \frac{m(m-1)}{xx} + \frac{(f-mc+(g-me+2mnb)x)}{xx(a+bx)}$$
$$+ \frac{a(c+(2-n)bcx+(n-1)(nbb-be)xx}{xx(a+bx)^2}$$

ideoque tam exponentes m et n cum conſtante C, quam relatio coefficientium a, b, c, e, f, g ex hac aequatione definiri debet

$$\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m+2}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2} = m(m-1)(a+bx)^2$$

$$+(a+bx)(f-mc+(g-me+2mnb)x)+ac(2-n)bcx$$
$$+(n-1)(nb-e)bxx.$$

XXII. Hinc plures caſus reſultant, quos euolvamus:

Primus. Si exponens

$$\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2=2 \text{ ſeu } n=\frac{ae-bc}{2ab}$$

quo eſſe debet

$$\frac{2c}{a}-4m+2=0 \text{ ſeu } m=\frac{a+c}{2a},$$

vt habeatur

$$\tfrac{1}{4}C(a+bx)^2=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)^2+(f-\frac{c(a+c)}{2a}+(g-\frac{bc(a+c)}{2aa})x)(a+bx)$$
$$+ac+(2-n)bcx+(n-1)(nb-e)bxx$$

vbi poſtremum membrum per $a+bx$ diuiſibile eſſe debet, id quod duplici modo fieri poteſt.

1°. Vel eſt $n=1$; ideoque $e=\frac{2ab+bc}{a}=\frac{b(2a+c)}{a}$,

ſicque erit

$$\tfrac{1}{4}C(a+bx)=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)+f-\frac{c(a+c)}{2a}+(g-\frac{bc(a+c)}{2aa})x+c$$

vnde fit

$$\tfrac{1}{4}Ca=\frac{cc-aa}{4a}+f+\frac{c(a-c)}{2a}=f-\frac{(a-c)^2}{4a}$$

et $\tfrac{1}{4}Cb=\frac{b(cc-aa)}{4aa}+g-\frac{bc(a+c)}{2aa}=g-\frac{b(a+c)^2}{4aa}$.

Ergo

$$bf-ag-\frac{b(a-c)^2}{4a}+\frac{b(a+c)^2}{4a}=0 \text{ ſeu } g=\frac{bf}{a}+\frac{bc}{a}=\frac{b(c+)^2}{a}$$

et $\frac{a}{2u}=\frac{u(c+ex)}{x(a+bx)}-\frac{du}{dx}=x^{\frac{c-a}{2a}}(c+ex)-\frac{(a+c)}{2a}x^{\frac{c-a}{2a}}(a+bx)-bx^{\frac{a+c}{2a}}$

ſeu $\frac{q}{2u}=\frac{a(c-a)+b(a+c)x}{2a}x^{\frac{c-c}{2a}}$. Conſequenter aequatio integralis

$(x^{\frac{a+c}{2a}}$

$(x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)dz+\frac{a(c-a)+b(a+c)x}{2a}x^{\frac{c-a}{2a}}zdx)^2 = Adx^2$
$-\left(\frac{f}{a}-\frac{(a-c)^2}{4aa}\right)\frac{zzdx^2}{xx}$.

2°. Vel eſt $n=\frac{ae-bc}{ab}=\frac{ae-bc}{2ab}$, ideoque $e=\frac{bc}{a}$ et $n=0$; vnde fit

$\frac{1}{4}C(a+bx)=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)+f-\frac{c(a+c)}{2a}+(g-\frac{bc(a+c)}{2aa})x+c+\frac{bc}{a}x$

ergo $\frac{1}{4}Ca=\frac{cc-aa}{4a}+f+\frac{c(a-c)}{2a}=f-\frac{(a-c)^2}{4a}$

et $\frac{1}{4}Cb=\frac{b(cc-aa)}{4aa}+g+\frac{bc(a-c)}{2aa}=g-\frac{b(a-c)^2}{4aa}$

vnde colligitur $bf=ag$ ſeu $g=\frac{bf}{a}$; qui eſt caſus, quo aequatio propoſita per $a+bx$ diuiſibilis exiſtit, ſicque nihil habet difficultatis.

XXIII. *Secundus* caſus eſt quo

$\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2=1$ et $\frac{2c}{a}-4m+2=0$

ideoque $m=\frac{a+c}{2a}$ et $n=\frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$, ita vt habeamus

$\frac{1}{4}C(a+bx)=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)^2+(f-\frac{c(a+c)}{2a}+(g+\frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa})x(a+bx)$
$+ac+(2-n)bcx+(n-1)(nb-e)bxx$

qui caſus iterum in duos diſpertitur:

1°. Vel eſt $n=1$, ideoque $2ae-2bc=3ab$ et $e=\frac{3ab+2bc}{2a}=\frac{b(3a+2c)}{2a}$

vnde fit

$\frac{1}{4}C=\frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)+f+\frac{c(a-c)}{2a}+gx+\frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa}x$

hincque

$\frac{1}{4}C=\frac{cc-aa}{4a}+f+\frac{c(a-c)}{2a}=f-\frac{(a-c)^2}{4aa}$

et $0 = \frac{b(cc-aa)}{4aa} + g + \frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa}$ ſeu $g = \frac{bc(a+c)}{4aa}$

qui eſt caſus quartus in §. 19.

2°. Vel eſt $n = \frac{ae-bc}{ab} = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$, ideoque $e = \frac{b(a+2c)}{2a}$

et $n = \frac{1}{2}$; vnde aequatio per $a+bx$ diuiſa fit

$$\tfrac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4aa}(a+bx) + f + \frac{c(a-c)}{2a} + \left(g + \frac{b(a+c)(a-2c)}{4aa}\right)x + \frac{bc}{2a}x$$

ita vt ſit

$$\tfrac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4a} + f + \frac{c(a-c)}{2a} = f - \frac{(a-c)^2}{4a}$$

et $\frac{b(cc-a)}{4aa} + \frac{bc}{2a} + \frac{b(+c)(a-2c)}{4aa} + g = 0$ ſeu $g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$

qui erat caſus 2°. in §. 19.

XXIV. *Tertius* caſus eſt quo

$$\frac{2(ae-bc)}{ab} - 4n + 2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{2c}{a} - 4m + 2 = 1$$

ideoque $m = \frac{a+2c}{4a}$ et $n = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$

ſicque habebimus:

$$\tfrac{1}{4}Cx(a+bx) = \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16aa}(a+bx)^2 + \left(f - \frac{c(a+2c)}{4a} + \left(g + \frac{b(a+2c)(a-c)}{8aa}\right)x\right)(a+bx)$$
$$+ac + (2-n)bcx + (n-1)(nb-1)bxx$$

cuius vltimum membrum duplici modo per $a+bx$ redditur diuiſibile.

1°. Si $n = 1 = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$; ideoque $e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$

vnde oritur

$$\tfrac{1}{4}Cx = \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16aa}(a+bx) + f + \frac{c(2a-2c)}{4a} + gx + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa}x$$

ita vt fieri oporteat

$$\frac{(a+2c)(2c-3a)}{16a} + f - \frac{c(2c-3a)}{4a} = 0 \text{ ſeu } f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$$

et

et $\frac{1}{4}Cx = \frac{b(a+2c)(2c-3a)}{16aa} + g + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa} = g - \frac{b(a+2c)^2}{16aa}$

qui erat caſus 3° in §. 19.

2°. Si $n = \frac{ae-bc}{ab} = \frac{ab+2ae-2bc}{4ab}$ ſeu $e = \frac{b(a+2c)}{2a}$ et $n = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4}Cx = \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16aa}(a+bx) + f - \frac{c(a+2c)}{4a} + gx + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa}x$$
$$+ c + \frac{bc}{2a}x$$

ideoque

$$f + \frac{(a+2c)(2c-3a)}{16a} + \frac{c(3a-2c)}{4a} = 0 \text{ ſeu } f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$$

et $\frac{1}{4}C = \frac{b(a+2c)(2c-3a)}{16aa} + g + \frac{b(a+2c)(a-2c)}{8aa} + \frac{bc}{2a} = g - \frac{b(a-2c)}{16aa}$

qui erat caſus 1°. in §. 19.

XXV. *Quartus* caſus eſt quo

$$\frac{2(ae-bc)}{ab} - 4n + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{2c}{a} - 4m + 2 = 0$$

ideoque $m = \frac{a+c}{2a}$ et $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$, vt habeamus:

$$\frac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4aa}(a+bx)^2 + (a+bx)\left(f - \frac{c(a+c)}{2a} + \left(g + \frac{b(aa-cc)}{2aa}\right)x\right)$$
$$+ ac + \frac{(3ab-ae+bc)}{2a}cx - \frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa}xx$$

vnde ſingulas poteſtates ſeorſim tollendo colligimus

$$\frac{bb(cc-aa)}{4aa} + bg + \frac{bb(aa-cc)}{2aa} - \frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa} = 0$$
$$\frac{b(cc-aa)}{2aa} + bf - \frac{bc(a+c)}{2a} + ag + \frac{b(aa-cc)}{2aa} + \frac{c(3ab-ae+bc)}{2a} = 0$$

ex illa fit $g = \frac{e(e-2b)}{4b}$ ex hac vero $bf + ag = \frac{c(e-2b)}{2}$ idcoque $f = \frac{(e-2b)(2bc-ae)}{4bb}$, quae ſunt binae conditiones; tum vero capi debebit

$$\frac{1}{4}C = \frac{cc-aa}{4} + af - \frac{c(a+c)}{2} + ac = af - \frac{1}{4}(a-c)^2.$$

XXVI. *Quintus* caſus quo

$\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2=0$; et $\frac{2c}{a}-4m+2=1$, ideoque

$m=\frac{2c+a}{4a}$ et $n=\frac{ab+ae-bc}{2ab}$ vt habeamus:

$$\tfrac{1}{4}Cx=\frac{(2c+a)(2c-3a)}{16aa}(a+bx)^2+(a+bx)\left(f-\frac{c(2c+a)}{2a}+\left(g+\frac{b(a-c)(2c+a)}{4aa}\right)x\right)$$
$$+ac+\frac{3ab-ae+bc}{2a}cx-\frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa}xx$$

hincque:

$$\frac{bb(2c+a)(2c-3a)}{16aa}+bg+\frac{bc(a-c)(2c+a)}{4aa}-\frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa}=0$$

ſeu $g=\frac{(b-2e)(3b-2e)}{16b}$

$\frac{(2c+a)(2c-3a)}{16}+af-\frac{c(2c+a)}{4}+ac=0$ ſeu $f=\frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$ et

$\tfrac{1}{4}C=\frac{(ab-ae+bc)^2}{4ab}$.

XXVII. *Sextus* caſus quo

$\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n+2=0$ et $\frac{2c}{a}-4m+2=2$ ideoque

$m=\frac{c}{2a}$ et $n=\frac{ab+ae-bc}{2ab}$ vt habeamus:

$$\tfrac{1}{4}Cxx=\frac{c(c-2a)}{4aa}(a+bx)^2+(a+bx)\left(f-\frac{cc}{2a}+\left(g+\frac{bc(a-c)}{2aa}\right)x\right)$$
$$+ac+\frac{3ab-ae+bc}{2a}cx-\frac{(ab-ae+bc)(ab-ae-bc)}{4aa}xx$$

vnde fieri oportet:

$\frac{c(c-2a)}{4}+af-\frac{cc}{2}+ac=0$ ſeu $f=\frac{c(c-2a)}{4a}$

$\frac{bc(c-2a)}{2a}+bf-\frac{bcc}{2a}+ag+\frac{bc(a-c)}{2a}+\frac{3ab-ae+bc}{2a}c=0$

ſeu $g=\frac{-c(4ab-2ae+bc)}{4aa}$ atque

$\tfrac{1}{4}C=\frac{-bc(4ab-2ae+bc)}{4aa}-\frac{(a-e)^2}{4}=bg-\tfrac{1}{4}(b-e)^2$.

XXVIII. Pro his autem caſibus omnibus cum ſit $u=x^m(a+bx)^n$

erit

erit

$$\frac{q}{2u}=x^{m-1}(a+bx)^{n-1}(c+ex)-mx^{m-1}(a+bx)^{n}-nbx^{m}(a+bx)^{n-1}$$

ſeu $\frac{q}{2u}=x^{m-1}(a+bx)^{n-1}(c-ma+(e-(m+n)b)x)$

vnde aequatio integralis colligitur:

$$x^{2m}(a+bx)^{2n}\left(dz+\frac{c-ma+(e-(m+n)b)x}{x(a+bx)}zdx\right)^2=Adx^2$$

$$-\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n}zzdx^2$$

vel erit $dz+\frac{c-ma+(e-(m+n)b)x}{x(a+bx)}zdx=$

$$\frac{dx\sqrt{(A-\tfrac{1}{4}Cx^{\frac{2c}{a}-4m}(a+bx)^{\frac{2(ae-bc)}{ab}-4n}zz)}}{x^m(a+bx)^n}.$$

Quare pro caſibus inuentis integralia aequationis propoſitae

$$(a+bx)ddz+(c+ex)\frac{dxdz}{x}+\frac{(f+gx)zdx^2}{xx}=0$$

ſequenti modo ſe habebunt.

Caſus I.

$m=\frac{a+c}{2a}$; $n=1$; $e=\frac{b(2a+c)}{a}$; $g=\frac{b(c+f)}{a}$ et $\tfrac{1}{4}C=\frac{f}{a}-\frac{(a-c)^2}{4aa}$.

Integrale igitur erit

$$dz+\frac{a(c-a)+(a+c)x}{2ax(a+bx)}zdx=$$

$$\frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)}\sqrt{\left(A-\frac{(4af-(a-c)^2)}{4aaxx}zz\right)}.$$

Caſus II.

$e=\frac{bc}{a}$; $g=\frac{bf}{a}$; $m=\frac{a+c}{2a}$; $n=0$ et $\tfrac{1}{4}C=\frac{4af-(a-c)^2}{4aa}$.

Inte-

Integrale ergo erit

$$dz + \frac{a(c-a)+b(c-a)x}{2ax(a+bx)} z\,dx =$$

$$\frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}} \sqrt{\left(A - \frac{(4af-(a-c)^2)}{4aaxx} zz\right)} \text{ ſiue}$$

$$dz + \frac{(c-a)z\,dx}{2ax} = \frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}} \sqrt{\left(A + \frac{((a-c)^2-4af)}{4aaxx} zz\right)}.$$

Caſus III.

$e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$; $g = \frac{bc(a+c)}{4aa}$; $m = \frac{a+c}{2a}$; $n = 1$ et $\frac{1}{4}C = \frac{4af-(a-c)^2}{4a}$,
vnde integrale eſt

$$dz + \frac{a(c-a)+bcx}{2ax(a+bx)} z\,dx = \frac{dx}{x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)} \sqrt{\left(A + \frac{((a-c)^2-4af)zz}{4axx(a+bx)}\right)}.$$

Caſus IV.

$e = \frac{b(a+2c)}{2a}$; $g = \frac{bc(c-a)}{4aa}$; $m = \frac{a+c}{2a}$; $n = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}C = \frac{4af-(a-c)^2}{4a}$;
vnde integrale eſt

$$dz + \frac{(c-a)z\,dx}{2ax} = \frac{dz}{x^{\frac{a+c}{2a}}(a+bx)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\left(A + \frac{((a-c)^2-4af)zz}{4axx(a+bx)}\right)}.$$

Caſus V.

$e = \frac{b(3a+2c)}{2a}$; $g = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$; $m = \frac{a+2c}{4a}$; $n = 1$ et $\frac{1}{4}C = g - \frac{b(a+2c)^2}{16aa}$;
vnde integrale erit

$$dz + \frac{a(2c-a)+b(2c+a)x}{4ax(a+bx)} z\,dx = \frac{dx}{x^{\frac{a+2c}{4a}}(a+bx)} \sqrt{\left(A + \frac{(b(a+2c)^2-16aag)zz}{16aax(a+bx)}\right)}$$

Caſus

Caſus VI.

$e = \frac{b(a+2c)}{2a}$; $f = \frac{(2c-a)(2c-a)}{16a}$; $m = \frac{a+2c}{4a}$; $n = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}C = g - \frac{b(a-2c)^2}{16aa}$,

vnde integrale erit

$$dz + \frac{(2c-a)zdx}{4ax} = \frac{dx}{x^{\frac{a+2c}{4a}}(a+bx)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\left(A + \frac{(b(a-2c)^2 - 16aag)zz}{16aax(a+bx)}\right)}$$

Caſus VII.

$f = \frac{(e-2b)(2bc-ae)}{4bb}$; $g = \frac{e(e-2b)}{4b}$; $m = \frac{a+c}{2a}$; $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$

et $\frac{1}{4}C = af - \frac{1}{4}(a-c)^2$,

vnde integrale erit

$$dz + \frac{c-a+(e-2b)x}{2x(a+bx)}zdx = \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}\sqrt{\left(A + \frac{((a-c)^2-4af)zz}{4xx(a+bx)^2}\right)}.$$

Caſus VIII.

$f = \frac{(2c-a)(2c-3a)}{16a}$; $g = \frac{(b-2e)(3b-2e)}{16b}$; $m = \frac{2c+a}{4a}$; $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$

et $\frac{1}{4}C = \frac{(ab-ae+bc)^2}{4ab}$;

vnde integrale erit

$$dz + \frac{2c-a+(2e-3b)x}{4x(a+bx)}zdx = \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}\sqrt{\left(A - \frac{(ab-ae+bc)^2zz}{4abx(a+bx)^2}\right)}$$

Caſus IX.

$f = \frac{c(c-2a)}{4a}$; $g = \frac{-c(4ab-2ae+bc)}{4aa}$; $m = \frac{c}{2a}$; $n = \frac{ab+ae-bc}{2ab}$

et $\frac{1}{4}C = bg - \frac{1}{4}(b-e)^2$

vnde integrale

$$dz + \frac{c+(e-b)x}{2x(a+bx)}zdx = \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}\sqrt{\left(A + \frac{((b-e)^2-4bg)zz}{4(a+bx)^2}\right)}.$$

XXIX. Praeter hos vero nouem caſus, quibus binae relationes inter coefficientes praeſcribuntur, initio innumerabiles caſus integrabiles duplici modo eruimus. Altero priori §. VI. integrale algebraicum huius formae:

$$z = Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + Dx^{n+3} + \text{etc.}$$

aſſignari poteſt, ſi denotante i numerum integrum poſitiuum quemcunque fuerit

$$n(n-1)a + nc + f = 0 \quad \text{et}$$

$$(n+i)(n+i-1)b + (n+i)e + g = 0.$$

Altero vero poſteriori §. VIII. Integrale huius eſt formae

$$z = (a+bx)^{\frac{ab - ae + bc}{ab}} (Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} + \text{etc.})$$

ſi fuerit

$$n(n-1)a + nc + f = 0 \quad \text{et}$$

$$(n+i)(n+i-1)b + (n+i)\left(\frac{2bc}{a} + 2b - e\right) + g + \frac{bc}{a} + \frac{bcc}{aa} - \frac{ce}{a} = 0.$$

Quae integralia etſi ſunt particularia, tamen ex iis completa facile determinantur.

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS ANALYTICI.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Inſigne Problema Analyticum, cuius ſolutionem heic exponere conſtitui, idem eſt, quod ab Illuſtr. *Eulero* in Tomo XVI. Comment. pag. 6. ita propoſitum habetur:

Propoſitis duabus variabilibus t *et* u, *earum ſex inuenire functiones* l, m, n *et* λ, μ, ν *ita comparatas, vt ſex ſequentibus conditionibus ſatisfiat:*

I°. $(\frac{dl}{du}) = (\frac{d\lambda}{dt})$; II°. $(\frac{dm}{du}) = (\frac{d\mu}{dt})$; III°. $(\frac{dn}{du}) = (\frac{d\nu}{dt})$;
IV°. $ll + mm + nn = 1$ V°. $\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$;
VI^{to} $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$.

Quamuis enim ab Illuſtr. *Eulero* huius Problematis ſolutio elegantiſſima iam ſit allata, tamen praeſentem hac occaſione proponendam, aliquam attentionem mereri exiſtimo, quod non ſolum directa ſit, ſed etiam, quod vix ſuſpicari liceret, ex principiis doctrinae ſphaericae deducta, quae tamen principia primo intuitu, cum hoc argumento, vix quicquam commune habere videntur. Antequam vero ipſam Problematis ſolutionem adferre licet, Lemmata quaedam e doctrina ſphaerica praemittenda erunt.

Lemma I.

Tab. I. Fig. 1. 2. Si in ſuperficie Sphaerae, tria dentur puncta A, B, D, quadrante circuli inter ſe diſtantia, et quartum quodcunque punctum F in eadem ſuperficie cum illis iungatur, arcubus circulorum maximorum AF, BF, DF; erit $\operatorname{coſ}.AF^2 + \operatorname{coſ}.BF^2 + \operatorname{coſ}.DF^2 = 1$.

Demonſtratio.

Fig. 2. Sit centrum Sphaerae in C et ductis radiis AC, BC, DC, ex puncto F in planum BCA demittatur perpendicularis FP, tum vero in rectas AC, BC, DC normales FN, FM, FO, iungantur autem MP, NP, CP. Erunt igitur coſinus arcuum AF, BF, DF reſpectiue aequales coſinubus angulorum ACF, BCF, DCF, quorum coſinus ſunt

$\frac{CN}{CF}$; $\frac{CM}{CF}$; $\frac{FP}{CF}\left(=\frac{CO}{CF}\right)$, eſt vero

$$CM^2 + CN^2 = CP^2 \text{ et } CP^2 + PF^2 = CF^2, \text{ hinc}$$

$$\operatorname{coſ}.AF^2 + \operatorname{coſ}.BF^2 + \operatorname{coſ}.DF^2 = \frac{CN^2 + CM^2 + PF^2}{CF^2} = 1.$$

Haec propoſitio quidem iam dudum cognita eſt, quum vero non ſuccurrat vbi eius demonſtratio allata ſit, ne quid deſiderari poſſet, eam hoc loco non praetereundam eſſe exiſtimaui.

Lemma II.

Fig. 3. 3. Datis vt ante tribus punctis A, B, D quadrante circuli inter ſe diſtantibus, ſi bina alia puncta

cta E, F vbicunque in ſuperficie Sphaerica aſſumantur, quae tam inter ſe, quam cum punctis A, B, D iungantur arcubus circulorum maximorum

E F, A E, B E, D E, A F, B F, D F, erit

$$\text{coſ.} EF = \text{coſ.} AE\, \text{coſ.} AF + \text{coſ.} BE\, \text{coſ.} BF + \text{coſ.} DE\, \text{coſ.} DF.$$

Demonſtratio.

Producantur arcus B E, B F vsque dum circulo maximo A D occurrant in M et N, eritque ex elementis Trigonometriae Sphaericae:

$$\text{coſ.} EF = \text{coſ.} AE\, \text{coſ.} AF + \text{ſin.} AE\, \text{ſin.} AF\, \text{coſ.} EAF,$$

quum autem ſit:

$$\text{coſ.} EAF = \text{coſ.} EAD\, \text{coſ.} FAD + \text{ſin.} EAD\, \text{ſin.} FAD$$

habebitur:

$$\text{coſ.} EF = \text{coſ.} AE\, \text{coſ.} AF + \text{ſin.} AE\, \text{ſin.} AF\, \text{coſ.} EAD\, \text{coſ.} FAD$$
$$+ \text{ſin.} AE\, \text{ſin.} AF\, \text{ſin.} EAD\, \text{ſin.} FAD.$$

Atqui eſt $\text{ſin.} AE\, \text{ſin.} EAD = \text{ſin.} EM = \text{coſ.} BE$

$\text{ſin.} AF\, \text{ſin.} FAD = \text{ſin.} FN = \text{coſ.} BF$,

tum vero $\text{ſin.} AE\, \text{coſ.} EAD = \text{coſ.} ED$

$\text{ſin.} AF\, \text{coſ.} FAD = \text{coſ.} FD$,

his igitur valoribus in expreſſione pro coſ. E F ſubſtitutis, fiet

$$\text{coſ.} EF = \text{coſ.} AE\, \text{coſ.} AF + \text{coſ.} BE\, \text{coſ.} BF + \text{coſ.} DE\, \text{coſ.} DF.$$

Coroll. I.

Hinc facile deducitur eſſe:

$$2\,\text{coſ.} FE = \text{ſin.} AE\, \text{ſin.} AF\, \text{ſin.} EAF + \text{ſin.} BE\, \text{ſin.} BF\, \text{ſin.} EBF$$
$$+ \text{ſin.} DE\, \text{ſin.} DF\, \text{ſin.} EDF.$$

Coroll. 2.

Si E F ſtatuatur aequalis quadranti circuli, fiet coſ. E F = o, ideoque pro hoc caſu

$$\text{coſ. AE coſ. AF} + \text{coſ. BE coſ. BF} + \text{coſ. DE coſ. DF} = 0.$$

Si puncta E et F coincidant, fit coſ. E F = 1, ideoque pro eo caſu

$$\text{coſ. AE}^2 + \text{coſ. BE}^2 + \text{coſ. DE}^2 = 1,$$

vti etiam in ſuperiori Lemmate demonſtrauimus. Sin vero puncta E, F ſemicirculo inter ſe diſtent, erit coſ. E F = − 1, ideoque

$$\text{coſ. AE coſ. AF} + \text{coſ. BE coſ. BF} + \text{coſ. DE coſ. DF} = -1,$$

quod etiam cum Lemmate primo apprime congruit, quia hoc in caſu

$$\text{coſ. AF} = -\text{coſ. AE}, \ \text{coſ. BF} = -\text{coſ. BE}, \ \text{coſ. DF} = -\text{coſ. DE}.$$

Scholion.

Demonſtratio quidem noſtra ad eum caſum quaſi reſtricta videtur, quo puncta E, F intra eundem octantem Sphaerae cadunt, at ſi intra diuerſos caderent, demonſtratio tamen aeque facile procedit. Ponamus exempli cauſſa F cadere in octantem Sphaerae proximom arcui A D adiacentem, eritque

$$\text{coſ. EAF} = \text{coſ. EAD coſ. FAD} - \text{ſin. EAD ſin. FAD}$$

hincque pro iſto caſu

$$\text{coſ. EF} = \text{coſ. AE coſ. AF} + \text{ſin. AE ſin. AF coſ. EAD coſ. FAD}$$
$$- \text{ſin. AE ſin. AF ſin. EAD ſin. FAD}.$$

Quum

Quum igitur ſit

$$ſin. AE\, coſ. EAD = coſ. ED$$
$$ſin. AF\, coſ. FAD = coſ. FD$$
$$ſin. AE\, ſin. EAD = ſin. EM = coſ. BE$$
$$ſin. AF\, ſin. FAD = ſin. FN = -coſ. BF$$

prodibit vt antea

$$coſ. EF = coſ. AE\, coſ. AF + coſ. BE\, coſ. BF + coſ. DE\, coſ. DF.$$

Lemma III.

4. Si ex puncto quocunque A in ſuperficie Sphaerica, ducantur ad tria puncta B, C, D in eodem circulo maximo ſita, arcus circulorum maximorum AB, AC, AD, erit Tab. I. Fig. 3.

$$coſ. AC\, ſin. BD = coſ. AD\, ſin. BC + coſ. AB\, ſin. CD,$$

tum vero

$$ſin. AC\, ſin. BD\, coſ. ACB = coſ. AB\, coſ. CD - coſ. AD\, coſ. BC.$$

Demonſtratio.

Quum ſit

$$coſ. AB = coſ. AC\, coſ. BC + ſin. AC\, ſin. BC\, coſ. ACB$$

atque

$$coſ. AD = coſ. AC\, coſ. DC - ſin. AC\, ſin. CD\, coſ. ACB$$

habebitur

$$coſ. AB\, ſin. CD + coſ. AD\, ſin. BC = coſ. AC (coſ. BC\, ſin. CD + coſ. CD\, ſin. BC)$$
$$= coſ. AC\, ſin. BD.$$

Eſt

Eſt vero quoque

$$\text{coſ. AB coſ. CD} - \text{coſ. AD coſ. BC} = \text{ſin. AC coſ. ACB}(\text{ſin. BC coſ. CD} + \text{coſ. BC ſin. CD})$$
$$= \text{ſin AC ſin. BD coſ. ACB}.$$

Coroll.

Caſu quo B D aequalis quadranti circuli, ideoque coſ. B D = o et ſin. B D = 1, fiet

$$\text{coſ. AC} = \text{coſ. AB ſin. CD} + \text{coſ. AD ſin. BC}$$

$$\text{ſin. AC coſ. ACB} = \text{coſ. AB coſ. CD} - \text{coſ. AD coſ. BC}.$$

5. His igitur praemonitis, nunc ipſam ſolutionem Problematis noſtri adgrediamur et primum quidem attentionem faciamus ad tres vltimas conditiones, quibus praeſcribitur, vt ſit

$$ll+mm+nn=1;\ \lambda\lambda+\mu\mu+\nu\nu=1 \text{ et } l\lambda+m\mu+n\nu=0.$$

Tab. I. Fig. 4. Si enim in ſuperficie Sphaerica data fuerint puncta A, B, D quadrante circuli inter ſe diſtantia, tum vero vbicunque in eadem ſuperficie bina alia aſſumantur puncta I, H arcu 90° inter ſe diſtantia et iungantur A I, B I, D I, A H, B H, D H, per Lemma noſtrum I^{mum} et Lemmatis II^{di} Coroll. 2^{dum} habebimus:

$$\text{coſ. AI}^2+\text{coſ. BI}^2+\text{coſ. DI}^2=1;\ \text{coſ. AH}^2+\text{coſ. BH}^2+\text{coſ. DH}^2=1;$$

$$\text{coſ. AI coſ. AH}+\text{coſ. BI coſ. BH}+\text{coſ. DI coſ. DH}=0,$$

ex quo iam patet litteras l, m, n commode repraeſentari poſſe per coſinus arcuum A I, B I, D I, atque λ, μ, ν per coſinus arcuum A H, B H, D H. Vt vero nunc indolem quantitatum l, m, n, λ, μ, ν talem

talem quoque eruamus, qua prioribus tribus conditionibus ſatisfiat, concipiamus ſitum proximum arcus I H, ex variabilitate quantitatum $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, ſeu arcuum A I, B I, D I, A H, B H, D H pendentem eſſe $i\,h$ et ſecet hic arcus priorem I H in puncto E, tum vero iungantur arcus A E, B E, D E. Per Lemm. autem III^{tii} Coroll. iam habebimus:

$$\begin{aligned}
&\text{coſ.}\,AI\,\text{ſin.}\,EH + \text{coſ.}\,AH\,\text{ſin.}\,EI = \text{coſ.}\,AE\\
&\text{coſ.}\,BI\,\text{ſin.}\,EH + \text{coſ.}\,BH\,\text{ſin.}\,EI = \text{coſ.}\,BE\\
&\text{coſ.}\,DI\,\text{ſin.}\,EH + \text{coſ.}\,DH\,\text{ſin.}\,EI = \text{coſ.}\,DE
\end{aligned}$$

nec non

$$\begin{aligned}
&\text{coſ.}\,AI\,\text{coſ}\,EH - \text{coſ.}\,AH\,\text{coſ.}\,EI = \text{ſin.}\,AE\,\text{coſ.}\,AEI\\
&\text{coſ.}\,BI\,\text{coſ.}\,EH - \text{coſ.}\,BH\,\text{coſ.}\,EI = \text{ſin.}\,BE\,\text{coſ.}\,BEI\\
&\text{coſ.}\,DI\,\text{coſ.}\,EH - \text{coſ.}\,DH\,\text{coſ.}\,EI = \text{ſin.}\,DE\,\text{coſ.}\,DEI.
\end{aligned}$$

Si igitur arcus EH dicatur ω, ideoque $EI = 90° - \omega$, tum vero

$$\text{coſ.}\,AE = p,\ \text{coſ.}\,BE = q,\ \text{coſ.}\,DE = r,$$

nunc has adipiſcemur aequationes:

$$l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = p;\ m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega = q;\ n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega = r$$

atque

$$l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega = \text{ſin.}\,AE\,\text{coſ.}\,AEI;\ m\,\text{coſ.}\,\omega - \mu\,\text{ſin.}\,\omega = \text{ſin.}\,BE\,\text{coſ.}\,BEI$$

$$n\,\text{coſ.}\,\omega - \nu\,\text{ſin.}\,\omega = \text{ſin.}\,DE\,\text{coſ.}\,DEI.$$

6. Si nunc arcus E H, dum in E h abit, concipiatur tangere lineam quandam curuam e E M in ſuperficie ſphaerae deſcriptam, abſcindatur arcus curuae $EM = EH = \omega$, ſitque differentiale arcus

$EM = Ee = d\omega$, tumque ducatur Ae, et arcus eG perpendicularis in AE. Quum nunc ſit

$$EG = Ee\,\text{coſ.}\,AEH = -Ee\,\text{coſ.}\,AEI$$

et $d.\,\text{coſ.}\,AE = dp = -EG\,\text{ſin.}\,AE$,

prodibit

$$dp = d\omega\,\text{ſin.}\,AE\,\text{coſ.}\,AEI,$$

atqui eſt

$$l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = p,$$

captis igitur vtrinque differentialibus prodibit:

$$dl\,\text{ſin.}\,\omega + d\lambda\,\text{coſ.}\,\omega + d\omega(l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega) = dp$$

atque quum habeatur

$dp = d\omega\,\text{ſin.}\,AE\,\text{coſ.}\,AEI = d\omega(l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega)$ conf. §. praec.

erit quoque

$$dl\,\text{ſin.}\,\omega + d\lambda\,\text{coſ.}\,\omega = 0 \quad \text{ſeu} \quad d\lambda = -dl\,\text{Tang.}\,\omega.$$

Simili modo ſi ducti concipiantur arcus Be, De, demonſtrabitur eſſe

$$dq = d\omega\,\text{ſin.}\,BE\,\text{coſ.}\,BEI \quad \text{et} \quad dr = d\omega\,\text{ſin.}\,DE\,\text{coſ.}\,DEI,$$

vnde deducitur

$$dm\,\text{ſin.}\,\omega + d\mu\,\text{coſ.}\,\omega = 0 \quad \text{et} \quad dn\,\text{ſin.}\,\omega + d\nu\,\text{coſ.}\,\omega = 0 \quad \text{ſeu}$$
$$d\mu = -dm\,\text{Tang.}\,\omega \quad \text{et} \quad d\nu = -dn\,\text{Tang}\,\omega.$$

Quum itaque iam ſit

$$d\lambda : dl :: d\mu : dm :: d\nu : dn :: -\text{Tang.}\,\omega : 1,$$

patet litteras l, m, n, λ, μ, ν functiones eſſe eiusdem variabilis ω. Hinc vero quandoquidem integralia

$$\int(l\,dt + \lambda\,du);\ \int(m\,dt + \mu\,du);\ \int(n\,dt + \nu\,du)$$

redu-

reducantur ad integrabilitatem formularum

$\int(tdl+ud\lambda)=\int dl(t-u\,\mathrm{Tang.}\,\omega)$; $\int(tdm+ud\mu)=\int dm(t-u\,\mathrm{Tang.}\,\omega)$

$$\int(tdn+udv)=\int dn(t-u\,\mathrm{Tang.}\,\omega)$$

perſpicitur has tres formulas fieri integrabiles, ſi $t-u\,\mathrm{Tang.}\,\omega$ fuerit functio variabilis ω, quod iam facile obtinetur, ſtatuendo

$$t=\Omega+s\,\mathrm{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad u=\Omega'+s\,\mathrm{coſ.}\,\omega,$$

vbi Ω et Ω' deſignant quascunque functiones ipſius ω, s autem denotat quantitatem indeterminatam ab ω plane non pendentem, hoc enim modo fiet

$$t-u\,\mathrm{Tang.}\,\omega=\Omega-\Omega'\,\mathrm{Tang.}\,\omega,$$

ſeu functioni ſolam variabilem ω inuoluenti.

7. Sequenti igitur modo hinc ſolutio Problematis noſtri adornari poteſt: In ſuperficie ſphaerae deſcribatur curua quaecunque M E et in circulo maximo eam ad E tangente H E I, abſcindatur arcus E H = E M = ω, tum vero ſumatur punctum I vt ſit I H = 90°. Porro ex punctis A, B, D quadrante circuli inter ſe diſtantibus, ducantur arcus circulorum maximorum A I, A E, A H, B I, B E, B H, D I, D E, D H et ponantur quantitates l, m, n reſpectiue aequales coſinubus arcuum A I, B I, D I, nec non λ, μ, ν proportionales coſinubus arcuum A H, B H, D H. Statuatur autem

$$t=\Omega+s\,\mathrm{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad u=\Omega'+s\,\mathrm{coſ.}\,\omega,$$

deſignantibus Ω, Ω' functiones quascunque ipſius ω, s vero quantitatem indeterminatam ab ω non penden-

tem. Si enim coſ. A E, coſ. B E, coſ. D E nunc quoque reſpectiue exprimantur litteris p, q, r facile intelligitur has quantitates eſſe functiones ipſius ω. Euidens autem eſt ob aequationes

$$\text{coſ. AI ſin. EH} + \text{coſ AH coſ. EH} = \text{coſ. AE}$$
$$\text{coſ. BI ſin. EH} + \text{coſ. BH coſ. EH} = \text{coſ. BE}$$
$$\text{coſ. DI ſin. EH} + \text{coſ. DH coſ. EH} = \text{coſ. DE}$$

nec non

$$\text{coſ. AI coſ. EH} - \text{coſ. AH ſin. EH} = \text{ſin. AE coſ. AEI}$$
$$\text{coſ. BI coſ. EH} - \text{coſ. BH ſin. EH} = \text{ſin. BE coſ. BEI}$$
$$\text{coſ. DI coſ. EH} - \text{coſ. DH ſin. EH} = \text{ſin. DE coſ. DEI}$$

quae in has transformantur

$$l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = p;\ l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{dp}{d\omega} = \text{ſin. AE coſ. AEI}$$
$$m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega = q;\ m\,\text{coſ.}\,\omega - \mu\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{dq}{d\omega} = \text{ſin. BE coſ. BEI}$$
$$n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega = r;\ n\,\text{coſ.}\,\omega - \nu\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{dr}{d\omega} = \text{ſin. DE coſ. DEI}$$

emergere:

$$l = p\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{dp}{d\omega}\,\text{coſ.}\,\omega;\ \lambda = p\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{dp}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$$
$$m = q\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{dq}{d\omega}\,\text{coſ.}\,\omega;\ \mu = q\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{dq}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$$
$$n = r\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{dr}{d\omega}\,\text{coſ.}\,\omega;\ \nu = r\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{dr}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\omega$$

ex quo omnino colligitur, quantitates l, m, n, λ, μ, ν eſſe functiones ipſius ω, tum vero vt ſupra § praecedenti, demonſtrabitur eſſe:

$$d\lambda : dl :: d\mu : dm :: d\nu : dn :: -\text{Tang.}\,\omega : 1.$$

Quum autem ſit

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=l\,t+\lambda\,u-\int(t\,dl+u\,d\lambda)$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=m\,t+\mu\,u-\int(t\,dm+u\,d\mu)$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=n\,t+\nu\,u-\int(t\,dn+u\,d\nu),$$

nunc conſequemur

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=l\,t+\lambda\,u-\int dl(\Omega-\Omega'\,\text{Tang}\,\omega)$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=m\,t+\mu\,u-\int dm(\Omega-\Omega'\,\text{Tang}\,\omega)$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=n\,t+\nu\,u-\int dn(\Omega-\Omega'\,\text{Tang}\,\omega).$$

Iam autem de integrabilitate harum formularum, nullum amplius ſupereſt dubium, ſiquidem quantitates ſigno integrationis affectae, non niſi functiones ſolam ω inuoluentes complectantur. Caeterum haec integralia exprimi quoque poſſunt ſequenti modo:

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=\int(l\,d\Omega+\lambda\,d\Omega')+s(l\,\text{ſin.}\,\omega+\lambda\,\text{coſ.}\,\omega)$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=\int(m\,d\Omega+\mu\,d\Omega')+s(m\,\text{ſin.}\,\omega+\mu\,\text{coſ.}\,\omega)$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=\int(n\,d\Omega+\nu\,d\Omega')+s(n\,\text{ſin.}\,\omega+\nu\,\text{coſ.}\,\omega),$$

vel etiam ita

$$\int(l\,dt+\lambda\,du)=\int(l\,d\Omega+\lambda\,d\Omega')+sp$$
$$\int(m\,dt+\mu\,du)=\int(m\,d\Omega+\mu\,d\Omega')+sq$$
$$\int(n\,dt+\nu\,du)=\int(n\,d\Omega+\nu\,d\Omega')+sr.$$

8. Nunc autem operae pretium quoque erit ſingulares quasdam affectiones quantitatum l, m, n, λ, μ, ν et p, q, r heic accuratius expendere. Quod autem priores attinet, obſeruamus eas per differentialia ſic ſatis eleganter exprimi:

$$l=\frac{d.\,p\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega};\quad m=\frac{d.\,q\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega};\quad n=\frac{d.\,r\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega}$$
$$\lambda=\frac{d.\,p\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega};\quad \mu=\frac{d.\,q\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega};\quad \nu=\frac{d.\,r\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega}.$$

Vlterius quum ſit

$$l\ \text{coſ.}\ \omega - \lambda\ \text{ſin.}\ \omega = \frac{dp}{d\omega};\quad m\ \text{coſ.}\ \omega - \mu\ \text{ſin.}\ \omega = \frac{dq}{d\omega};$$
$$n\ \text{coſ.}\ \omega - \nu\ \text{ſin.}\ \omega = \frac{dr}{d\omega}$$

prodibit quadratis ſumendis

$$(ll + mm + nn)\,\text{coſ.}\,\omega^2 - 2(l\lambda + m\mu + n\nu)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega$$
$$+ (\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu)\,\text{ſin.}\,\omega^2 = \text{coſ.}\,\omega^2 + \text{ſin.}\,\omega^2 = 1$$
$$= \frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{d\omega^2},\ \text{ſeu}\ d\omega^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2.$$

Idem vero etiam ſequenti modo demonſtratur: ob

$$ll + mm + nn = (pp + qq + rr)\,\text{ſin.}\,\omega^2 + 2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega\,\frac{(pdp + qdq + rdr)}{d\omega}$$
$$+ \frac{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{d\omega^2}\,\text{coſ.}\,\omega^2,$$

tum vero

$$ll + mm + nn = 1;\ pp + qq + rr = 1\ \text{et}\ pdp + qdq + rdr = 0;$$

habebitur

$$\text{coſ.}\,\omega^2 = \text{coſ.}\,\omega^2\,\frac{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{d\omega^2},\ \text{ſeu}\ 1 = \frac{dp^2 + dq^2 + dr^2)}{d\omega^2}.$$

Praeterea notari quoque meretur, formulas integrales in § praecedenti allatas, introducendo pro l et λ eorum valores, ſic exprimi poſſe:

$$\int(l\,dt + \lambda\,du) = \int p(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{coſ.}\,\omega) + \int\frac{dp}{d\omega}(d\Omega\,\text{coſ.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) + \mathfrak{s}p$$
$$\int(m\,dt + \mu\,du) = \int q(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{coſ.}\,\omega) + \int\frac{dq}{d\omega}(d\Omega\,\text{coſ.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) + \mathfrak{s}q$$
$$\int(n\,dt + \nu\,du) = \int r(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{coſ.}\,\omega) + \int\frac{dr}{d\omega}(d\Omega\,\text{coſ.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) + \mathfrak{s}r$$

vel etiam hoc modo:

$$\int(l\,dt + \lambda\,du) = \int\frac{d\Omega\,d.p\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega} + \int\frac{d\Omega'\,d.p\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega} + \mathfrak{s}p$$
$$\int(m\,dt + \mu\,du) = \int\frac{d\Omega\,d.q\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega} + \int\frac{d\Omega'\,d.q\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega} + \mathfrak{s}q$$
$$\int(n\,dt + \nu\,du) = \int\frac{d\Omega\,d.r\,\text{Sec.}\,\omega}{d.\,\text{Tang.}\,\omega} + \int\frac{d\Omega'\,d.r\,\text{Coſec.}\,\omega}{d.\,\text{Cot.}\,\omega} + \mathfrak{s}r.$$

9. Quum

9. Quum Illuſtr. *Eulerus* ad ſolutionem praeſentis Problematis Analytici, perductus fuerit ex conſideratione ſolidorum, quorum ſuperficies in planum explicare licet, haud incongruum erit expendere, qualis intercedat affinitas inter Problema Analyticum et quaeſtionem iſtam Geometricam. Quoniam autem prima ſolutio, quam Illuſtr. *Eulerus* pro ſolidis quorum ſuperficies in planum explicari ſe ſinunt, in Diſſertatione ſua attulit, directe reſoluatur in ſolutionem Problematis huius Analytici; inueſtigabimus tantum, vtrum et quo reſpectu ſolutio ſecunda in diſſertatione Illuſtr. *Euleri* allata, cum problemate hoc Analytico congruat? Fundamentum autem iſtius ſolutionis in eo poſitum eſt, quod pro omni ſolido cuius ſuperficies in planum ſit explicabilis, ex quolibet ſuperficiei puncto, ſaltem vna educi poſſit linea recta, quae tota in hanc ſuperficiem incidat et quod binae quaeuis huiusmodi rectae inter ſe proximae in eodem plano ſint conſtitutae, ideoque vel inter ſe ſint parallelae, vel in aliquo puncto concurrant. Hinc autem perſpicitur per occurſus harum rectarum formari lineam curvam duplicis curuaturae ita comparatam, vt ſingulae eius tangentes productae in ipſam ſuperficiem corporis quaeſiti incidant.

10. Si igitur fuerit $b\,v\,$V huiusmodi linea curua duplicis curuaturae, ſitque eius proiectio in datum planum A T U, linea curua $a\,u\,$U pro qua dicantur coordinatae A T $=$ T et T U $=$ U, tum vero linea U V normalis ad planum A U T, quae curuae Tab. I. Fig. 5.

curuae duplicis curuaturae occurrit in V, ſtatuatur $= V$ et ex natura curuarum duplicis curuaturae intelligitur, tam U, quam V eſſe functionem quantitatis T. Concipiamus iam u eſſe proximum in proiectione $a u$ U punctum, et ductas eſſe $u t$, $u v$, illam ſcilicet perpendicularem ad A T, hanc vero ad planum A T U normalem, quae occurrat curuae duplicis curuaturae in puncto v, ita vt ſit V v differentiale curuae $b v$ V quod dicamus d S, ſignificante S ipſum arcum b V. Per V autem concipiantur ductae P V, P Q reſpectiue parallelae ipſis A T, T U, anguloſque v V P, v V Q, v V U reſpectiue deſignemus per litteras ζ, η, θ. Quum igitur ſint U et V functiones ipſius T, liquet quoque angulos ζ, η, θ determinatas huius quantitatis eſſe functiones, nec non differentiale

$$dS = \sqrt{(dT^2 + dU^2 + dV^2)}.$$

Viciſſim autem hinc colligere licet, non ſolum T, U et V, ſed etiam ζ, η, θ certas conſtituere functiones arcus S.

Tab. I. Fig. 5. et 6. 11. Vt autem relatio quae intercedit inter dS et differentialia ipſorum T, U, V facilius inueniatur, concipiamus $u v$ productam ſi opus ſit, occurrere plano P V Q in s, ita vt fiat $u s =$ U V, per s autem ducantur lineae $s p$, $s q$ parallelae ipſis V Q, V P et iungantur $p v$, $q v$, V s. Si nunc per u ducta concipiatur u N parallela ipſi A T, erit ob V U parallelam et aequalem ipſi $s u$, U u parallela et aequalis ipſi V s, eſt vero quoque V q parallela ipſi

ipſi U N et $s\,q$ parallela ipſi u N, erunt ergo triangula s V q, u U N inter ſe ſimilia et aequalia, hoc eſt

$$U N = V q \text{ et } u N = s q = V p.$$

Porro ob $v\,s$ normalem ad planum P V Q et $s\,p$ perpendicularem ipſi P V, nec non $s\,q$ perpendicularem ipſi V Q, erunt quoque $v\,p$, $v\,q$ ipſis V P, V Q reſpectiue perpendiculares, vnde conſequimur

$$u N = V p = V v.\operatorname{coſ.} v V P;\ U N = V q = V v.\operatorname{coſ.} v V Q \text{ et } v s = V v.\operatorname{coſ.} v V U$$

hoc eſt

$$dT = dS \operatorname{coſ.} \zeta;\ dU = dS \operatorname{coſ.} \eta;\ dV = dS \operatorname{coſ.} \theta$$

12. Vt autem inueniatur aequatio, quae ad totam ſuperficiem in planum explicabilem pateat, ſumatur in tangente V v M punctum aliquod Z, ex quo demittatur in planum A T U perpendicularis Z Y, tum vero ducatur Y X perpendicularis ad A T. Ducta autem per Y, Y L parallelā ipſi A T, quae ordinatae T U occurrit in L, atque per Z, O Z parallela ipſi Y U, quae rectae U V occurrat in O, iam facile quidem demonſtrabitur eſſe

$$Y L = Z V \operatorname{coſ.} \zeta;\ U L = Z V \operatorname{coſ.} \eta \text{ et } V O = Z V \operatorname{coſ.} \theta;$$

demonſtratio enim eodem modo procedit, ac ea, qua ſupra euictum dedimus eſſe

$$V p = V v \operatorname{coſ.} \zeta;\ V q = V v \operatorname{coſ.} \eta;\ v s = V v \operatorname{coſ.} \theta.$$

Si igitur iam dicatur Z V $= s$, de qua facile intelligitur, quod a quantitatibus T, U, V prorſus ſit independens, pro coordinatis

$$A X = x,\ X Y = y \text{ et } Y Z = z$$

 has

has conſequemur expreſſiones:

$$x = AX = AT - TX = AT - YL = T - s\,\text{cof.}\,\zeta = \int dS\,\text{cof.}\,\zeta - s\,\text{cof.}\,\zeta$$
$$y = XY = UT - UL = U - s\,\text{cof.}\,\eta = \int dS\,\text{cof.}\,\eta - s\,\text{cof.}\,\eta$$
$$z = ZY = VU - VO = V - s\,\text{cof.}\,\theta = \int dS\,\text{cof.}\,\theta - s\,\text{cof.}\,\theta.$$

13. Verum enimuero quum prior ſolutio in Diſſertatione Illuſtr. *Euleri* allata praebeat

$$x = \int (l\,dt + \lambda\,du);\quad y = \int (m\,dt + \mu\,du);\quad z = \int (n\,dt + \nu\,du)$$

habebitur per ſolutionem noſtram ſupra expoſitam

$$x = \int p(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \int \tfrac{dp}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) - sp$$
$$y = \int q(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \int \tfrac{dq}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) - sq$$
$$z = \int r(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \int \tfrac{dr}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega) - sr$$

qui valores ad identitatem cum modo allatis reducuntur, ſupponendo

$$p = \text{cof.}\,\zeta;\quad q = \text{cof.}\,\eta \quad \text{et} \quad r = \text{cof.}\,\theta,$$

praetereaque ſtatuendo

$$d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega = 0.$$

Quum enim eſſe debeat

$$\frac{dT}{dU} = \frac{\text{cof.}\,\zeta}{\text{cof.}\,\eta} = \frac{p}{q} = \frac{p(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \frac{dp}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega)}{q(d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega) + \frac{dq}{d\omega}(d\Omega\,\text{cof.}\,\omega - d\Omega'\,\text{ſin.}\,\omega)}$$

euidens omnino eſt ad hoc efficiendum requiri, vt ſit $\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \text{Tang.}\,\omega$. Poſito autem $d\Omega = d\Omega'\,\text{Tang.}\,\omega$, habebitur

$$d\Omega\,\text{ſin.}\,\omega + d\Omega'\,\text{cof.}\,\omega = \frac{d\Omega}{\text{ſin.}\,\omega} = dS.$$

Ex his igitur concludere licet, ſolutionem generalem Problematis Analytici, dum adplicatur ad ſolutionem

nem ſecundam quaeſtionis Geometricae ab Illuſtr. *Eulero* allatam, ita reſtringi debere, vt ponatur

$$t = \int dS.\text{ſin}.\omega - s\,\text{ſin}.\omega \quad \text{et} \quad u = \int dS.\text{coſ}.\omega - s\,\text{coſ}.\omega,$$

quum tamen in ſolutione generali, quae cum ſolutione prima Illuſtr. *Euleri* aeque late patere debet, nulla omnino eiusmodi conditio pro natura functionum Ω et Ω' praeſcripta intelligatur. Dubium igitur eſſe poteſt, vtrum ſolutio ſecunda Illuſtr. *Euleri* generalis ſit, ſeu an praeter ea ſolida, ad quae haec ſolutio adplicatur, nulla alia dentur, quorum ſuperficies in planum ſit explicabilis, vel potius annon Problema Analyticum latius pateat, quam quaeſtio iſta Geometrica? Poſterius quidem mihi probabilius videtur, dubio autem allato perfecte diluendo me imparem eſſe, fateri cogor.

14. Denique ab argumento noſtro haud alienum erit, oſtendere, qualis inter ſolutiones Illuſtr. *Euleri* II^{dam} et III^{iam} intercedat conſenſus, ſeu ambas has ſolutiones bene inter ſe conciliari. Quum igitur tertia ſolutio eo redeat, vt ſtatui debeat

$$y = M + Nx \quad \text{et} \quad z = P + Qx,$$

poſitis M, N, P, Q quibuscunque functionibus eiusdem variabilis Φ, modo haec adimpleatur conditio $\frac{dM}{dP} = \frac{dN}{dQ}$, nunc diſpiciendum venit, an ſecundam ſolutionem ad ſimilem formam reducendo, huic conditioni ſatisfiat. Quum igitur per ſecundam ſolutionem habuerimus:

$$x = T - s\,\text{coſ}.\zeta;\ y = U - s\,\text{coſ}.\eta;\ \text{et}\ z = V - s\,\text{coſ}.\theta\ \text{vbi}$$
$$T = \int dS\,\text{coſ}.\zeta;\ U = \int dS\,\text{coſ}.\eta;\ V = \int dS\,\text{coſ}.\theta;$$

 erit

erit nunc $s = \frac{T - x}{coſ.\,\zeta}$, qui valor in expreſſionibus pro y et z ſubſtitutus praebet:

$$y = \frac{U\,coſ.\zeta - T\,coſ.\eta}{coſ.\,\zeta} + \frac{x\,coſ.\,\eta}{coſ.\,\zeta} \text{ et } z = \frac{V\,coſ.\zeta - T\,coſ.\theta}{coſ.\,\zeta} + \frac{x\,coſ\,\theta}{coſ.\,\zeta}.$$

Comparando igitur has expreſſiones cum iſtis

$$y = M + N\,x;\quad z = P + Q\,x \text{ conſequemur:}$$

$$M = \frac{U\,coſ.\zeta - T\,coſ.\eta}{coſ.\,\zeta};\quad N = \frac{coſ.\,\eta}{coſ.\,\zeta};\quad P = \frac{V\,coſ.\zeta - T\,coſ.\theta}{coſ.\,\zeta};\quad Q = \frac{coſ.\,\theta}{coſ.\zeta}.$$

Sumtis autem differentialibus erit

$$dM = dU - dT.\frac{coſ.\,\eta}{coſ.\zeta} + \frac{T\,d\eta.\,ſin.\,\eta}{coſ.\,\zeta} - \frac{T\,d\zeta.\,coſ.\,\eta\,ſin.\,\zeta}{coſ.\,\zeta^2}$$

$$= \frac{T\,(d\eta.\,ſin.\,\eta.\,coſ.\,\zeta - d\zeta\,coſ.\,\eta\,ſin.\,\zeta)}{coſ.\,\zeta^2}$$

$$dP = T\,\frac{(d\theta\,ſin.\,\theta\,coſ.\,\zeta - d\,\zeta.\,coſ.\,\theta\,ſin.\,\zeta)}{coſ.\,\zeta^2}$$

$$dN = + \frac{d\,\zeta.\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\eta - d\,\eta.\,ſin.\,\eta.\,coſ.\,\zeta}{coſ.\,\zeta^2}$$

$$dQ = + \frac{d\,\zeta.\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\theta - d\,\theta.\,ſin.\,\theta.\,coſ.\,\zeta}{coſ.\,\zeta^2},$$

ex quo iam euidenter patet eſſe $\frac{dM}{dN} = \frac{dP}{dQ}$, ita vt hinc conſenſus harum ſolutionum fiat manifeſtus. Caeterum notari omnino meretur eſſe:

$$\frac{dM}{dP} = \frac{dN}{dQ} = d.\left(\frac{coſ.\,\eta}{coſ.\,\zeta}\right) : d.\left(\frac{coſ.\,\theta}{coſ.\,\zeta}\right) = d.\,\frac{dU}{dT} : d.\,\frac{dV}{dT}.$$

EXER-

EXERCITATIONES ANALYTICAE.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Non parum notatu digna videtur relatio, quam inter ſummas harum ſerierum diuergentium

$$1 - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - \text{etc.}$$

et iſtarum conuergentium

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

intercedere olim obſeruaui, et quae ita ſe habet:

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}$$

$$1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{4} = + \tfrac{2 \cdot 1}{\pi^2}\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = \tfrac{0}{8}$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = -\tfrac{2}{16} = -\tfrac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{\pi^4}\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} = \tfrac{0}{32}$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} = \tfrac{16}{64} = + \tfrac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\pi^6}\left(1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc.} = \tfrac{0}{128}$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \text{etc.} = -\tfrac{272}{256} = -\tfrac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 7}{\pi^8}\left(1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc.}\right)$$

$$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + \text{etc.} = \tfrac{0}{512}$$

$$1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + \text{etc.} = \tfrac{7936}{1024} = + \tfrac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 9}{\pi^{10}}\left(1 + \tfrac{1}{3^{10}} + \tfrac{1}{5^{10}} + \tfrac{1}{7^{10}} + \text{etc.}\right)$$

 vbi

vbi π denotat peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$.

2. Hinc concludere licet, in genere inter has ſeries infinitas

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc. et } 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

huiusmodi relationem locum habere, vt ſit

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \text{etc.}$$

$$= \frac{2 . 1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{\pi^n} N \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.}\right)$$

vbi quidem nouimus, quoties n fuerit numerus impar excepto caſu $n = 1$, fore $N = 0$; quoties autem ſit n numerus par, eſſe N vel $+1$ vel -1. Scilicet ſi ſit n numerus impariter par formae $4m + 2$, erit $N = +1$, ſin autem n numerus pariter par formae $4m$, erit $N = -1$. Vnde cuiusmodi functio N ſit ipſius n haud difficulter conijcere licebit; cum

ſi $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ etc.
ſit $N = +1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, 0$ etc.

3. Neque etiam, ſi rem attentius perpendamus, caſus $n = 1$ huic legi aduerſatur, qua fieri debet $N = 0$; nihil enim impedit, quo minus hanc aequalitatem admittamus:

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + \text{etc.} = \tfrac{2}{\pi} 0 \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \text{etc.}\right)$$

quandoquidem ſeriei

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$

ſumma

ſumma eſt infinita, vnde vtique fieri poteſt $\frac{2}{\pi}.0\infty=\frac{1}{2}$ ſeu ſummae ſeriei

$$1-1+1-1+\text{etc.}$$

Quamobrem ſine vlla exceptione

ſi fuerit $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ etc.
erit $N=0,+1,0,-1,0,+1,0,-1,0$ etc.

cui quidem legi innumerae formulae pro N aſſumendae ſatisfacere poſſunt. Verum dubitare non licet, quin ſimpliciſſima maximeque naturalis hic locum inueniat, quae eſt $N=\cos.\frac{n-2}{2}\pi$, denotante hic π angulum duobus rectis aequalem, quoniam ſinus totus $=1$ aſſumitur, vt π ſit ſemicircumferentia circuli.

4. Admiſſa ergo hac coniectura, habebimus in genere:

$$1-2^{n-1}+3^{n-1}-4^{n-1}+\text{etc.}=2\cos.\frac{n-2}{2}\pi.\frac{1.2.3...(n-1)}{\pi^n}\left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}\right)$$

ſiue conuertendo:

$$1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}=\frac{1}{2\cos\frac{n-2}{2}\pi}.\frac{\pi^n}{1.2.3....(n-1)}\left(1-2^{n-1}+3^{n-1}-4^{n-1}+\text{etc.}\right)$$

atque ex praecedentibus manifeſtum eſt, hanc aequalitatem reuera conſiſtere quoties fuerit n numerus par, neque etiam a veritate diſcedere caſibus, quibus n eſt numerus impar. Quare ſi ea vera ſit pro

caſi-

caſibus, quibus n eſt numerus fractus, formulae $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$ valores per interpolationem aſſignari debent, qui quidem pro ſemiſſibus ita ſe habent:

$$\text{ſi } n-1 = \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad \tfrac{5}{2}, \quad \tfrac{7}{2}, \quad \tfrac{9}{2}, \text{ etc.}$$

$$\text{ſunt } \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{\pi};\ \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\sqrt{\pi}\text{ etc.}$$

$$\text{et coſ.}\,\frac{(n-2)\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Pro his ergo caſibus habebimus:

$$1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}+\text{etc.} = +\frac{\sqrt{2}}{1}\,\pi\,(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}-\sqrt{5}-\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^2\sqrt{3}}+\frac{1}{5^2\sqrt{5}}+\frac{1}{7^2\sqrt{7}}+\text{etc.} = +\frac{2\sqrt{2}}{1\cdot 3}\,\pi^2(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{4}+\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^3\sqrt{3}}+\frac{1}{5^3\sqrt{5}}+\frac{1}{7^3\sqrt{7}}+\text{etc.} = -\frac{4\sqrt{2}}{1\cdot 3\cdot 5}\,\pi^3(1-2^2\sqrt{2}+3^2\sqrt{3}-4^2\sqrt{4}+\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^4\sqrt{3}}+\frac{1}{5^4\sqrt{5}}+\frac{1}{7^4\sqrt{7}}+\text{etc.} = -\frac{8\sqrt{2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\,\pi^4(1-2^3\sqrt{2}+3^3\sqrt{3}-4^3\sqrt{4}+\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^5\sqrt{3}}+\frac{1}{5^5\sqrt{5}}+\frac{1}{7^5\sqrt{7}}+\text{etc.} = +\frac{16\sqrt{2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\,\pi^5(1-2^4\sqrt{2}+3^4\sqrt{3}-4^4\sqrt{4}+\text{etc.})$$

etc.

quae aequalitates, an abſolute ſint verae, pertinaciter aſſeuerare non auſim; ſcrutari ergo conuenit, num ſeriebus per approximationem ſummatis ſatisfiat; ac pro prima quidem colligimus,

$$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\text{etc.} = 0,380317 \text{ proxime}$$

qui numerus per $\pi\sqrt{2}$ multiplicatur dat $1,689665$, cui ſumma ſeriei

$$1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}\text{ etc.}$$

proxime aequalis deprehenditur.

6. Quoniam autem numeris imparibus pro n accipiendis hinc nihil concludi poſſe videtur, propterea

rea quod alterum membrum noſtrae aequationis abit in $\frac{0}{0}$ vt hos valores inueſtigemus, pro n ponamus numerum infinite parum excedentem numerum integrum, ſeu ſcribamus $n+\omega$ loco n, denotante ω fractionem infinite paruam; atque habebimus:

$$1+\frac{1}{3^{n+\omega}}+\frac{1}{5^{n+\omega}}+\frac{1}{7^{n+\omega}}+\text{etc.}=\frac{1}{2\,\text{coſ.}\frac{n-2+\omega}{n}\pi}\cdot\frac{\pi^{n+\omega}}{1.2\ldots(n-1+\omega)}$$
$$(1-2^{n-1+\omega}+3^{n-1+\omega}-4^{n-1+\omega}+\text{etc.})$$

Hic igitur primo obſeruo eſſe

$$\frac{1}{a^{n+\omega}}=a^{-n-\omega}=a^{-n}(1-\omega\,l\,a)$$

vbi logarithmi naturales ſeu hyperbolici ſunt intelligendi, ita vt ſit

$$\frac{1}{a^{n+\omega}}=\frac{1}{a^n}-\frac{\omega\,l\,a}{a^n}.$$

Simili modo erit

$$a^{n-1+\omega}=a^{n-1}+a^{n-1}\,\omega\,l\,a,\ \text{et}\ \pi^{n+\omega}=\pi^n(1+\omega\,l\,\pi):$$

tum vero fit

$$\text{coſ.}\frac{n-2+\omega}{2}\pi=\text{coſ.}\frac{n-2}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\omega\,\pi\,\text{ſin.}\frac{n-2}{2}\pi.$$

Denique cum oſtenderim olim formulae $1.2\ldots(n-1+\omega)$ valorem caſu $n=1$ eſſe $=1-0,57721566\,\omega$, ſi ſcribamus breuitatis gratia $\lambda=0,5772166490153 25$

ſumendo $n=1$; 2; 3; 4; 5 etc.
fit $1.2\ldots(n-1+\omega)=1-\lambda\omega$; $1+(1-\lambda)\omega$; $2+(3-2\lambda)\omega$; $6+(11-6\lambda)\omega$; $24+(50-24\lambda)\omega$ etc.

7. Conſideremus hinc potiſſimum caſum $n=3$, quandoquidem haec ſeries

$$1+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{5^3}+\tfrac{1}{7^3}+\text{etc.}$$

 ita

ita eſt comparata, vt omnes adhuc labores ad eius ſummam inueſtigandam fruſtra ſuſcepti ſint. Cum igitur ſit coſ. $\frac{n-2}{2}\pi = 0$ et ſin. $\frac{n-2}{2}\pi = 1$, noſtra aequatio hanc induet formam:

$$\left.\begin{matrix} 1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.} \\ -\omega\left(l1+\frac{l3}{3^3}+\frac{l5}{5^3}+\frac{l7}{7^3}+\text{etc.}\right.\end{matrix}\right\} = \frac{-1}{\pi\,\omega}\cdot\frac{\pi^3(1+\omega l\pi)}{2+(3-2\lambda)\omega}\left\{\begin{matrix} 1-2^2+3^2-4^2+\text{etc.} \\ -\omega(2^2l2-3^2l3+4^2l4-\text{etc.})\end{matrix}\right\}$$

Verum quia

$$1-2^2+3^2-4^2+\text{etc.}=0,$$

poſito $\omega = 0$, habebimus

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}=\frac{1}{2}\pi^2(2^2l2-3^2l3+4^2l4-5^2l5+\text{etc.})$$

ſicque ad ſcopum pertingeremus, ſi huius ſeriei logarithmicae

$$2^2l2-3^2l3+4^2l4-5^2l5+\text{etc.}$$

ſummam aſſignare liceret. Simili autem modo pro reliquis poteſtatibus reperitur

$$1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\text{etc.}=\frac{-\pi^4}{1.2.3.4}(2^4l2-3^4l3+4^4l4-5^4l5+\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\text{etc.}=\frac{+\pi^6}{1.2\ldots6}(2^6l2-3^6l3+4^6l4-5^6l5+\text{etc.})$$

$$1+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{7^9}+\text{etc.}=\frac{-\pi^8}{1.2\ldots8}(2^8l2-3^8l3+4^8l4-5^8l5+\text{etc.})$$

8. Propoſita ergo nobis ſit haec ſeries infinita:

$$2^2l2-3^2l3+4^2l4-5^2l5+6^2l6-7^2l7+\text{etc.}=Z$$

vt fiat $1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.}=\frac{1}{2}\pi\pi Z$,

et quo minus de eius ſumma deſperemus, notetur eſſe

$$l2-l3+l4-l5+l6-\text{etc.}=\frac{1}{2}l\frac{\pi}{2}.$$

Illa

Illa autem ſeries Z in plures formas transmutari poteſt, veluti

$$Z = l2 - 3\,l\tfrac{3}{2} + 6\,l\tfrac{4}{3} - 10\,l\tfrac{5}{4} + 15\,l\tfrac{6}{5} - 21\,l\tfrac{7}{6} + \text{etc. et}$$

$$Z = l\tfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3} + 4\,l\tfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5} + 9\,l\tfrac{6\cdot 6}{5\cdot 7} + 16\,l\tfrac{8\cdot 8}{7\cdot 9} + 25\,l\tfrac{10\cdot 10}{9\cdot 11} \text{ etc.}$$
$$- 2\,l\tfrac{3\cdot 3}{2\cdot 4} - 6\,l\tfrac{5\cdot 5}{4\cdot 6} - 12\,l\tfrac{7\cdot 7}{6\cdot 8} - 20\,l\tfrac{9\cdot 9}{8\cdot 10} - \text{etc.}$$

Si enim in genere ponamus

$$Z = \alpha\,l\tfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3} - \beta\,l\tfrac{3\cdot 3}{2\cdot 4} + \gamma\,l\tfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5} - \delta\,l\tfrac{5\cdot 5}{4\cdot 6} + \varepsilon\,l\tfrac{6\cdot 6}{5\cdot 7} - \zeta\,l\tfrac{7\cdot 7}{6\cdot 8} \text{ etc.}$$

eſſe debet $2\alpha + \beta = 4$ hincque $\beta = 4 - 2\alpha$ | $\zeta = 18 - 6\alpha$
$\alpha + 2\beta + \gamma = 9$ $\gamma = 1 + 3\alpha$ | $\eta = 9 + 7\alpha$
$\beta + 2\gamma + \delta = 16$ $\delta = 10 - 4\alpha$ | $\theta = 28 - 8\alpha$
$\gamma + 2\delta + \varepsilon = 25$ $\varepsilon = 4 + 5\alpha$ | $\varepsilon = 15 + 9\alpha$

hic vero ſumſimus $\alpha = 1$, vt progreſſio maxime fiat regularis.

9. Haec poſterior forma maxime ad inſtitutum noſtrum videtur accommodata, quoniam logarithmi in ſeries conuergentes reſoluuntur. Hunc in finem pro terminis poſitiuis hac reſolutione vtar; cum quilibet hac forma contineatur

$$xx\,l\frac{4xx}{4xx-1} = -xx\,l\left(1 - \frac{1}{4xx}\right)$$

inde naſcitur haec ſeries infinita:

$$xx\left(\frac{1}{4xx} + \frac{1}{2\cdot 2^4 x^4} + \frac{1}{3\cdot 2^6 x^6} + \frac{1}{4\cdot 2^8 x^8} + \text{etc.}\right) \text{ ſeu haec}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{xx} + \frac{1}{3\cdot 2^6}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4\cdot 2^8}\cdot\frac{1}{x^6} + \frac{7}{5\cdot 2^{10}}\cdot\frac{1}{x^8} + \text{etc.}$$

Pro terminis autem negatiuis forma generalis eſt

$$-x(x+1)\,l\frac{(2x+1)^2}{4x(x+1)} = -x(x+1)\,l\left(1 + \frac{1}{4x(x+1)}\right),$$

quae reſoluitur in hanc ſeriem:

$$-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{3\cdot 2^6}\cdot\frac{1}{x^2(x+1)^2}-\frac{1}{4\cdot 2^8}\cdot\frac{1}{x^3(x+1)^3}+\text{etc.}$$

vnde valor ipſius Z in has ſeries transformatur:

$$Z=\frac{1}{2^2}(1-1+1-1+\text{etc.})+\frac{1}{2\cdot 2^4}\left(1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3\cdot 4}\ \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{3\cdot 2^6}\left(1-\frac{1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^2\cdot 3^3}+\text{etc.}\right)+\frac{1}{4\cdot 2^8}\left(1+\frac{1}{1^3\cdot 2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^3\cdot 3^3}+\frac{1}{3^6}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{5\cdot 2^{10}}\left(1-\frac{1}{1^4\cdot 2^4}+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^4\cdot 3^4}+\text{etc.}\right)+\frac{1}{6\cdot 2^{12}}\left(1+\frac{1}{1^5\cdot 2^5}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^5\cdot 3^5}+\frac{1}{3^{10}}+\text{etc.}\right)$$

10. Quodſi nunc breuitatis gratia ponamus:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}=\alpha\,\pi^2;$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}=\beta\,\pi^4;$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.}=\gamma\,\pi^6$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{etc.}=\delta\,\pi^8$$

vbi quidem numeri α, β, γ, δ etc. ſunt cogniti; et quia

$$1-1+1-1\ \text{etc.}=\tfrac{1}{2}\ \text{erit}$$

$$Z=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^4}\left(\alpha\,\pi^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{3\cdot 2^6}\left(\beta\,\pi^4-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{12^2}-\text{etc.}\right)+\frac{1}{4\cdot 2^8}\left(\gamma\,\pi^6+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{12^3}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{5\cdot 2^{10}}\left(\delta\,\pi^8-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{6^4}-\frac{1}{12^4}-\text{etc.}\right)+\frac{1}{6\cdot 2^{12}}\left(\varepsilon\,\pi^{10}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6^5}-\frac{1}{12^5}\ \text{etc.}\right)$$

vbi iam totum negotium ad ſummationem harum ſerierum

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{20^n}+\text{etc.}$$

eſt reductum, quarum poteſtatum radices 2, 6, 12, 20 etc. ſunt numeri pronici.

11.

11. Huius autem ſeriei ſinguli termini, quorum forma eſt $\frac{1}{x^n(x+1)^n}$ in partes ſimplicium poteſtatem reſolui poſſunt, quae ita ſe habent:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{x^3(x+1)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) + \frac{3.4}{1.2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{x^4(x+1)^4} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^4} - 4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right) + \frac{4.5}{1.2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) - \frac{4.5.6}{1.2.3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Cum iam ſummas praefixo ſigno $\int$ indicando ſit

$$\int\frac{1}{(x+1)^n} = \int\frac{1}{x^n} - 1, \quad \text{erit}$$

$$\int\frac{1}{x(x+1)} = 1,$$

$$\int\frac{1}{x^2(x+1)^2} = 2\int\frac{1}{x^2} - 1 - 2$$

$$\int\frac{1}{x^3(x+1)^3} = 1 - 3\left(2\int\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{3.4}{1.2}$$

$$\int\frac{1}{x^4(x+1)^4} = 2\int\frac{1}{x^4} - 1 - 4 + \frac{4.5}{1.2}\left(2\int\frac{1}{x^2} - 1\right) - \frac{4.5.6}{1.2.3}.$$

12. In ſingulis his expreſſionibus numeros abſolutos commode in vnum colligere licet, et cum deinde ſit

$$\int\frac{1}{x^2} = \alpha\pi^2;\ \int\frac{1}{x^4} = \beta\pi^4;\ \int\frac{1}{x^6} = \gamma\pi^6;\ \int\frac{1}{x^8} = \delta\pi^8 \text{ etc.}$$

habebimus

$$\int \frac{1}{x(x+1)} = 1$$
$$\int \frac{1}{x^2(x+1)^2} = 2\alpha\pi^2 - \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}$$
$$\int \frac{1}{x^3(x+1)^3} = -3\cdot 2\alpha\pi^2 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$\int \frac{1}{x^4(x+1)^4} = 2\beta\pi^4 + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}2\alpha\pi^2 - \frac{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$
$$\int \frac{1}{x^5(x+1)^5} = -5\cdot 2\beta\pi^4 - \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}2\alpha\pi^2 + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$\int \frac{1}{x^6(x+1)^6} = 2\gamma\pi^6 + \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}2\beta\pi^4 + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2\alpha\pi^2 - \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

etc.

vbi haec reductio notatu digna eſt obſeruanda:

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \ldots\ldots \frac{n(n+1)\ldots\ldots(2n-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n}$$

fit enim ſumma ex lege nota

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(2n-1)}{1\cdot\ 2\cdot\ 3\ \ldots\ldots\ (n-1)}.$$

13. His igitur valoribus ſubſtitutis obtinebimus:

$$Z = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^4}(\alpha\pi^2 + 1) + \frac{1}{3\cdot 2^6}\left(\beta\pi^4 + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} - 2\alpha\pi^2\right) + \frac{1}{4\cdot 2^8}\left(\gamma\pi^6 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{3}{1}\cdot 2\alpha\pi^2\right)$$
$$+ \frac{1}{5\cdot 2^{10}}\left(\delta\pi^8 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}2\alpha\pi^2 - 2\beta\pi^4\right) + \frac{1}{6\cdot 2^{12}}\left(\varepsilon\pi^{10} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}2\alpha\pi^2 - \frac{1}{5}\cdot 2\beta\pi^4\right)$$
$$+ \frac{1}{7\cdot 2^{14}}\left(\zeta\pi^{22} + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2\alpha\pi^2 - \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}2\beta\pi^4 - 2\gamma\pi^6\right) + \text{etc.}$$

quae expreſſio in has ſeries reſoluitur:

$$Z = \frac{1}{2^2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^4} - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 2^6} + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^8} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^{10}} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^{12}} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\alpha\pi^2}{2\cdot 2^4} + \frac{\beta\pi^4}{3\cdot 2^6} + \frac{\gamma\pi^6}{4\cdot 2^8} + \frac{\delta\pi^8}{5\cdot 2^{10}} + \frac{\varepsilon\pi^{10}}{6\cdot 2^{12}} + \text{etc.}$$
$$- 2\alpha\pi^2\left(\frac{1}{3\cdot 2^6} + \frac{3}{1\cdot 4\cdot 2^8} + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 2^{10}} + \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 2^{12}} + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 2^{14}}\right)$$
$$- 2\beta\pi^4\left(\frac{1}{5\cdot 2^{10}} + \frac{5}{1\cdot 6\cdot 2^{12}} + \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 7\cdot 2^{14}} + \frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8\cdot 2^{16}} + \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9\cdot 2^{18}}\ \text{etc.}\right)$$
$$- 2\gamma\pi^6\left(\frac{1}{7\cdot 2^{14}} + \frac{7}{1\cdot 8\cdot 2^{16}} + \frac{8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 9\cdot 2^{18}} + \frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 10\cdot 2^{20}} + \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 11\cdot 2^{22}} + \text{etc.}\right)$$

etc.

14.

14. Hinc deducimur ad iſtam ſeriem infinitam generalem, quae illas ſeries numericas omnes in ſe complectitur:

$$\frac{1}{n.\ 2^{2n}}+\frac{n}{(n+1)\,2^{2n+2}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)\,2^{2n+4}}+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\ 3.\ (n+3)\,2^{2n+6}}$$
$$+\frac{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{2.\ 3.\ 4\ (n+4)\,2^{2n+8}}+\text{etc.}$$

cuius igitur ſummam inueſtigari oportet. Quodſi enim huius ſeriei ſummam in genere hoc ſigno $S(n)$ indicemus, habebimus

$$Z=-\tfrac{1}{8}+S(1)+2\alpha\pi^2\left(\tfrac{1}{4.\,2^4}-S(3)\right)+2\beta\pi^4\left(\tfrac{1}{6.\,2^6}-S(5)\right)$$
$$+2\gamma\pi^6\left(\tfrac{1}{8.\,2^8}-S(7)\right)+2\delta\pi^8\left(\tfrac{1}{10.\,2^{10}}-S(9)\right)+\text{etc.}$$

Series autem noſtra generalis ita commodius exhiberi poteſt

$$n(n+1)\,S(n)=\frac{n+1}{2^{2n}}+\frac{nn}{2^{2n+2}}+\frac{n(n+1)(n+1)}{2.\ 2^{2n+4}}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+4)}{2.\ 3.\ 2^{2n+6}}$$
$$+\frac{n(n+1)(n+3)(n+5)(n+6)}{2.\ 3.\ 4.\ 2^{2n+8}}+\frac{n(n+1)(n+4)(n+6)(n+7)(n+8)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 2^{2n+10}}+\text{etc.}$$

vbi denominatores numero n carent. Poſſunt etiam ſinguli termini ita per factores repraeſentari, vt ſtatuatur:

$$S(n)=A+AB+ABC+ABCD+ABCDE+\text{etc.}$$

eritque

$$A=\frac{1}{n.\,2^{2n}};\quad B=\frac{nn}{4(n+1)};\quad C=\frac{(n+1)(n+1)}{4.\ 2n};\quad D=\frac{(n+2)(n+4)}{4.\ 3\,(n+1)};$$
$$E=\frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{4.\ 4\,(n+2)(n+4)};\quad F=\frac{(n+4)(n+7)(n+8)}{4.\ 5\,(n+3)(n+5)}\ \text{etc.}$$

vbi

vbi factor in genere hanc habet formam

$$\frac{(n+\lambda-1)(n+2\lambda-3)(n+2\lambda-2)}{4\lambda(n+\lambda-2)(n+\lambda)}.$$

15 Incipiamus a caſu ſimpliciſſimo $n=1$, et quia factor in genere eſt

$$=\frac{\lambda(2\lambda-2)(2\lambda-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda-1}{2\lambda+2};\text{ erit}$$

$A=\frac{1}{4}$; $B=\frac{1}{8}$; $C=\frac{3}{6}$; $D=\frac{5}{8}$; $E=\frac{7}{10}$; $F=\frac{9}{12}$ etc.

vnde fit

$$S(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4.8}\left(1+\frac{3}{6}+\frac{3.5}{6.7}+\frac{3.5.7}{6.8.10}+\frac{3.5.7.9}{6.8.10.12}+\text{etc.}\right).$$

Cum autem ſit

$$\sqrt{(1-1)}=1-\frac{1}{2}-\frac{1.1}{2.4}-\frac{1.1.3}{2.4.6}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}-\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}-\text{etc.}=0$$

erit $1+\frac{3}{6}+\frac{3.5}{6.8}+\frac{3.5.7}{6.8.10}+\text{etc.}=\frac{2.4}{1.1}\left(1-\frac{n}{1}\right)=4$

ideoque $S(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ et $-\frac{1}{8}+S(1)=\frac{1}{4}$.

16. Quo autem ſummas reliquarum ſerierum facilius definire queamus, loco $\frac{1}{2^2}$ ſcribamus x, vt ſit $x=\frac{1}{4}$, et cum habeamus:

$$S(n)=\frac{1}{n}x^n+\frac{n}{(n+1)}x^{n+1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)}x^{n+2}+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3(n+3)}x^{n+3}+\text{etc.}$$

quae caſu $n=1$ abit in

$$S(1)=x+\frac{1}{2}xx+\frac{2.3}{2.3}x^3+\frac{3.4.5}{2.3.4}x^4+\frac{4.5.6.7}{2.3.4.5}x^5+\text{etc.}$$

ſeu $S(1)=x+\frac{1}{2}xx+x^3+\frac{5}{2}x^4+\frac{6.7}{2.3}x^5+\frac{7.8.9}{2.3.4}x^6+\frac{8.9.10.11}{2.3.4.5}x^7+\text{etc.}$

vel $S(1)=x+\frac{1}{2}xx\left(1+\frac{2}{1}x+\frac{2.5}{1.2}xx+\frac{2.5.14}{1.2.5}x^3+\frac{2.5.14.9}{2.3.4.5}x^4+\text{etc.}\right)$

vel $S(1)=x+\frac{xx}{2}xx\left(1+\frac{3}{6}4x+\frac{3.5}{6.8}4^2x^2+\frac{3.5.7}{6.8.10}4^3x^3+\frac{3.5.7.9}{6.8.10.12}4^4x^4+\text{etc.}\right)$

At eſt

$$\sqrt{(1-4x)}=1-\frac{1}{2}4x-\frac{1.1}{2.4}4^2x^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}4^3x^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}4^4x^4-\text{etc.}$$

vnde $\frac{1.1}{2.4}.4^2x^2\left(1+\frac{3}{6}.4x+\frac{3.5}{6.8}.4^2x^2+\text{etc.}\right)=1-2x-\sqrt{(1-4x)}$

ergo

ergo $S(1) = x + \frac{1 - 2x - \sqrt{(1-4x)}}{4} = \frac{1 + 2x - \sqrt{(1-4x)}}{4}$

ſicque poſito $x = \frac{1}{4}$ fit $S(1) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ vt ſupra.

17. Ponamus nunc $n = 3$, ſitque $S(3) = Q$, exiſtente $S(1) =$

$$P = \frac{1 + 2x - \sqrt{(1-4x)}}{4}, \text{ ita vt ſit}$$

$$P = x + \tfrac{1}{2}xx + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}x^3 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \text{etc.}$$

$$Q = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^4 + \frac{4\cdot 5}{2\cdot 5}x^5 + \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 6}x^6 + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7}x^7 + \text{etc.}$$

Ex his colligitur:

$$Pxx - Q = \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5}x^5 - \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}x^6 - \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7}x^7 - \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8}x^8 - \text{etc.}$$

hincque differentiando

$$2Px + \frac{xx\,dP}{dx} - \frac{dQ}{dx} = 2xx - x^3 - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}.5x^4 - \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}.8x^5 - \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.11x^6 - \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.14x^7$$

at $\frac{xx\,dP}{dx} = xx + x^3 + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}.3x^4 + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}.4x^5 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.5x^6 + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.6x^7$

cuius triplum ad priorem additum praebet

$$2Px + \frac{4xx\,dP}{dx} - \frac{dQ}{dx} = 5xx + 2x^3 + 4.\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}x^4 + 4.\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^5 + 4.\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^6 + \text{etc.}$$

et $4Px = 4xx + 2x^2 + 4.\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}x^4 + 4.\frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4}x^5 + 4.\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^6 + \text{etc.}$

hinc $-2Px + \frac{4xx\,dP}{dx} - \frac{dQ}{dx} = xx$ et $dQ = 4xx\,dP - 2Px\,dx - xx\,dx$

vnde ob $dP = \frac{1}{2}dx + \frac{dx}{2\sqrt{(1-4x)}}$ colligitur

$$dQ = -\tfrac{1}{2}x\,dx + \tfrac{1}{2}x\,dx\sqrt{(1-4x)} + \frac{2xx\,dx}{\sqrt{(1-4x)}} = -\tfrac{1}{2}x\,dx + \frac{x\,dx}{2\sqrt{1-4x)}}$$

et integrando

$$Q = -\tfrac{1}{4}xx - \frac{(1+2x)}{24}\sqrt{(1-4x)} + \tfrac{1}{24}.$$

Ponatur $x = \frac{1}{4}$; quo caſu fit $P = \frac{3}{8}$, erit $Q = \frac{5}{192}$ ita vt ſit

$$S(1) = \tfrac{3}{8};\ S(3) = \tfrac{5}{192} \text{ et } -\tfrac{1}{8} + S(1) = \tfrac{1}{4};\ \frac{1}{4\cdot 2^4} - S(3) = -\tfrac{1}{96}.$$

18. Ponamus nunc in genere $S(n) = P$, et ſequentem ſummam $S(n+2) = Q$ erit

$$P = \frac{1}{n}x^n + \frac{n}{n+1}x^{n+2} + \frac{n+1}{2}x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2.\ 3}x^{n+3}$$
$$+ \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2.\ 3.\ 4.}x^{n+4} \text{ etc.}$$

$$Q = \frac{1}{n+2}x^{n+2} + \frac{n+2}{n+3}x^{n+3} + \frac{n+3}{2}x^{n+4} + \frac{(n+4)(n+6)}{2.\ 3}x^{n+5}$$
$$+ \frac{(n+5)(n+7)(n+8)}{2.\ 3.\ 4}x^{n+6}$$

ex quibus colligitur fore

$$Q = Px - \tfrac{1}{2}(n+1)\int P\,dx - \tfrac{1}{2}(n-1)xx\int \frac{P\,dx}{xx}.$$

Hinc ergo ex valore $S(n)$ definiri poteſt valor $S(n+2)$ excepto quidem caſu $n = 1$, quia tum in $\int \frac{P\,dx}{xx}$ occurret $\int \frac{dx}{x}$.

At quia iam conſtat caſus

$$S(3) = \frac{1 - 6xx - (1+2x)\surd(1-4x)}{24}$$

ſi hic pro P ſumatur, fiet

$$S(5) = Px - 2\int P\,dx - xx\int \frac{P\,dx}{xx},$$

quae per integrationem euoluta dat

$$S(5) = \tfrac{1}{60}(1 - 15xx + 10x^3 - (1+2x-9xx)\surd(1-4x)).$$

Poſito ergo $x = \frac{1}{4}$ fit $S(5) = \frac{7}{32.60} = \frac{7}{1920}$, ideoque

$$\frac{1}{6.2^6} - S(5) = -\frac{1}{960}.$$

19. Sit porro $n = 5$ et

$$P = \tfrac{1}{60}(1 - 15xx + 10x^3 - (1+2x-9xx)\surd(1-4x))$$

erit $S(7) = Px - 3\int P\,dx - 2xx\int \frac{P\,dx}{xx})$,

quibus integralibus euolutis tandem reperitur:

S(7)

$$S(7) = \tfrac{1}{112}\left(1 - 28xx + 56x^3 - 14x^4 - (1 + 2x - 22xx + 20x^3)\sqrt{(1-4x)}\right)$$

Poſito ergo $x = \frac{1}{4}$ fit

$$S(7) = \tfrac{1}{112}\left(1 - \tfrac{7}{4} + \tfrac{7}{8} - \tfrac{7}{128}\right) = \tfrac{9}{2^{11}.7}$$

hincque $\frac{1}{8.2^8} - S(7) = - \frac{1}{2^{10}.7}$.

Quare ſi, quae hactenus inuenimus, colligamus, etiam ſequentes valores coniectura facile obtinebimus:

$$S(1) - \tfrac{1}{2.2^2} = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{1.2.2^1}$$
$$S(3) - \tfrac{1}{4.2^4} = \tfrac{1}{96} = \tfrac{1}{3.4.2^3}$$
$$S(5) - \tfrac{1}{6.2^6} = \tfrac{1}{960} = \tfrac{1}{5.6.2^5}$$
$$S(7) - \tfrac{1}{8.2^8} = \tfrac{1}{2^{10}.7} = \tfrac{1}{7.8.2^7}.$$

20. Hinc igitur tandem pro Z ſequentem valorem adipiſcimur:

$$Z = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\alpha\pi^2}{3.4.2^2} - \tfrac{\beta\pi^4}{5.6.2^4} - \tfrac{\gamma\pi^6}{7.8.2^6} - \tfrac{\delta\pi^8}{9.10.2^8} - \tfrac{\varepsilon\pi^{10}}{11.12.2^{10}} - \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$1 + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} + \tfrac{1}{7^3} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\pi\pi Z, \text{ ſeu}$$

$$1 + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} + \tfrac{1}{7^3} + \text{etc.} = \tfrac{1}{8}\pi\pi - \tfrac{2\alpha\pi^4}{3.4.2^4} - \tfrac{2\beta\pi^6}{5.6.2^4} - \tfrac{2\gamma\pi^8}{7.8.2^8} - \text{etc.}$$

Cuius ſeriei vt ſummam inueſtigemus, conſideremus π tanquam quantitatem variabilem, factoque $\frac{\pi}{2} = \Phi$ ponamus

$$\tfrac{\alpha\Phi^4}{3.4} + \tfrac{\beta\Phi^6}{5.6} + \tfrac{\gamma\Phi^8}{7.8} + \tfrac{\delta\Phi^{10}}{9.10} + \text{etc.} = s$$

erit $\frac{dds}{d\Phi^2} = \alpha\Phi^2 + \beta\Phi^4 + \gamma\Phi^6 + \delta\Phi^8 + \text{etc.} = z$

vnde formemus:

$$\begin{array}{l} 2zz = 2\alpha\alpha\Phi^4 + 4\alpha\beta\Phi^6 + 4\alpha\gamma\Phi^8 + 4\alpha\delta\Phi^{10} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2\beta\beta \qquad + 4\beta\gamma. \end{array}$$

Iam quia $\beta = \frac{2\alpha\alpha}{5}$; $\gamma = \frac{4\alpha\beta}{7}$; $\delta = \frac{4\alpha\gamma + 2\beta\beta}{9}$ etc. erit

$$2\int zz\,d\Phi = \beta\Phi^5 + \gamma\Phi^7 + \delta\Phi^9 + \text{etc.} = z\Phi - \alpha\Phi^3$$

hincque

$$2zz\,d\Phi = z\,d\Phi + \Phi\,dz - 3\alpha\Phi\Phi\,d\Phi.$$

21. Cum nunc ſit $\alpha = \frac{1}{6}$, reperitur per integrationem

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\Phi}{2\,tang.\Phi},$$ vti tentanti patebit.

Hinc cum $dds = z\,d\Phi^2$, colligitur

$$\frac{ds}{d\Phi} = \int z\,d\Phi = \frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2}\int\frac{\Phi\,d\Phi}{tang.\Phi}$$

et $s = \frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{1}{2}\int d\Phi\int\frac{\Phi\,d\Phi}{tang.\Phi}$, ideoque

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{1}{8}\pi\pi - \frac{1}{2}\Phi\Phi + \int d\Phi\int\frac{\Phi\,d\Phi}{tang.\Phi}$$

et ob $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ſeu $\pi = 2\Phi$ erit

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \int d\Phi\int\frac{\Phi\,d\Phi}{tang.\Phi} = \frac{\pi}{2}\int\frac{\Phi\,d\Phi}{tang.\Phi} - \int\frac{\Phi\,\Phi\,d\Phi}{tang.\Phi}$$

$$= 2\int\Phi\,d\Phi\,l\,\text{ſin.}\Phi - \frac{\pi}{2}\int d\Phi\,l\,\text{ſin.}\Phi$$

at eſt $\int d\Phi\,l\,\text{ſin.}\Phi = -\frac{\pi\,l\,2}{2}$

ergo

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{4}\,l\,2 + 2\int\Phi\,d\Phi\,l\,\text{ſin.}\Phi$$

vbi integralibus ita ſumtis, vt euaneſcant, poſito $\Phi = 0$, ſtatui deinceps debet $\Phi = \frac{\pi}{2}$, vt obtineatur ſumma ſeriei propoſitae. Etſi autem integratio inſtitui nequit, tamen per quadraturas eius valor

valor definiri poteſt. At vero ipſa ſeries ante inventa per Z maxime eſt idonea ad ſummam proxime determinandam.

22. Hinc anſam arripio accuratius iſtam ſeriem perpendendi:

$$P = \frac{1}{n} x^n + \frac{n}{n+1} x^{n+1} + \frac{(n+1)}{2} x^{n+2} + \frac{(n+2)(n+4)}{2 \cdot 3} x^{n+3} + \frac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n+4} + \text{etc.}$$

cuius valores pro caſibus, quibus n eſt numerus integer impar, methodo ſingulari determinauimus, qui ita ſe habent:

ſi $n = 1$; $P = \frac{1}{4}(1+2x-\sqrt{}(1-4x)$

$n = 3$; $P = \frac{1}{24}(1-6xx-(1+2x)\sqrt{}(1-4x))$

$n = 5$; $P = \frac{1}{60}(1-15xx+10x^3-(1+2x-9xx)\sqrt{}(1-4x))$

$n = 7$; $P = \frac{1}{112}(1-28xx+56x^3-14x^4-(1+2x-22xx+20x^3)\sqrt{}(1-4x))$.

Quare cum ſummatio in genere ad aequationem differentialem reduci queat, operae pretium videtur examinare, quomodo his caſibus iſti valores ſatisfaciant. Conueniet autem potius differentialia conſiderari, quae ſunt

ſi $n = 1$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{}(1-4x)}\right)$

$n = 3$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{x}{\sqrt{}(1+4x)}\right)$

$n = 5$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}\left(-x + xx + \frac{x-3xx}{\sqrt{}(1-4x)}\right)$

$n = 7$; $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2}\left(-x + 3xx - x^3 + \frac{x-5xx+5x^3}{\sqrt{}(1-4x)}\right.$.

23. In genere autem eſt differentiando:

$$\frac{dP}{dx} = x^{n-1} + nx^n + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} x^{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n+2} + \text{etc.}$$

Ponamus $x = yy$ et $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{2y\,dy} = s$, vt habeamus

$$s = y^{2n-2} + ny^{2n} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2} y^{2n+2} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3} y^{2n+4} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$y^{2-n}s = y^n + ny^{n+2} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2} y^{n+4} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3} y^{n+6}$$

hincque porro:

$$\frac{dd.\,y^{2-n}s}{dy^2} = n(n-1)y^{n-2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1} y^n + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2} y^{n+2} + \text{etc.}$$

Eſt vero etiam:

$$\frac{1}{2\,dy} d.\,\frac{s}{yy} = (n-2)y^{2n-3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2} y^{2n-1} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3} y^{2n+1}$$

quae multiplicata per y^{5-2n} et denuo differentiata producit

$$\frac{1}{4\,dy^2} d.\left(y^{5-2n} d.\,\frac{s}{yy}\right) = n(n-1)y + \frac{n(n+1)(n+2)}{1} y^3 + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2} y^5 + \text{etc.}$$

quae ſeries per ſuperiorem etiam eſt

$$= \frac{y^{3-n}\,dd(y^{2-n}s)}{dy^2},$$

ita vt inter s et y hanc habeamus aequationem

$$d\left(y^{5-2n} d.\,\frac{s}{yy}\right) = 4y^{3-n}\,dd.\,(y^{2-n}s).$$

24.

24. Sumto elemento dy conſtante haec aequatio euoluta dat:

$$y^{3-2n}dds+(1-2n)y^{2-2n}dyds-4(1-n)y^{1-2n}sdy^2=$$
$$4y^{5-2n}dds+8(2-n)y^{4-2n}dyds+4(2-n)(1-n)y^{3-2n}sdy^2$$

quae per y^{2n-1} multiplicata abit in hanc:

$$\left.\begin{array}{l} yy(1-4yy)dds+(1-2n)ydyds-4(1-n)sdy^2 \\ \quad -8(2-n)y^2dyds-4(2-n)(1-n)yysdy^2 \end{array}\right\}=0$$

quae poſito $yy=x$ ſumtoque dx conſtante transformatur in hanc

$$\left.\begin{array}{l} xx(1-4x)dds+(1-n)xdxds-(1-n)sdx^2 \\ \quad -2(5-2n)xxdxds-(2-n)(1-n)sxdx^2 \end{array}\right\}=0$$

vbi eſt $s=\frac{dP}{dx}$ ſeu $P=\int sdx$. Integrationes autem hac lege inſtitui debent, vt exiſtente x infinite paruo fiat,

$$\frac{ds}{dx}=(n-1)x^{n-2};\ s=x^{n-1} \quad \text{et} \quad P=\frac{1}{n}x^n.$$

25. Si haec aequatio per ſeriem infinitam integretur, incipiendo a termino x^{n-1}, ipſa propoſita ſeries reproducitur, ſed etiam initium fieri poteſt a termino conſtante x^0, vnde quoque integrale obtinetur, quod autem noſtris conditionibus non ſatis facit; verum praeterea aliud integrale elici poteſt, quod cum illo coniunctim negotium conficit. Fingatur ergo

$$s=0+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+Fx^6+\text{etc.}$$

erit $\frac{ds}{dx}=A+2Bx+3Cxx+4Dx^3+5Ex^4+6Fx^5+\text{etc.}$

et $\frac{dds}{dx^2}=2B+6Cx+12Dxx+20Ex^4+38Fx^4+42Gx^5+\text{etc.}$

quibus

quibus ſeriebus ſubſtitutis fieri oportet:

$$\left.\begin{array}{llllll}
-(1-n)O & -(2-n)(1-n)Ox & -(2-n)(1-n)Ax^2 & -(2-n)(1-n)Bx^3 & -(2-n)(1-n)Cx^4 & -(2-n)(1-n)Dx^5 \\
 & +(1-n)A & +2(1-n)B & +3(1-n)C & +4(1-n)D & +5(1-n)E \\
 & -(1-n)A & -2(5-2n)A & -4(5-2n)B & -6(5-2n)C & -8(5-2n)D \text{ etc.} \\
 & & -(1-n)B & +6C & -(1-n)D & -(1-n)E \\
 & & +2B & -8B & +12D & +20E \\
 & & & & -24C & -48D
\end{array}\right\} = 0$$

quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$\left.\begin{array}{l}
-(1-n)O-(2-n)(1-n)Ox+(3-n)Bx^2+2(4-n)Cx^3+3(5-n)Dx^4+4(6-n)Ex^5 \\
\qquad -(3-n)(4-n)A-(5-n)(6-n)B-(7-n)(8-n)C-(9-n)(10-n)D \text{ etc.}
\end{array}\right\} = 0.$$

26. Singulis ergo terminis ad nihilum perductis, fieri debet $O = 0$ niſi ſit $n = 1$, at pro reliquis coefficientibus habebitur

$$B = \frac{(3-n)(4-n)}{1(3-n)} A = \frac{4-n}{1} A$$

$$C = \frac{(5-n)(5-n)}{2(4-n)} B = \frac{(4-n)(6-n)}{1.\ 2} A$$

$$D = \frac{(7-n)(8-n)}{3(5-n)} C = \frac{(6-n)(7-n)(8-n)}{1.\ 2.\ 3} A$$

$$E = \frac{(9-n)(10-n)}{4(6-n)} D = \frac{(7-n)(8-n)(9-n)(10-n)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} A$$

etc.

vnde lex progreſſionis eſt manifeſta. Caſu autem $n = 1$ quantitas O manet indefinita, tum autem aequationi ſatisfit, reliquis coefficientibus omnibus annihilatis, ita vt ſit $s = O$, etiamſi ex his determinationibus valores quoque finiti pro iis aſſumi poſſent veluti

$$B = \tfrac{3}{1} A;\ C = \tfrac{4.\ 5}{1.\ 2} A;\ D = \tfrac{5.\ 6.\ 7}{1.\ 2.\ 3} A \text{ etc.}$$

vnde integrale completum foret:

$$s = O + A + (x + \tfrac{3}{1} x^2 + \tfrac{4.\ 5}{1.\ 2} x^3 + \tfrac{5.\ 6.\ 7}{1.\ 2.\ 3} x^4 + \tfrac{6.\ 7.\ 8.\ 9}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^5 + \text{etc.}$$

27. Simili modo pro reliquis caſibus, quibus n eſt numerus integer, fit quidem $O = 0$, ſed A numerus arbitrarius, ſed praeterea alius quidam coeffi-

coefficiens etiam non definitur, quem propterea pro lubitu aſſumere licet. Quare ſi is $=0$ ponatur, habebitur integrale terminis finitis contentum, quod ita ſe habebit:

ſi $n=3$; $O=0$; A indef. $B=0$; $C=0$ etc.

ſi $n=4$; $O=0$; A indef. $B=a$; $C=0$ etc.

ſi $n=5$; $O=0$; A indef. $B=-A$; $C=0$; $D=0$ etc.

ſi $n=6$; $O=0$; A indef. $B=-2A$; $C=0$; $D=0$ etc.

ſi $n=7$; $O=0$; A indef. $B=-3A$; $C=A$; $D=0$; etc.

ſi $n=8$; $O=0$; A indef. $B=-4A$; $C=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}A$; $D=0$; $E=0$ etc.

ſi $n=9$; $O=0$; A indef. $B=-5A$; $C=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}A$; $D=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}A$; $E=0$

ſi $n=10$; $O=0$; A indef. $B=-6A$; $C=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}A$; $D=-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}A$; $E=0$

ſi $n=11$; $O=0$; A indef. $B=-7A$; $C=\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}A$; $D=-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}A$; $E=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A$.

28. Ecce ergo pro omnibus caſibus, quibus n eſt numerus integer poſitiuus praeter $n=2$ integralia particularia, vnde partes rationales formularum ſupra pro $\frac{dP}{dx}$ inuentarum colligi poſſunt:

ſi $n=1$; $s=O$

ſi $n=3$; $s=Ax$

ſi $n=4$; $s=Ax$

ſi $n=5$; $s=A(x-xx)$

ſi $n=6$; $s=A(x-2xx)$

ſi $n=7$; $s=A(x-3xx+x^3)$

ſi $n=8$; $s=A(x-4xx+3x^3)$

ſi $n=9$; $s=A(x-5xx+6x^3-x^4)$

ſi $n=10$; $s=A(x-6xx+10x^3-4x^4)$

ſi $n=11$; $s=A(x-7xx+15x^3-10x^4+x^5)$

ſi $n=12$; $s=A(x-8xx+21x^3-20x^4+5x^5)$.

29. Pro numero ergo quocunque n integrale hoc particulare eſt

$$s = A \left\{ x - \frac{(n-4)}{1} xx + \frac{(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2} x^3 - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^4 + \frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^5 - \text{etc.} \right\}$$

quae ſeries etſi in infinitum continuata ſatisfacit, tamen cum quispiam terminus euanuerit, ſequentes omnes omittere licet, quippe qui ſeorſim ſumti aliud integrale particulare praeberent.

Ceterum hinc euidens eſt, quamlibet harum formularum ex binis praecedentibus ita definiri, vt ſi pro caſibus $n = \nu$, $n = \nu + 1$, $n = \nu + 2$, valor ipſius s ponantur s, s', s'' futurum ſit

$$s'' = s' - sx$$

ſiquidem conſtans A in omnibus eundem valorem retineat. Atque vi huius legis pro caſu $n = 2$ ſtatui oportet $s = 0$. Verum vti iam monui, haec integralia particularia noſtris conditionibus non ſatisfaciunt, verumtamen partes rationales ſuppeditant vti mox videbimus.

30. Vt autem completa integralia eruamus, alia integralia particularia inueſtigemus, quae partes irrationales praebeant. In hunc finem ponamus

$$s = \frac{t}{\sqrt{(1-4x)}} \text{ erit } ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-4x)}} + \frac{2t\,dx}{(1-4x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{et } dds = \frac{ddt}{\sqrt{(1-4x)}} + \frac{4dx\,dt}{(1-4x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{12t\,dx^2}{(1-4x)^{\frac{5}{2}}}$$

quibus

quibus ſubſtitutis noſtra aequatio differentio - differentialis abibit in hanc formam:

$$\left.\begin{array}{l} xx(1-4x)ddt-(n-1)xdtdx+(n-1)tdx^2 \\ \quad -2(2n-3)xxdtdx-n(n-1)txdx^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Ponatur hic

$$t = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \text{etc.}$$

factaque ſubſtitutione peruenitur ad hanc aequationem:

$$0 = (n-1)A - n(n-1)A - (n-3)Cxx - 2(n-4)Dx^3 - 3(n-5)Ex^4 \;\text{etc.}$$
$$\qquad - (n-2)(n-3)B - (n-4)(n-5)C - (n-6)(n-7)D$$

niſi ergo $n = 1$ debet eſſe $A = 0$, et pro reliquis fit

$$C = -\frac{(n-2)(n-3)}{1(n-3)}B = -\frac{(n-2)}{1}B$$

$$D = -\frac{(n-4)(n-5)}{2(n-4)}C = +\frac{(n-2)(n-5)}{1.\,2}B$$

$$E = -\frac{(n-6)(n-7)}{3(n-5)}D = -\frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1.\,2.\,3}B.$$

31. Ex his ergo valores finiti ipſius t pro ſingulis numeris integris n ita ſe habebunt:

ſi $n = 1$; $t = A$
ſi $n = 2$; $t = Bx$
ſi $n = 3$; $t = Bx$
ſi $n = 4$; $t = B(x - 2xx)$
ſi $n = 5$; $t = B(x - 3xx)$
ſi $n = 6$; $t = B(x - 4xx + 2x^3)$
ſi $n = 7$; $t = B(x - 5xx + 5x^3)$
ſi $n = 8$; $t = B(x - 6xx + 9x^3 - 2x^4)$
ſi $n = 9$; $t = B(x - 7xx + 14x^3 - 7x^4)$
ſi $n = 10$; $t = B(x - 8xx + 20x^3 - 16x^4 + 2x^5)$

et in genere

$$t = B \left\{ x - \frac{(n-2)}{1} xx + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2} x^3 - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^4 + \frac{(n-2)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^5 - \text{etc.} \right\}$$

vbi iterum vt ante $t'' = t' - t\,x$.

32. Quemadmodum ſupra ſeriem P deſignauimus per $S(n)$, ſi ſeriem $s = \frac{dP}{dx}$ per $\Sigma(n)$ deſignemus, erit generatim

$\Sigma(1) = -A + \frac{B}{\sqrt{(1-4x)}}$ hic $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$

$\Sigma(2) = 0 + \frac{2Bx}{\sqrt{(1-4x)}}$ vt hae formae ad ſeriem propoſitam accommodentur.

$\Sigma(3) = Ax + \frac{Bx}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma(4) = Ax + \frac{B(x-2xx)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma(5) = A(x-xx) + \frac{B(x-3xx)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma(6) = A(x-2xx) + \frac{P(x-4xx+2x^3)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma(7) = A(x-3xx+x^3) + \frac{B(x-5xx+5x^3)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma(8) = A(x-4xx+3x^3) + \frac{B(x-6xx+9x^3-2x^4)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma(9) = A(x-5xx+6x^3-x^4) + \frac{B(x-7xx+14x^3-7x^4)}{\sqrt{(1-4x)}}$

$\Sigma(10) = A(x-6xx+10x^3-4x^4) + \frac{B(x-8xx+20x^3-16x^4+2x^5)}{\sqrt{(1-4x)}}$

etc.

33. Quoniam hi valores ſeriem recurrentem conſtituunt, cum quisque aequetur praecedentium vltimo, demto penultimo per x multiplicato, terminus generalis ſeu valor $\Sigma(n)$ finite exprimi poterit, erit enim ex proprietate ſerierum recurrentium:

$$\Sigma(n) = M \frac{(1+\sqrt{(1-4x)})^n}{2} + N \frac{(1-\sqrt{(1-4x)})^n}{2}$$

vbi

vbi ex binis primis coefficientes M et N ita definiuntur vt ſit

$$M = \frac{(A+B)(1-2x-\sqrt{(1-4x)})}{2x\sqrt{(1-4x)}} = \frac{A+B}{x\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^2$$

$$N = \frac{(B-A)(1-2x+\sqrt{(1-4x)})}{2x\sqrt{(1-4x)}} = \frac{B-A}{x\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^2$$

Cum autem pro noſtro caſu ſit $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$ erit

$$\Sigma(n) = \frac{1}{x\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^n$$

ſeu $\Sigma(n) = \frac{x}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2} = \frac{dP}{dx}$

exiſtente

$$P = \tfrac{1}{n}x^n + \tfrac{n}{n+1}x^{n+1} + \tfrac{(n+1)}{2}x^{n+2} + \tfrac{(n+2)(n+4)}{2.\ 3}x^{n+3} + \tfrac{(n+3)(n+5)(n+6)}{2.\ 3.\ 4}x^{n+4} + \text{etc.}$$

34. Huius ergo ſeriei valor, quem ponimus P eſt

$$P = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2}$$

ad quod integrale inueniendum ponatur $\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2} = y$ erit

$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-4x)}}$ et $x = y - yy$, vnde fit

$P = \int dy\,(y-yy)\,y^{n-2} = \frac{y^n}{n} - \frac{y^{n+1}}{n+1}$ ideoque

$P = \frac{n+1-ny}{n(n+1)}.\,y^n$ ſeu

$P = \frac{n+2+n\sqrt{(1-4x)}}{2n(n+1)}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^n = S(n)$ poſito $x = \frac{1}{4}$

vnde pro formulis ſupra (14) expoſitis colligitur

$$S(n) = \frac{n+2}{2^{n+1}\,n(n+1)}$$

hincque vti formulae ibi ſe habent:

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - S(n) = -\frac{1}{2^n(n+1)n}$$

quae expreſſio prorſus congruit cum iis, quas ſupra §. 19. ſola inductione nixi dedimus, ita vt nunc quidem nullum amplius dubium ſupereſſe poſſit.

35. Deinde memorabile eſt, huius aequationis differentio-differentialis

$$\left.\begin{aligned} xx(1-4x)dds-(n-1)xdxds+(n-1)sdx^2 \\ +2(2n-5)xxdxds-(n-1)(n-2)sxdx^2 \end{aligned}\right\} = 0$$

integrale completum et quidem algebraicum aſſignari poſſe, quod ex praecedentibus ita ſe habet:

$$s = \frac{Cx}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2} + \frac{Dx}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2}$$

quod quomodo per integrationem inde erui queat, non tam facile patet. Hinc tamen ſtatim intelligitur, ſubſtitutionem $s = \frac{xu}{\sqrt{(1-4x)}}$ plurimum eſſe profuturam, poſito enim in §. 30; $t = ux$ haec aequatio naſcitur

$$\begin{aligned} xx(1-4x)ddu-(n-3)xdxdu-(n-2)(n-3)xudx^2 = 0 \\ +2(2n-7)xxdxdu \end{aligned}$$ ſeu

$$\begin{aligned} x(1-4x)ddu-(n-3)dxdu-(n-2)(n-3)udx^2 = 0 \\ +2(2n-7)xdxdu \end{aligned}$$

cuius ergo integrale eſt

$$u = C\left[\frac{1+\sqrt{(1-4x)}}{2}\right]^{n-2} + D\left[\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right]^{n-2}.$$

36. Si in hac aequatione ponatur $\sqrt{(1-4x)}=y$, et elementum dy vt conſtans introducatur, prodibit iſta aequatio ſimplicior

$$(1-yy)ddu+2(n-3)ydydu-(n-2)(n-3)udy^2=0$$

cuius integrale iam eſſe conſtat:

$$u=C\left(\frac{1+y}{2}\right)^{n-2}+D\left(\frac{1-y}{2}\right)^{n-2}.$$

Quo igitur pateat, quomodo haec inde elici queat, ponamus $n=m+2$ vt habeamus:

$$(1-yy)ddu+2(m-1)ydydu-m(m-1)udy^2=0$$

vbi commode tentari poſſe patet hanc poſitionem

$$u=(\alpha+\beta y)^m$$

vnde fit

$$du=m\beta dy(\alpha+\beta y)^{m-1} \text{ et } ddu=m(m-1)\beta\beta dy^2(\alpha+\beta y)^{m-2}$$

quo facto erit

$$m(m-1)(\alpha+\beta y)^{m-2}(\beta\beta(1-yy)+2\beta(\alpha y+\beta yy)-\alpha\alpha-2\alpha\beta y-\beta\beta yy)=0$$

ideoque

$$\beta\beta=\alpha\alpha;\text{ ergo } u=C(1\pm y)^m.$$

Atque ob ſignum ambiguum obtinebitur integrale completum:

$$u=C(1+y)^m+D(1-y)^m.$$

37. Ceterum notaſſe iuuabit hanc poſtremam aequationem

$$(1-yy)ddu+2(m-1)ydydu-m(m-1)udy^2=0$$

reddi integrabilem, ſi diuidatur per $(1\pm y)^m$. Prior vero aequatio:

$$x(1-4x)ddu-(n-3)dxdu-(n-2)(n-3)udx^2=0$$
$$+2(2n-7)xdxdu$$

in-

integrabilis euadet ſi multiplicetur per

$$x^{-n+3}du-\frac{(n-2)}{2}x^{-n+2}u\,dx.$$

In genere autem propoſita hac aequatione

$$\left.\begin{matrix}xx(A+Bx)ddu+\frac{1}{2}(2\alpha+\lambda)Axdxdu+\frac{1}{2}\alpha(\lambda-2)Audx^2\\ +\frac{1}{2}(2\alpha+\lambda+1)Bxxdxdu+\frac{1}{2}\alpha(\lambda-1)Bxudx^2\end{matrix}\right\}=0$$

ſi ea multiplicetur per

$$x^{\lambda-2}du+\alpha x^{\lambda-3}u\,dx,$$

fiet integrabilis, eritque integrale:

$$\tfrac{1}{2}x^{\lambda}(A+Bx)du^2+\alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)ududx+\tfrac{1}{2}\alpha\alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)u^2dx^2=\tfrac{1}{2}Cdx^2$$

ſeu $x^{\lambda}du^2+2\alpha x^{\lambda-1}ududx+\alpha\alpha x^{\lambda-2}u^2dx^2=\frac{C\,dx^2}{A+Bx}$

ergo $x^{\frac{1}{2}\lambda}du+\alpha x^{\frac{1}{2}\lambda-1}u\,dx=\frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{(A+Bx)}}$ hincque

$$u=x^{-\alpha}\int x^{\alpha-\frac{1}{2}\lambda}\frac{dx\sqrt{C}.}{\sqrt{(A+Bx)}}$$

38. In hac autem aequatione generali noſtra ſuperior non continetur: quare conditiones aequationis huius

$$xx(A+Bx)ddu+x(C+Dx)dudx+(E+Fx)udx^2=0$$

accuratius inueſtigemus, vt per

$$x^{\lambda-2}du+\alpha x^{\lambda-3}u\,dx$$

multiplicata fiat integrabilis. Ac primo quidem integrale fit

$$\tfrac{1}{2}x^{\lambda}(A+Bx)du^2+\alpha x^{\lambda-1}(A+Bx)ududx+\frac{\alpha E}{\lambda-2}x^{\lambda-2}uudx^2+\frac{\alpha F}{\lambda-1}u^2dx^2=Gdx^2$$

requiritur autem, vt ſit primo

$$C=(\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda)A;\quad D=(\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2})B$$

tum

tum vero triplici modo

I. vel $E=\frac{1}{2}\alpha(\lambda-2)A$ et $F=\frac{1}{2}\alpha(\lambda-1)B$ qui eſt caſus ſuperior

II. vel $\lambda=2\alpha+2$; $F=\frac{1}{2}\alpha(2\alpha+1)B$ manente E indefinito

III. vel $\lambda=2\alpha+1$; $E=\frac{1}{2}\alpha(2\alpha-1)A$ manente F indefinito.

39. En ergo duas aequationes differentio-differentiales ſatis late patentes, quas hac methodo integrale licet:

I. $$xx(A+Bx)ddu+(2\alpha+1)Axdxdu+E\,u\,dx^2 + (2\alpha+\tfrac{3}{2})Bxxdxdu+\tfrac{1}{2}\alpha(2\alpha+1)Bxudx^2=0$$

quae per

$$x^{2\alpha}\,du+\alpha\,x^{2\alpha-1}\,u\,dx$$

multiplicata integrale dat

$$\tfrac{1}{2}x^{2\alpha+2}(A+Bx)du^2+\alpha x^{2\alpha+1}(A+Bx)ududx+\tfrac{1}{2}Ex^{2\alpha}uudx^2 + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha Bx^{2\alpha+1}uudx^2=Gdx^2.$$

Altera vero forma eſt

II. $$xx(A+Bx)ddu+(2\alpha+\tfrac{1}{2})A\,x\,dxdu+\tfrac{1}{2}\alpha(2\alpha-1)Audx^2 + (2\alpha+1)Bxxdxdu+ Fxudx^2=0$$

quae per

$$x^{2\alpha-1}\,du+\alpha\,x^{2\alpha-2}\,u\,dx$$

multiplicata iſtud ſuppeditat integrale:

$$\tfrac{1}{2}x^{2\alpha+1}(A+Bx)du^2+\alpha x^{2\alpha}(A+Bx)ududx+\tfrac{1}{2}\alpha\alpha Ax^{2\alpha-1}u^2dx^2 + \tfrac{1}{2}F\,x^{2\alpha}\,u^2\,dx^2=G\,dx^2.$$

In priori ſi ponatur $A=1$, $B=-4$ et $2\alpha+1=-n+3$, atque $E=0$ prodit aequatio in §. 35 propoſita.

40. Verum alia datur via ſummam progreſſionis §. 23

$$\frac{dP}{dx} = x^{n-1} + \frac{n}{1}x^n + \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}x^{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3}x^{n+2} + \text{etc.}$$

inueſtigandi, in qua quia x vt conſtans ſpectatur, conſideremus hanc ſeriem

$$s = 1 + \frac{n}{2}a^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2.\ 4}a^4 + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\ 4.\ 6}a^6 + \text{etc.}$$

vbi $aa = 2x$ et $\frac{dP}{dx} = x^{n-1}s$. Iam in ſubſidium vocetur haec ſeries

$$\frac{(1+ay)^{-n+1} + (1-ay)^{-n+1}}{2} = 1 + \frac{(n-1)n}{1.\ 2}aay^2 + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4y^4 + \text{etc.}$$

pro vna ſcribamus breuitatis gratia

$$1 + Aa^2y^2 + Ba^4y^4 + Ca^6y^6 + \text{etc.}$$

eritque

$$s = 1 + \frac{1}{n-1}Aa^2 + \frac{1.\ 2}{(n-1)n}Ba^4 + \frac{1.\ 3.\ 5}{(n-1)(n+1)}Ca^6 \text{etc.}$$

Statuatur nunc

$$s = \tfrac{1}{z}\int dz(1 + Aa^2y^2 + Ba^4y^4 + Ca^6y^6 + \text{etc.})$$

ac fieri oportet

$$\int yydz = \frac{1}{n-1}\int dz$$

$$\int y^4dz = \frac{2}{n}\int yydz$$

$$\int y^6dz = \frac{5}{n+1}\int y^4dz$$

ideoque ingenere

$$\int y^{2\lambda}dz = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2}dz$$

ſi poſt integrationem ipſi y certus valor tribuatur.

41. Ponamus ergo eſſe ingenere:

$$\int y^{2\lambda}\, dz = \frac{2\lambda - 1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2}\, dz + \frac{Q\, y^{2\lambda-1}}{n+\lambda-2}$$

hincque differentiando et per $y^{2\lambda-2}$ diuidendo colligitur

$$(n+\lambda-2)\, yy\, dz = (2\lambda-1)\, dz + y\, dQ + (2\lambda-1)\, Q\, dy$$

quae aequatio pro omnibus numeris λ locum habere debet, vnde erit

tam $yy\, dz = 2\, dz + 2\, Q\, dy$

quam $(n-2)\, yy\, dz = -dz + y\, dQ - Q\, dy$

ergo $dz = \frac{2\, Q\, dy}{yy-2} = \frac{y\, dQ - Q\, dy}{(n-2)\, yy+1}$ vnde fit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{-(2n-3)\, y\, dy}{2-yy}, \quad \text{et } Q = (2-yy)^{n-\frac{3}{2}}$$

hincque

$$dz = -2\, dy\, (2-yy)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Quare poſito poſt integrationem

$$y = \sqrt{2} \text{ fit } \int y^{2\lambda}\, dz = \frac{2\lambda-1}{n+\lambda-2}\int y^{2\lambda-2}\, dz$$

reperiturque

$$s = \frac{\int dy\, (2-yy)^{n-\frac{1}{2}}\left((1+ay)^{-n+1} + (1-ay)^{-n+1}\right)}{2\int dy\, (2-yy)^{n-\frac{1}{2}}}$$

ſi poſt integrationem ponatur $y = \sqrt{2}$.

42. Etſi autem haec methodus ſtatim pro ſumma quaeſita formulam integralem exhibet, tamen

verum valorem in expreſſione algebraica non oſtendit. In ſuperioribus autem vidimus eſſe

$$\frac{dP}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2},$$

vnde concludimus fore hic

$$s = \frac{x^{2-n}}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{\sqrt{(1-4x)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2x}\right)^{n-2}.$$

Quare ſi ſtatuamus $2x = aa$, et ſuperioris formulae integralis caſu $y = \sqrt{2}$ erit valor algebraicus:

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1-2aa)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-2aa)}}{aa}\right)^{n-2}$$

quae circumſtantia minime contemnenda videtur, cum forte hinc plura alia praeclara in hoc genere deriuare liceat.

DIGRES-

DIGRESSIO DE TRAIECTORIIS TAM ORTHOGONALIBVS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quaeſtionem de traiectoriis fere obſoletam, in ſcenam reuocaturi, primum accurate explicare debemus, qua ratione naturam et indolem curuarum ſecandarum in calculum introduci conueniat, deinde methodum exponere debemus, cuius ope traiectoriae determinari queant.

2. Quod primum ad curuas ſecandas attinet, ante omnia aequatio earum naturam exprimens eſt perpendenda et quoniam innumerabiles lineae ſub eadem aequatione comprehendi debent, praeter coordinatas x et y quantitas quaepiam tanquam parameter, quam littera a deſignabimus, in aequatione ineſſe debet, quae in infinitum variata omnes curuas ſecandas exhibeat, ita ſcilicet vt quamdiu litterae a idem valor tribuitur, aequatio habeatur pro vna quadam determinata linea ſecunda, dum autem valor huius litterae ſucceſſiue vel augetur vel diminuitur, ad alias continuo lineas ſecandas perueniamus. Ita ſi aequatio propoſita fuerit $yy = ax$, in ea continentur omnes parabolae ſuper eodem axe deſcri-

ptae et eodem vertice praeditae, at ratione parametri a vtcunque inter ſe diſcrepantes. At haec aequatio $yy = fx + af$ vbi f ſit quantitas vere conſtans, continebit infinitas parabolas ſuper eodem axe, eadem parametro f deſcriptas, ſed quarum vertices per axem continuo proferuntur, ſcilicet eadem parabola ſuper axe promota omnes curuas ſecandas repraeſentabit. Porro aequatio $y = ax$ complectitur omnes lineas rectas ex eodem puncto eductas; at haec aequatio $yy = aa - xx$, praebet omnes circulos ex eodem centro deſcriptos.

De natura curuarum ſecandarum.

3. Ante igitur quam quaeſtio de traiectoriis ſuſcipiatur, aequatio omnes curuas ſecandas complectens, probe eſt perpendenda, quae vti iam notauimus, praeter coordinatas parametrum variabilem a continere debet, quam olim etiam moduli nomine indicauerunt, praeter quam aliae conſtantes quaecunque veluti f, g, h ineſſe poſſunt, quippe quae pro omnibus curuis eosdem valores retineant. Huiusmodi autem aequationum plura genera diuerſa conſiderari merentur, ad quorum primum merito referuntur omnes aequationes algebraicae, cuiuscunque fuerint gradus; ad ſecundum referamus eas aequationes, quae quidem ſunt tranſcendentes, verum tamen vel logarithmos vel arcus circulares inuoluunt, quandoquidem hae quantitates nunc quidem perinde ac algebraicae tractari ſolent. Veluti ſi fuerit

$$y = a\,\text{Ang.\,ſin.}\sqrt{(2ax - xx)} - \sqrt{(2ax - xx)}$$

in

in hac aequatione omnes cycloides ſuper eadem baſi deſcriptae exprimuntur, quomodocunque circulus genitor immutetur. Tertium vero genus deſtinatum ſit aequationibus differentialibus, quas quidem non niſi tranſcendenter integrare liceat, cuiusmodi ſupra occurrit $dy = \frac{A\,dx}{\surd(XX - AA)}$ vbi X functio quaecunque ipſius x et A ipſius a. Circa talem aequationem nihil omnino ſtatuere licet, niſi ante accurate fuerit definitum, qua lege integratio fieri ſit intelligenda, vtrum ſcilicet noua conſtans per integrationem introducenda, pendeat a parametro a nec ne? quod iudicium ita facillime inſtitui poſſe videtur, vt dicamus integrationem ita eſſe inſtituendam, vt ſumto $x = b$, fiat $y = c$, quippe quo pacto integratio determinatur, tum autem liberum nobis relinquitur, vtrum hae litterae b et c ſint vere conſtantes, an certo quodam modo a parametro a pendeant? Manifeſtum autem eſt in quaeſtione circa traiectorias iſtam indolem quantitatum b et c imprimis ſpectari debere, etiamſi earum neutra in ipſa aequatione differentiali occurrat.

4. Perinde fere ſe res habet, quando pro curvis ſecandis aequatio quaecunque differentialis datur, in quo quartum genus conſtituimus veluti $dy = V\,dx$, vbi V ſit functio quaecunque tam ipſarum x et y quam parametri a, etiamſi enim huiusmodi aequationem forſan nullo modo ad integrationem vel ſaltem ad ſeparationem perducere liceat, tamen ratio integrationis apud nos conſtituta eſſe debet, vt poſito

ſito $x = b$ fiat $y = c$, vbi iterum definiri oportet an et quanam ratione haec quantitates b et c a parametro a pendeant, atque hoc quidem iudicium ſi res in genere ſpectetur vtique erit difficillimum.

5. Multo vero adhuc difficilius negotium expedietur, quando aequatio pro curuis ſecandis eſt quidem tantum differentialis primi gradus, ſed vbi ipſa differentialia ad plures dimenſiones exſurgunt, quo *quintum* genus ponamus, quod ita commodiſſime deſcribi poteſt, vt ſi breuitatis gratia $\frac{dy}{dx} = p$, aequatio pro curuis ſecandis vtcunque compoſita fuerit ex quantitatibus x, y, p et parametro a, interim tamen pro determinatione curuarum ſecandarum eadem ſunt tenenda, quae iam ante praecepimus. At ſi aequatio pro curuis ſecandis adeo ad differentialia ſecundi gradus aſcendat, multo maiore circumſpectione erit opus, cum ea duplicem integrationem requirat, et vtriusque conſtantis ingreſſae indoles perfecte debeat eſſe perſpecta, quin etiam has binas conſtantes ſollicite a ſe inuicem diſtingui oportet, ex quo huiusmodi quaeſtiones etiamnunc vix in conſiderationem duci poſſunt.

De Traiectoriis in genere.

Tab. II. Fig. 1. 6. Conſtituta aequatione pro curuis ſecandis, cuiuscunque ſint generis, ſit curua A M in vna earum, pro qua parameter $= a$, pro puncto autem M coordinatae I P $= x$ et P M $= y$, ita vt detur certa aequatio inter has tres quantitates x, y et a, deinde

inde vero ſit E M μ traiectoria quaecunque, cuius cum punctum M ipſi commune ſit cum curua ſecanda A M, etiam communes habebit coordinatas x et y, verum quatenus hae coordinatae ad traiectoriam referuntur, aequatio inter x et y maxime diſcrepabit a ſuperiore, dum ſcilicet in hac parameter a neutiquam ineſſe debet, quoniam eadem traiectoria ad omnes ſecandas aeque refertur, ex quo iam intelligitur, quemadmodum ad aequationem pro traiectoria peruenire queamus, conditio ſcilicet ſectionis ſuppeditabit nobis certam aequationem, in quam tres quantitates x, y et a vtcunque ingrediantur, vnde ſi hanc aequationem cum praecedente combinemus, parametrum a inde per methodos notas eliminare poterimus atque aequatio reſultans inter x et y erit ipſa aequatio quaeſita pro traiectoria.

7. Cum nunc in problemate traiectoriarum angulus m M μ, quem traiectoria cum quauis ſecandarum facit, conſtans atque adeo datus eſſe debeat, ponamus eius tangentem $= \alpha$, atque vt eius valorem inueſtigemus, conſideretur applicata proxima $p\,m\,\mu$ curuae ſecandae in m, traiectoriae vero in μ occurrens, atque pro traiectoria fractio $\frac{dy}{dx}$ exprimet tangentem anguli μ M n, at pro angulo m M n inveniendo differentietur aequatio data pro curuis ſecandis et quia etiam parameter a ibi variabilis habetur, orietur inde huiusmodi aequatio differentialis:

$$dy = p\,dx + q\,da$$

vbi quantitates p et q quomodocunque litteras x, y et a inuoluant, quo facto, cum pro curua A M m parameter a eadem maneat, habebitur pro elemento M m, $\frac{nm}{Mn} = p$,

quae eſt tangens anguli m M n, vnde colligitur differentiae horum angulorum μ M m tangens

$$= \frac{dy - p\,dx}{dx + p\,dy} = \alpha$$

ſicque iam habemus alteram illam aequationem quae erit $dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$,

quam cum aequatione pro curuis ſecandis data coniungere, indeque parametrum a eliminare debemus, vt obtineamus aequationem inter x et y, qua natura traiectoriae exprimetur; probe autem hic animaduertendum eſt, etiamſi in aequatione inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(p + \alpha),$$

bina tantum differentialia dx et dy inſint, tamen parametrum a quatenus ſcilicet in littera p inuolui tur, pro variabili haberi debere.

8. Quod ſi ergo eueniat, vt littera p parametrum a non inuoluat, ſed tantum ex ipſis coordinatis x et y componatur, tum aequatio inuenta

$$dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$$

quia tantum duas variabiles x et y continet, naturam traiectoriae adaequate exprimet, tantum enim opus eſt, vt eius integrale inueſtigetur. At ſi quantitas p etiam parametrum a contineat, tum ex aequatione finita pro curuis ſecandis data quaeratur

valor

valor ipſius a per x et y expreſſus, qui in quantitate p loco a ſubſtitutus, praebebit aequationem differentialem puram pro traiectoria quaeſita, veluti ſi curuae ſecundae fuerint rectae ex eodem puncto a ductae, pro quibus habeatur haec aequatio $y = a x$ erit $p = a$ et $q = x$, vnde altera aequatio fit

$$dy(1 - \alpha a) = dx(\alpha + a)$$

in qua ſi ex aequatione data ſcribatur $a = \frac{y}{x}$, prodibit pro traiectoria haec aequatio differentialis

$$dy(x - \alpha y) = dx(\alpha x + y),$$

quae quum ſit homogenea poſito $y = u x$ transformatur in hanc

$$\frac{\alpha dx}{x} = \frac{du(1 - \alpha u)}{1 + uu} = \frac{du}{1 + uu} - \frac{\alpha u du}{1 + uu},$$

cuius integrale eſt:

$$\alpha l x = \text{Ang. Tang.} u - \alpha L \sqrt{(1 + uu)} + \alpha L c,$$

vnde fit

$$\alpha L \frac{x\sqrt{(1 + uu)}}{c} = \text{Ang. Tang.} u$$

ſiue etiam

$$\alpha L \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{c} = \text{Ang. Tang.} \frac{y}{x},$$

qua aequatione natura ſpiralis logarithmicae exprimitur, niſi ſit $\alpha = \infty$, ſeu angulus interſectionum rectus, quo caſu fit $\sqrt{(xx + yy)} = c$, pro circulo.

9. Verum ſaepenumero vſu venit, vt ex aequatione data valorem ipſius a haud commode deriuare liceat, neque adeo eius loco ſubſtitutio in altera aequatione fieri queat, tum autem perpenden-

 dum

dum eſt, ad cognitionem traiectoriae non abſolute requiri aequationem puram inter coordinatas x et y, ſed ſufficit, dummodo eliciatur aequatio differentialis, duas tantum variabiles inuoluens, ita ſi pro curuis ſecandis applicata y aequetur functioni cuicunque ipſarum x et a eaque differentiata praebeat

$$dy = p\,dx + q\,da$$

ita vt p et q tantum ſint functiones ipſarum x et a, tum iſte valor loco dy ſcribatur in aequatione inventa, et reſultabit haec aequatio:

$$\alpha\,dx(1 + pp) - q\,da(1 - \alpha p) = 0,$$

quae quia tantum duas continet variabiles a et x, ea valor ipſius x per a determinari poterit, id quod ad traiectoriam conſtruendam ſufficit, tum enim pro qualibet curua ſecanda A M m, vbi parameter a certum ſortitur valorem, definietur abſciſſa I P $= x$ vnde ipſum punctum M, quod ſimul eſt in traiectoria, innoteſcit, ſicque omnia plane traiectoriae puncta reperientur. Veluti ſi fuerit

$$y = a\sqrt{(1 - xx)}, \text{ erit } p = \frac{-ax}{\sqrt{(1 - xx)}} \text{ et } q = \sqrt{(1 - xx)},$$

qui valores in illa aequatione ſubſtituti praebent

$$\alpha dx(1 - xx + aaxx) - da(1 - xx)(\alpha ax + \sqrt{(1 - xx)}) = 0.$$

Sin autem ſtatim eliminamus a ex aequatione

$$dy\left(1 + \frac{\alpha a x}{\sqrt{(1 - xx)}}\right) = dx\left(\alpha - \frac{ax}{\sqrt{(1 - xx)}}\right)$$

ponendo $a = \frac{y}{\sqrt{(1 - xx)}}$, prodibit

$$dy(1 - xx + \alpha yx) = dx(\alpha - \alpha xx - yx),$$

vnde

vnde pro caſu traiectoriarum orthogonalium, vbi $x = \infty$, fit

$$x y d y = d x (1 - x x),$$

quae per x diuiſa et integrata praebet

$$\tfrac{1}{2} x x + \tfrac{1}{2} y y = l\tfrac{x}{c},$$

quae eſt aequatio finita pro traiectoria orthogonali.

10. Quo autem hoc argumentum in ſe maxime diffuſum ordine pertractemus, ſequentes caſus diſtinctius euoluamus.

Caſus Primus quo parameter aequatur functioni cuicunque binarum coordinatarum x et y. Si aequatio pro curuis ſecandis ita fuerit comparata, vt ex ea valor parametri a commode per functionm ipſarum x et y determinari poſſit, facta differentiatione prodeat:

$$d a = P d x + Q d y$$

vbi P et Q erunt certae functiones ipſarum x et y, quae vti conſtat ita a ſe inuicem pendent, vt ſit

$$\left(\frac{d P}{d y}\right) = \left(\frac{d Q}{d x}\right),$$

quoniam ergo pro eadem parametro a ſit

$$\frac{d y}{d x} = -\frac{P}{Q},$$

ponatur hic valor in ſuperiori aequatione inuenta loco p, et pro traiectoria haec obtinebitur aequatio

$$d y (Q + \alpha P) = d x (\alpha Q - P),$$

quae ergo eſt aequatio differentialis, qua relatio inter ipſas coordinatas traiectoriae exprimitur, ad quam integrandam quaeri oportet eiusmodi functionem

 ipſa-

ipſarum x et y, per quam ea aequatio multiplicata reddatur integrabilis.

11. Quod hic de ipſa parametro a eſt allatum, valet etiam de functione quacunque parametri, quae ſit $= A$, ſi enim pro curuis ſecandis fuerit $A =$ functioni ipſarum x et y, ponatur que

$$d A = P d x + Q d y$$

habebitur vtique vt ante pro traiectoriis haec aequatio:

$$d y (Q + \alpha P) = d x (\alpha Q - P),$$

ita ſi fuerit

$$A = a^m = x^n + y^n \text{ fit } P = n. x^{n-1} \text{ et } Q = n. y^{n-1}$$

vnde pro traiectoriis habebitur haec aequatio

$$d y (y^{n-1} + \alpha x^{n-1}) = d x (\alpha y^{n-1} - x^{n-1})$$

quod ſi ergo traiectoriae orthogonales eſſe debeant, ſeu $\alpha = \infty$ aequatio erit

$$x^{n-1} d y = y^{n-1} d x,$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{y^{n-2}} - \frac{1}{x^{n-2}} = \frac{1}{c^{n-2}},$$

vbi excipi debet caſus $n = 2$, quo fit

$$\frac{d y}{y} = \frac{d x}{x},$$

hincque

$$L y = L x + L c, \text{ ſeu } y = c x.$$

12. Vt hunc caſum exemplis aliquanto generalioribus quoque illuſtremus, ſit X functio quaecunque

que ipſius x et Y functio quaecunque ipſius y, ponaturque breuitatis gratia

$$dX = X' dx \text{ et } dY = Y' dy,$$

quo poſito ſit pro curuis ſecandis

$$A = X + Y, \text{ erit } P = X' \text{ et } Q = Y',$$

vnde pro traiectoriis habebitur iſta aequatio:

$$dy(Y' + \alpha X') = dx(\alpha Y' - X'),$$

hincque pro orthogonalibus

$$X' dy = Y' dy \text{ ſeu } \frac{dy}{Y'} = \frac{dx}{X'}.$$

13. Ponamus nunc pro curuis ſecandis huiusmodi dari aequationem,

$$A = XY \text{ eritque } P = X'Y, \; Q = XY'$$

atque hinc pro traiectoriis naſcetur haec aequatio differentialis

$$dy(XY' + \alpha X'Y) = dx(\alpha XY' - X'Y)$$

hincque pro orthogonalibus

$$\frac{Y dy}{Y'} = \frac{X dx}{X'},$$

ita ſi fuerit

$$X = x^m, \; Y = y^n,$$

ita vt pro curuis ſecandis proponatur haec aequatio

$$A = x^m y^n,$$

quae aequatio infinitas tam parabolas quam hyperbolas ſuperiorum ordinum continet, tum ob

$$X' = m.\, x^{m-1} \text{ et } Y' = ny^{n-1},$$

pro traiectoriis orthogonalibus oritur haec aequatio

$$\frac{y\,dy}{n} = \frac{x\,dx}{m},$$

cuius

cuius integrale eſt

$$\tfrac{1}{n}yy - \tfrac{1}{m}xx = \pm cc,$$

quae ſemper eſt pro ſectione conica idque vel ellipſi vel hyperbola.

14. *Caſus Secundus*, quo applicata y aequatur functioni cuicunque parametri a et abſciſſae x. Pro hoc caſu prodeat per differentiationem:

$$dy = P\,dx + Q\,da$$

vbi P et Q ſunt certae functiones ipſarum a et x atque eiusmodi, vt ſit $\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quare quum manente a hinc ſit $\frac{dy}{dx} = P$, hic valor loco p in aequatione generali ſupra inuenta ſubſtitutus, dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$dy\,(1 - \alpha P) = dx\,(\alpha + P)$$

quae quum adhuc tras variabiles contineat loco dy valor modo datus ſubſtituatur, ſicque orietur haec aequatio

$$Q\,da\,(1 - \alpha P) = \alpha\,dx\,(1 + PP)$$

quae tantum duas variabiles x et a continet, vnde pro quauis parametro a hoc eſt pro qualibet curuarum ſecandarum definiri poteſt abſciſſa $\text{I}\,P = x$, hincque ipſum punctum M in traiectoria ſitum, quod ad curuam conſtruendam ſufficit. Pro traiectoriis ergo orthogonalibus habebitur haec aequatio

$$-PQ\,da = dx\,(1+PP) \text{ ſiue } dx\,(1+PP) + PQ\,da = 0$$

ſicque totum negotium iam huc redit, vt huius aequationis integrale inueſtigetur.

15.

15. Quodſi hic pro exemplis ſtatuere vellemus $y = A + X$ vel $y = AX$ perſpicuum eſt haec eadem exempla iam caſu praecedente eſſe pertractata, contemplemur ergo hoc exemplum ſatis memorabile

$$y = \sqrt{(2ax - xx)},$$

ita vt curuae ſecandae ſint circuli infiniti, ſe mutuo tangentes in eodem puncto A, quorum centra in eandem rectam cadant. Hinc igitur erit

$$P = \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - xx)}}, \quad Q = \frac{x}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

hincque

$$1 + PP = \frac{aa}{2ax - xx},$$

vnde pro traiectoria orthogonali prouenit haec aequatio

$$aadx + (ax - xx)da = 0,$$

quae per $a^2 xx$ diuiſa dat

$$\frac{adx + xda}{aaxx} - \frac{da}{a^3} = 0,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{1}{ax} - \frac{1}{2aa} = \pm \frac{1}{2cc}, \text{ ſiue}$$

$$cc(2a - x) = \pm aax$$

quae abit in hanc

$$cc(2ax - xx) = \pm aaxx,$$

quum autem ſit

$$2ax - xx = yy$$

radice extracta ſit

$$cy = ax = \frac{xx + yy}{2},$$

ita vt eliminata a, pro traiectoria orthogonali oriatur haec aequatio

$$2cy = xx + yy,$$

quae etiam eſt pro circulo.

16. *Caſus Tertius*, quo abſciſſa x aequatur functioni y et parametri a. Praebeat haec aequatio differentiata

$$dx = P\,dy + Q\,da$$

vbi P et Q erunt tales functiones ipſarum y et a vt ſit $\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$; iam quum manente a hinc fiat $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P}$, hic valor loco p ſupra ſubſtitutus dabit pro traiectoriis hanc aequationem

$$dy(P - \alpha) = dx(1 + \alpha P)$$

in qua loco dx valor ſuperior ſubſtituatur, vt obtineatur ſequens aequatio duas tantum variabiles y et a inuoluens

$$Q\,da(1 + \alpha P) + \alpha\,dy(1 + PP) = 0$$

cuius reſolutio conſtructionem traiectoriarum ſuppeditabit.

17. Hinc ſi traiectoriae debeant eſſe orthogonales ſeu $\alpha = \infty$ pro iis habebitur haec aequatio:

$$PQ\,da + dy(1 + PP) = 0$$

at ſi angulus interſectionis debeat euaneſcere, quod euenit ſi traiectoria curuas propoſitas, tangat ob $\alpha = 0$ habebitur haec aequatio $Q\,da = 0$, ſiue $Q = 0$, quae eſt aequatio finita, ex qua y per a vel viciſſim a per y definiri poterit, vnde reſultabit eiusmodi

modi traiectoria, quae omnes curuas ſecandas contingat, veluti ſi fuerit, $x = \frac{2ay - aa}{f}$, quae eſt pro infinitis rectis certo modo in plano ductis, ob $Q = \frac{2y - 2a}{f}$, haec aequatio $y = a$ praebebit lineam curuam omnes rectas illas tangentem, cuius aequatio inter coordinatas x et y ob $a = y$ erit $x = \frac{yy}{f}$, quae eſt pro parabola parametro f deſcripta. Caeterum quum coordinatae inter ſe ſint permutabiles, hic caſus a praecedente non differre eſt cenſendus.

18. *Caſus Quartus*, quo aequatio pro curuis ſecandis inter coordinatas x, y et parametrum a eſt homogenea, ita vt hae tres quantitates vbique eundem dimenſionum numerum adimpleant. Quoniam aequatio inter x, y et a propoſita eſt homogenea, ſi faciamus has ſubſtitutiones $x = at$ et $y = au$, parameter a per diuiſionem penitus tolletur, ita vt reſultet aequatio duas tantum variabiles t et u inuolvens, qua ergo certa relatio inter t et u exprimetur, vnde ſumtis differentialibus prodire ponamus $du = v\,dt$, ita vt tam u quam v vt functiones ipſius t ſpectari queant. Hinc autem differentiando adipiſcimur:

$$dx = a\,dt + t\,da \text{ et } dy = av\,dt + u\,da$$

hinc ergo pro eadem curua ſecanda A M, quia parameter a manet eadem, erit $dx = a\,dt$ et $dy = av\,dt$ vnde fit $\frac{dy}{dx} = v$, qui valor in aequatione generali ſupra inuenta loco p ſcribi debet, ſcribantur autem

 ibidem

ibidem loco dy et dx, valores modo exhibiti, atque pro traiectoriis obtinebitur iſta aequatio

$$(avdt+uda)(1-\alpha v)=(adt+tda)(\alpha+v)$$

quae tantum duas continet variabiles t et a, ex qua elicimus

$$da(u-\alpha uv-\alpha t-tv)=\alpha adt(1+vv)$$

quae ſponte eſt ſeparabilis et praebet

$$\frac{da}{a}=\frac{\alpha dt(1+vv)}{(u(1-\alpha v)-t(\alpha+v))}.$$

19. Hac ergo aequatione parameter a aequabitur certae functioni ipſius t, quae ſi loco a in aequationibus principalibus, $x=at$ et $y=au$ ſubſtituatur, tam pro x quam pro y certas functiones ipſius t conſequimur, vnde natura traiectoriae facillime perſpicitur, quin etiam ſi ex his aequationibus quantitas t eliminetur; peruenietur ad aequationem puram inter ipſas coordinatas x et y pro traiectoria quaeſita, quae quum nouam conſtantem verbi gratia c inuoluat per integrationem ingreſſam, ea variata infinitas nanciſcemur traiectorias, quod quo facilius perſpiciatur, ponamus eſſe

$$\int\frac{\alpha dt(1+vv)}{(u(1-\alpha v)-t(\alpha+vv))}=\text{L}\,\text{T}$$ eritque integrando

$a=c\text{T}$, vnde pro traiectoriis has reperimus formulas $x=c\text{T}t$ et $y=c\text{T}u$.

20. Quodſi hunc caſum accuratius perpendamus, facile deprehendemus, omnes curuas ſecandas hoc caſu ſimiles inter ſe fore. Conſideretur enim curua determinata, cuius abſciſſa ſit t, applicata vero u,

ſit igitur D V haec curua determinata, cuius abſciſſas I T $= t$ et applicata T V $= u$, vbi ſcilicet inter t et u eadem aequatio ſubſiſtat, hac autem curua deſcripta, ſi pro quocunque valore parametri a fiant hac proportiones Tab. II. Fig. 2.

$$1 : a = IT : IP \quad \text{et} \quad 1 : a = TV : PM,$$

euidens eſt fore

$$IP = at = x \quad \text{et} \quad PM = au = y,$$

ſicque punctum M erit in vna curuarum ſecandarum huic ſcilicet parametro a conueniente, ſicque haec curua A M perfecte ſimilis erit D V, quod quum de omnibus curuis ſecandis aeque valeat, patet omnes etiam inter ſe eſſe ſimiles, atque viciſſim ſi omnes curuae ſecandae fuerint ſimiles; tum deſcribatur vna earum ex parametro $a = 1$ quae ſit curua D V, vbi V ſit punctum homologum puncto M, eruntque coordinatae I T $= t$ et T U $= u$ eae ipſae, ad quas initio aequationem homogeneam reduximus. Simili autem modo intelligitur, quoniam pro traiectoriis inuentae ſunt formulae $x = c\,T\,t$ et $y = c\,T\,u$, omnes has traiectorias etiam inter ſe fore curuas ſimiles, ita vt ſi vna fuerit deſcripta verbi gratia pro valore $c = 1$, reliquae omnes ex ea ope principii ſimilitudinis conſtrui queant. Manifeſtum autem eſt, principium ſimilitudinis ad punctum fixum I referri debere, quod probe notandum, ne notio ſimilitudinis hic perperam applicetur. Hic ſcilicet non tam ſimilitudo abſoluta curuarum ſecandarum ſpectatur, quam ſimilitudo poſitionis reſpectu

puncti fixi I, quam ita comparatam intelligi oportet, vt omnes rectae ex hoc puncto I eductae cunctas curuas ſecandas in punctis homologis ſimiliter traiiciant.

21. Exempli loco afferamus aequationem iam ſupra tractatam $yy = 2ax - xx$ quippe quae eſt homogenea, poſito autem $x = at$ et $y = au$, ea abit in hanc

$uu = 2t - tt$ ſeu $u = \sqrt{(2t - tt)}$, ita vt ſit $v = \frac{1 - t}{\sqrt{(2t - tt)}}$

quibus valoribus ſubſtitutis pro traiectoriis haec elicitur aequatio differentialis:

$$\frac{da}{a} = \frac{\alpha\, dt}{(t - \alpha\sqrt{(2t - tt)})\sqrt{(2t - tt)}},$$

hinc ergo pro traiectoriis orthogonalibus habebitur

$$\frac{da}{a} = -\frac{dt}{2t - tt} = -\frac{dt}{2t} - \frac{dt}{2(2 - t)}$$

cuius integrale eſt

$$\text{Log.}\, a = \text{L}\sqrt{\left(\frac{2 - t}{t}\right)} + \text{L}\, c \text{ ſiue } a = c\sqrt{\left(\frac{2 - t}{t}\right)}$$

quare pro his traiectoriis habebimus

$$x = c\sqrt{(2t - tt)} \text{ et } y = c(2 - t),$$

ex poſteriori fit

$$2 - t = \frac{y}{c} \text{ et } t = \frac{2c - y}{c}$$

hincque

$$\sqrt{(2t - tt)} = \frac{\sqrt{(2cy - yy)}}{c} = \frac{x}{c},$$

ſicque reſultat aequatio inter x et y haec

$$xx = 2cy - yy.$$

22. *Caſus Quintus*, quo tam abſciſſa x quam applicata y aequatur functioni cuicunque parametri a et

et nouae cuiusdam variabilis t. Quum x ſit functio binarum variabilium t et a itidemque y functio earundem, ponamus differentiando prodire:

$$dx = P\,dt + Q\,da \quad \text{et} \quad dy = R\,dt + S\,da$$

vbi notandum eſt, fore

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dR}{dt}\right) = \left(\frac{dS}{dt}\right).$$

Iam quia pro eadem curua ſecanda A M parameter a non variatur, pro ea erit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{P}$ qui valor loco p ſubſtitutus, in aequatione generali pro traiectoriis ſupra data, praebet iſtam aequationem:

$$(R\,dt + S\,da)(P - \alpha R) = (P\,dt + Q\,da)(\alpha P + R),$$

quae reducitur ad hanc:

$$da(PS - QR - \alpha(PQ + RS)) = \alpha\,dt(PP + RR).$$

23. Quodſi ergo traiectoriae orthogonales deſiderentur, poſito $\alpha = \infty$ pro iis habebitur iſta aequatio

$$dt(PP + RR) + da(PQ + RS) = 0$$

in cuius reſolutione vel integratione totum negotium verſatur. At ſi curua deſideretur, quae omnes propoſitas contingat poſito $\alpha = 0$, prodit haec aequatio finita $PS - QR = 0$. Talis ſcilicet curua locum habet, quando curuae ſecandae ita ſunt comparatae, vt binae proximae quaeuis ſe alicubi contingant, tum enim curua, quae per omnia haec contactus puncta traducitur, ſimul omnes tanget. Huiusmodi contactus euenire poteſt in infinitis lineis rectis,

rectis, certa lege ductis, quas in genere noſtro modo repraeſentare licet, vt ſit

$$x = t \quad \text{et} \quad y = at + A$$

vbi A denotat functionem quamcunque ipſius a, ſitque

$$dA = A' da,$$

hoc ergo caſu fiet

$$P = 1, \ Q = 0, \ R = a \quad \text{et} \quad S = A' + t$$

vnde pro curua quaeſita reperitur

$$A' + t = 0$$

ita vt fiat

$$x = - A' \quad \text{et} \quad y = A - a A'.$$

24. *Caſus Sextus* quo tantum pro ſingulis curvis ſecandis aequatio differentialis inter coordinatas x et y datur.

Sollicite hic diſtingui oportet inter aequationem differentialem, quae tantum ad ſingulas curuas ſecandas refertur et inter aequationem differentialem, quae omnes plane curuas ſecandas in ſe ſimul complectitur, cuiusmodi aequationibus hactenus in caſibus pertractatis ſumus vſi, tali forma

$$dy = p\,dx + q\,da$$

expreſſis, in quas ſcilicet binae coordinatae x et y, atque etiam parameter a tanquam variabiles ingrediuntur, earum igitur character in hoc conſiſtit, quod terna differentialia dx, dy et da in iis occurrant.

25. At aequationes, de quibus in hoc caſu ſermo eſt, tantum duo differentialia dx et dy inuoluunt, etiamſi parameter a in eas ingrediatur, ad quarum indolem explicandam ſit V functio quaecunque abſciſſae x et parametri a, quaelibet autem curva ſecanda hoc modo definiatur, vt ſit $y = \int V\,dx$, in qua integratione ſola x vt variabilis ſpectatur, parametro a pro conſtante habita, hac enim ratione vna tota curua ex ſecandis penitus determinatur, quoniam pro ea parameter a reuera manet conſtans, interim tamen ſi pro qualibet integratione parameter a varietur, eadem formula ſucceſſiue ad omnes curuas ſecandas adhiberi poterit, ex quo iam ſatis intelligitur, quomodo aequatio differentialis hinc nata $dy = V\,dx$, tantum ad ſingulas curuas ſecandas pertinere, non vero omnes ſimul in ſe complecti dicatur.

26. Propoſita igitur huiusmodi aequatione differentiali $dy = V\,dx$ probe animaduertendum eſt, in ea parametrum a pro conſtanti haberi, ita vt integrale more ſolito expreſſum $\int V\,dx$, valorem applicatae y exhibeat, quum autem haec ipſa integratio nouam conſtantem recipiat, eius determinatio ſimul praeſcribi debet, quia alioquin ipſa quaeſtio non foret determinata, quare ſi huiusmodi caſus proponatur, ante omnia in ipſa propoſitione definiri debet, quanam lege haec integratio ſit inſtituenda, quae conditio ita generatim exprimi poteſt, vt poſito $x = f$, fiat $y = g$, vbi quidem quantitates f et g vel prorſus ſunt conſtantes vel etiam certo quo-

dam modo a parametro a pendeant, ita vt dum variando parametrum a ad alias curuas ſecandas tranſimus, etiam litteris f et g alii valores tribui debeant. Manifeſtum enim eſt, niſi talis conditio expreſſis verbis fuerit conſtituta, quaeſtionem neutiquam eſſe abſolutam.

27. Etſi autem talis aequatio pro ſingulis curuis ſecandis ſufficit, tamen eam neutiquam ad traiectorias determinandas adhibere licet, quoniam enim talis formula $dy = V dx$, ad noſtrum caſum ſecundum accedere videtur, vbi erat

$$dy = P dx + Q da,$$

primum quidem nullum eſt dubium, quin hic ſit $P = V$, ſed altera quantitas Q, a qua eſſentialiter determinatio traiectoriarum pendet, quandoquidem pro iis inuenimus

$$Q da (1 - \alpha P) = \alpha dx (1 + PP),$$

hic prorſus non iudicatur.

28. Quoties quidem vel formulam $\int V dx$ vel integrare vel ſaltem ad quadraturas cognitas reducere licet, huic incommodo facile remedium adfertur; namque integrale inuentum $\int V dx$, atque vt modo ante praecepimus rite determinatum, denuo differentietur, dum non ſolum x, ſed etiam a variabile accipiatur, cuius differentialis quidem pars elementum dx continens erit ipſa formula propoſita $V dx$, altera vero pars elemento da affecta dabit verum valorem membri illius $Q da$, vel breuius hoc mem-

brum

brum $Q\,da$ obtinebitur, ſi integrale $\int V\,dx$ per ſolam variabilem a differentietur. Quando autem formulam $V\,dx$ hoc modo integrare non licet, tum etiam nulla adhuc via patet, quantitatem Q ita cognoſcendi, vt inde pro traiectoriis aequatio confici poſſit.

29. Cognita quidem eſt methodus in huiusmodi formulis differentialibus completis

$$dy = P\,dx + Q\,da,$$

ſi detur altera pars $P\,dx$, alteram $Q\,da$ inueſtigandi, quum enim ſit $(\frac{dQ}{dx}) = (\frac{dP}{da})$, hic valor $(\frac{dP}{da})$ aſſignari poteſt, hincque fiet $dx\,(\frac{dQ}{dx}) = dx\,(\frac{dP}{da})$, vbi quum $dx\,(\frac{dQ}{dx})$ ſit differentiale ipſius Q pro ſola variabili x, manifeſtum eſt fore $Q = \int dx\,(\frac{dP}{da})$, ſi quidem in hac integratione tantum x pro variabili habeatur. Pro noſtro ergo caſu vbi $P = V$ haberemus $Q = \int dx\,(\frac{dV}{da})$ ideoque pro traiectoriis hanc aequationem

$$da\,(1 - \alpha V)\int dx\,(\tfrac{dV}{da}) = \alpha\,dx\,(1 + VV)$$

in qua quum parameter a ſit eſſentialiter variabilis, formula $\int dx\,(\frac{dV}{da})$ nullum plane vſum praeſtare poteſt, niſi haec integratio actu expediri queat. His difficultatibus quibus praeſens caſus premitur dilucide explicatis, operae imprimis pretium erit, vnum caſum inueſtigaſſe, quo traiectorias aſſignare licet, etiamſi neque formula $\int V\,dx$ neque $\int dx\,(\frac{dV}{da})$, integrari poſſit, vnde ſequens Problema proponamus.

Problema.

30. Quaeritur, quomodo pro ſingulis curvis ſecandis aequationem differentialem $dy = V dx$ (vbi V tam parametrum a quam abſciſſam x abſolvit) comparatam eſſe oporteat, vt inde traiectorias definire liceat, etiamſi ipſa formula $\int V dx$ nullo modo integrabilis exiſtat.

Solutio.

Totum ergo negotium huc redit, vt caſum inueſtigemus quo traiectorias ſine formula $\int dx \left(\frac{dV}{da}\right)$ definire liceat, ad quem inueniendum denotet tantiſper Q valorem formalae $\int dx \left(\frac{dV}{da}\right)$, vt aequat io differentialis completa pro omnibus curuis ſecandis ſit

$$dy = V dx + Q da$$

vnde ſecundum praecepta ante data pro traiectoriis inuenta eſt haec aequatio

$$Q da (1 - \alpha V) = \alpha dx (1 + VV)$$

quae quum duas variabiles a et x inuoluat, dabitur certa functio ipſarum x et a, per quam haec aequatio multiplicata fiat integrabilis, verum euidens eſt inueſtigationem talis functionis in genere non minoribus obſtaculis exponi, quam id ipſum, de quo quaeritur.

31. Verum tamen datur caſus quidam ſpecialis, quo talis inueſtigatio ſuccedit, atque in hunc finem repraeſentemus aequationem noſtram ſub hac forma:

$$\alpha dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + Q da = 0$$

et quaeramus iam functionem ipſius a tantum, quae ſit A, per quam iſta aequatio multiplicata fiat integrabilis, ſcilicet haec forma

$$\alpha A\, dx \frac{(1+VV)}{\alpha V-1} + A Q\, da = 0$$

quae comparata cum forma generali $P\,dx + Q\,da$, quae integrabilis exiſtit, ſi

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

nobis praeſcribit hanc conditionem

$$\alpha\left(\frac{d.\,A\frac{(1+VV)}{\alpha V-1}}{da}\right) = \left(\frac{d.\,AQ}{dx}\right) = A\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

verum ex ipſa aequatione propoſita

$$dy = V\,dx + Q\,da$$

quae per hypotheſin eſt integrabilis, eſt

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{da}\right).$$

Differentiemus igitur fractionem

$$\frac{A(1+VV)}{\alpha V-1},$$

ſumendo ſolam a variabilem, quod fit, ſi loco dV ſcribamus $\left(\frac{dV}{da}\right)$, ſimilique modo $\frac{dA}{da}$ loco dA atque hinc prius membrum noſtrae poſtremae aequationis erit

$$\frac{\alpha\, dA}{da}\cdot\frac{(1+VV)}{\alpha V-1} + \alpha A\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{(\alpha VV-2V-\alpha)}{(\alpha V-1)^2}$$

poſterius vero membrum erit $A\left(\frac{dV}{da}\right)$ ita, vt nunc habeatur ita aequatio

$$\frac{\alpha\, dA}{da}\cdot\frac{(1+VV)}{\alpha V-1} - A\left(\frac{dV}{da}\right)\frac{(1+\alpha\alpha)}{(\alpha V-1)^2} = 0.$$

32. In hac aequatione tantum vnius generis differentialia occurrunt ſcilicet $\frac{dA}{da}$ et $\left(\frac{dV}{da}\right)$ ad ſolam

 varia-

variabilitatem ipſius a relata, ita vt abſciſſa x non aliter niſi, vt conſtans, in ea inſit, quare ſi nunc x pro conſtante habeamus clauſulis illis reiectis, quippe quae tantum ob duas variabiles fuerunt vſurpatae, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$\alpha\, d A (1 + VV) - \frac{A\, dV (1 + \alpha\alpha)}{\alpha V - 1} = 0$$

qua certa relatio inter A et V exprimitur, abſciſſa ſcilicet x vt conſtante ſpectata, nunc vero inde ſtatim elicimus

$$\frac{\alpha\, dA}{A} = \frac{(1 + \alpha\alpha)\, dV}{(\alpha V - 1)(1 + VV)} = \frac{\alpha\alpha\, dV}{\alpha V - 1} - \frac{\alpha V\, dV - dV}{1 + VV}$$

cuius integrale eſt

$$\alpha LA = \alpha L(\alpha V - 1) - \alpha L\sqrt{(1 + VV)} - \text{Ang. Tang } V + \alpha LX$$

vbi loco conſtantis introduximus functionem quamcunque ipſius x, quare per hanc aequationem quantitas V certo modo determinatur per A et X, ideoque erit functio ipſarum a et x, qualis in problemate noſtro deſideratur.

33. Quod ſi enim pro ſingulis curuis ſecandis habeatur iſta aequatio differentialis $dy = V\, dx$, ſive haec integralis $y = \int V\, dx$, vbi V ſit ea ipſa functio ipſarum a et x, quam modo inuenimus, tum pro traiectoriis inuenta eſt haec aequatio per hypotheſin integrabilis

$$\alpha\, A\, dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + A\, Q\, da = 0,$$

cuius integrale reperietur, ſi ſolum prius membrum integretur poſito a conſtante, vnde hoc integrale erit

$$\alpha\, A \int dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} = C,$$

vbi

vbi quantitas C vel eſt vere conſtans, vel certo modo a parametro a pendebit, qui modus ex ea conditione, qua prius integrale $\int V.dx$ capi debet, eſt petendus. Pro qualibet ſcilicet curua ſecanda ex eius parametro a hinc colligitur abſciſſa x, indeque punctum M, quod ſimul eſt in traiectoria quaeſita.

34. Illa autem aequatio logarithmica, qua natura functionis V definitur, commodius ita repraeſentari poteſt Tab. II. Fig. 1.

$$\text{Ang. Tang. } V = \alpha L \frac{(\alpha V - 1)X}{A\sqrt{(1+VV)}},$$

vnde generatim pro angulo interſectionis quocunque valorem ipſius V neutiquam elicere licet; conſideremus autem caſum quo traiectoriae requiruntur orthogonales, quia enim tum fit $\alpha = \infty$, ideoque $\alpha V - 1 = \alpha V$ aequatio noſtra fiet

$$\frac{1}{\alpha}\text{Ang. Tang. } V = \alpha L \frac{VX}{A\sqrt{(1+VV)}} = 0$$

vnde ſequitur eſſe debere

$$\frac{\alpha VX}{A\sqrt{(1+VV)}} = 1, \text{ ſiue } \frac{V}{\sqrt{(1+VV)}} = \frac{A}{\alpha X},$$

vbi quum nihil impediat, quo minus pro αX ſcribamus X, habebimus

$$\frac{V}{\sqrt{(1+VV)}} = \frac{A}{X},$$

hinc vero porro colligimus

$$V = \frac{A}{\sqrt{(XX-AA)}} \text{ et } \sqrt{(1+VV)} = \frac{X}{\sqrt{(XX-AA)}}.$$

35. Conſequenter ſi pro curuis ſecandis propoſita fuerit haec aequatio differentialis:

$$dy = \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX-AA)}},$$

vbi

vbi X denotat functionem quamcunque ipſius x et A ipſius a, poterimus traiectorias orthogonales inuenire, pro iis enim habebimus iſtam aequationem

$$\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} = C$$

vbi C vel eſt quantitas conſtans vel certo quodam modo a parametro a pendet, quemadmodum ſcilicet conditio integrationis formulae

$$\int \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}}$$ poſtulat.

Hic ergo praeter omnem exſpectationem ad easdem traiectorias peruenimus, quas ſupra ex natura brachyſtochronarum ſumus adepti.

36. Quo autem clarius appareat, quomodo quantitas C pendeat a conditionibus integrationis pro curuis ſecandis, ſequenti ratione colligere poterimus, ponamus iſtam integrationem ita inſtitui vt fiat

$$y = \int \frac{A\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} + B,$$

vbi B denotet vel quantitatem vere conſtantem, vel vtcunque ab a pendentem, prouti libuerit; dum ipſum integrale euaneſcit poſito $x = 0$ vel cuipiam valori dato et quia aequationem differentialem in genere ſumſimus

$$dy = P\,dx + Q\,da,$$

hoc poſtremum membrum $Q\,da$ complectetur dB, atque adeo reiectis terminis ab x pendentibus erit

$$Q\,da = dB.$$

Iam quia pro traiectoriis orthogonalibus inuenimus hanc aequationem integralem

$$\int \frac{XX\,dx}{\sqrt{(XX - AA)}} - C = 0,$$

huius-

huiusque differentiale contineri debet in forma

$$\alpha A \frac{dx(1+VV)}{\alpha V-1} + A Q d a = 0$$

neceſſe eſt, vt hoc poſtremum membrum $A Q d a$ aequetur ipſi $-d C$, reiectis ſcilicet terminis ab x pendentibus, dum etiam haec integratio eadem lege inſtituatur vti prior, quare quum ſit

$$Q d a = d B$$

fiet nunc

$$d C = -A d B$$

ideoque

$$C = E - \int A d B$$

vbi E denotat quantitatem vere conſtantem. Quando ergo vti in brachyſtochronis vſu venit littera B vel euaneſcit vel vera eſt conſtans, tum poſterior littera C denotabit veram conſtantem, quemadmodum ibi inuenimus. Quocirca haec determinatio multo latius patet quam illa, quae erat ex brachyſtochronis petita, quandoquidem hic pro B functionem quamcunque ipſius A aſſumere licet, cum ibi fuiſſet $B = 0$.

37. *Caſus Septimus* quo aequatio pro curuis ſecandis refertur ad punctum fixum. Sit igitur I punctum illud fixum, ad quod primum curuae ſecandae $A M m$ referantur, per diſtantiam $I M = v$ et angulum $C I M = \Phi$, a directione fixa $I C$ ſumtum ac pro hac quidem curua $A M m$ ſit parameter $= a$, variabilis ſi ad alias curuas ſecandas tranſimus, conſtans vero quamdiu in eadem remanemus. Tab. II. Fig. 3.

Dabitur ergo pro curuis ſecandis aequatio inter v, Φ et a, ex cuius differentiatione prodeat

$$d\Phi = p\,dv + q\,da,$$

vnde pro eadem curua ſecanda A M m,

erit $d\Phi = p\,dv$,

vnde definire licet angulum A M I, quem haec curva cum recta I M conſtituit quippe cuius tangens, quae in genere eſt $\frac{v\,d\Phi}{dv}$, pro hoc caſu erit $= pv$.

38. Sit iam curua E M μ traiectoria quaecunque ſecans curuam A M ſub angulo A M E cuius tangens ſit vt ante $= \alpha$, et quia eaedem variabiles v et Φ etiam ad traiectoriam pertinent, pro qua parameter a vtique variabilis haberi debet, erit anguli I M E tangens $= \frac{v\,d\Phi}{dv}$, quo angulo cum praecedente comparato colligetur tangens differentiae eorum hoc eſt

$$\text{Tang. A M E} = \frac{pv - \frac{v\,d\Phi}{dv}}{1 + \frac{pvv\,d\Phi}{dv}} = \frac{v(p\,dv - d\Phi)}{dv + pvvd} = \alpha,$$

ita vt pro traiectoriis reſultet iſta aequatio

$$(vp - \alpha)\,dv = v\,d\Phi\,(1 + \alpha pv)$$

quae pro traiectoriis orthogonalibus ob $\alpha = \infty$ abit in hanc

$$dv + pvv\,d\Phi = 0$$

hanc ergo aequationem cum praecedente ita coniungi oportet, vt in ea duae tantum variabiles inſint, hocque modo inuentio traiectoriarum perducetur ad aequationem differentialem ordinariam, inter duas variabiles.

39.

39. Quodſi ergo aequatio pro curuis ſecandis ita fuerit comparata, vt angulus Φ commode per functionem ipſarum v et a exprimi poſſit, tum in aequatione differentiali

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

litterae p et q datae erunt functiones ipſarum v et a ita vt ſit $(\frac{dp}{da}) = (\frac{dq}{dv})$; hoc valore iam pro $d\Phi$ ſubſtituto pro traiectoriis in genere orietur haec aequatio

$$qvda(1 + \alpha pv) + \alpha dv(1 + ppvv) = 0$$

hincque pro orthogonalibus:

$$pqv^2 da + dv(1 + ppvv) = 0.$$

40. Ponamus lineas ſecandas omnes eſſe rectas ex ipſo puncto I eductas et quia anguli A M I euaneſcunt; manifeſtum eſt fore $p = 0$, ideoque aequatio erit pro lineis ſecandis $d\Phi = q\,da$ ſiue $d\Phi = da$ nihil enim impedit quominus angulum Φ, tamquam ipſam parametrum a ſpectemus ita vt ſit $q = 1$, tum ergo pro traiectoriis habebimus hanc aequationem:

$$v\,da + \alpha\,dv = 0 \text{ ſiue ob } da = d\Phi$$

hanc

$$v\,d\Phi + \alpha\,dv = 0,$$

ita vt ſit

$$\frac{v\,d\Phi}{dv} = -\alpha,$$

vnde patet traiectoriam eſſe ſpiralem logarithmicam, omnes radios I M ſub angulo conſtante, cuius tan-

gens $= -\alpha$, ſecantem, ac ſi fuerit $\alpha = \infty$, fit $dv = 0$ ſeu $v = c$ ideoque $v = c$, quo caſu traiectoria erit circulus centro c deſcriptus.

41. Retineamus aequationem generalem:

$$d\Phi = p\,dv + q\,da$$

ita vt pro vnaquaque curua ſecanda, ſit $\Phi = \int p\,dv$ ſumamusque hanc formulam integrari non poſſe, ita vt hinc q non liqueat, et quaeramus vti in problemate caſui ſexto annexo indolem functionis p, vt traiectoria conſtrui poſſit, pro qua quum aequatio ſit

$$q\,da + \frac{\alpha\,dv(1 + ppvv)}{v(1 + \alpha pv)} = 0,$$

ponamus vt ſupra hanc aequationem integrabilem reddi, ſi multiplicetur per A functionem quamcunque ipſius a, ne autem in ambages incidamus; conſideremus tantum traiectorias orthogonales, pro quibus haec aequatio

$$A\,q\,da + A\,dv\frac{(1 + ppvv)}{pvv} = 0$$

debet eſſe integrabilis; neceſſe igitur eſt, vt ſit

$$A\left(\frac{dq}{dv}\right) = \frac{dA}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + A\left(\frac{d\left(\frac{1}{pvv} + pp\right)}{da}\right)$$

at vero eſt

$$\left(\frac{dq}{dv}\right) = \left(\frac{dp}{da}\right)$$

vnde iſta aequatio induet hanc formam

$$A\left(\frac{dp}{da}\right) = \frac{dA}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + A\left(\left(\frac{dp}{da}\right) - \frac{1}{ppvv}\left(\frac{dp}{da}\right)\right).$$

42. Quia in his differentialibus ſola parameter a vt variabilis occurrit, ſpectemus reuera v vt conſtantem et adipiſcemur hanc aequationem

$$dA\left(\frac{1}{pvv}+p\right)=\frac{A\,dp}{ppvv}$$

vnde fit

$$\frac{dA}{A}=\frac{dp}{p(1+ppvv)}=\frac{dp}{p}-\frac{pvv\,dp}{1+ppvv},$$

quae integrata dat

$$LA=L\frac{p}{\sqrt{(1+vvpp)}}+LV \text{ ſiue } \frac{p}{\sqrt{(1+vvpp)}}=\frac{A}{V}$$

vnde colligitur

$$p=\frac{A}{\sqrt{(VV-AAvv)}} \text{ et } \sqrt{(1+ppvv)}=\frac{V}{\sqrt{(VV-AAvv)}}.$$

43. Conſequenter ſi pro curuis ſecandis haec detur aequatio

$$\Phi=\int\frac{A\,dv}{\sqrt{(VV-AAvv)}},$$

vbi V denotat functionem quamcunque ipſius v et A ipſius a, tum pro traiectoriis orthogonalibus colligitur iſta aequatio differentialis:

$$A\,q\,da+\frac{VV\,dv}{vv\sqrt{(VV-AAvv)}}=0$$

quae quum per ſe ſit integrabilis; aequatio finita ita ſe habebit

$$\int\frac{VV\,dv}{vv\sqrt{(VV-AAvv)}}=C,$$

in qua integratione parameter a pro conſtante habetur. Atque haec aequatio pro curuis ſecandis eadem eſt, quam in ſuperiori diſſertatione §. 30. ex brachyſtochronis deduximus, ſi modo hic loco v ſcribamus u, loco V vero vuu.

EVOLVTIO VBERIOR CASVVM, QVIBVS LINEAE SECANDAE SVNT RECTAE.

Problema I.

Si rectae ſecandae ita fuerint ductae, vt ſingulae tangant datam lineam curuam, inuenire lineam curuam, quae has rectas ad angulum datum ſecat.

Solutio.

Tab. II. Fig. 4. Sit curua DU ad axem AT relata eaque proponitur, pro qua ſit abſciſſa AT $= t$ et applicata TU $= u$, ita vt u ſit functio quaecunque ipſius t data, iam ex huius curuae puncto U ducatur tangens indefinita US, quae ergo erit vna ex noſtris lineis ſecandis, vnde ſi in ea capiatur punctum quodcunque M, coordinatae ſupra adhibitae erunt nunc AP $= x$ et PM $= y$, inter quas iam aequationem erui oportet; introducendo ſcilicet parametrum variabilem a. Quoniam autem haec linea ſecanda a reliquis diſtinguitur eo, quod haec ipſam curuam datam in puncto U tangat, hoc ipſum punctum U continebit notionem parametri, atque abſciſſam AT $= t$ tamquam parametrum ſpectare licet, atque nunc u erit functio parametri t, ex natura autem huius functionis innoteſcit angulus quo recta haec US ad axem noſtrum inclinatur, cuius quippe tangens eſt $\frac{du}{dt} = v$.

At

At vero etiam hunc angulum ex noſtris coordinatis x et y cum t et u comparatis poterimus definire, erit enim etiam tangens c iſtius anguli $\frac{u-y}{t-x} = v$ vnde variando t aequatio pro omnibus curvis ſecandis erit,

$$y = vx + u - tv,$$

quae praeter variabiles x et y continet inſuper parametrum t eiusque functiones u et v, quae in locum litterae a ſubſtitui intelligi debent. Quoniam vero iam poſuimus $du = dv$ ſit porro $dv = w\,dt$ atque nunc aequatio differentialis pro curuis ſecandis erit:

$$dy = v\,dx + (xw - wt)\,dt = v\,dx + (x-t)\,w\,dt,$$

quae cum forma noſtra generali comparata

$$dy = p\,dx + q\,da$$

ob $a = t$ praebet $p = v$ et $q = (x-t)\,w$.

Hinc igitur pro traiectoriis quibuscunque, dum anguli interſectionis tangens eſt $= \alpha$, habebimus hanc aequationem

$$q\,dt\,(1 - \alpha p) = \alpha\,dx\,(1 + pp),$$

vbi p eſt functio parametri t, quae ſubſtitutis valoribus abit in hanc formam

$$w\,dt\,(1 - \alpha v)\,(x - t) = \alpha\,dx\,(1 + vv) \text{ ſiue}$$

$$dv\,(1 - \alpha v)\,(x - t) = \alpha\,dx\,(1 + vv),$$

quae ergo eſt aequatio pro omnibus traiectoriis.

Ponamus primo $\alpha = 0$, ita vt omnes lineae ſecandae a traiectoria tangi debeant, atque habebimus $x = t$ vnde fit $y = u$, ſicque prodit ipſa linea curva

va cuius per hypotheſin noſtrae lineae ſunt tangentes, qui caſus per ſe eſt obuius.

Ponamus autem porro $\alpha = \infty$, vt traiectoriae prodeant orthogonales, vnde naſci debent omnes illae curuae, quae ex euolutione curuae D U oriuntur, facto autem $\alpha = \infty$ noſtra aequatio abit in hanc,

$$-v\,dv(x-t) = dx(1+vv) \text{ ſeu } -\frac{v\,dv}{1+vv} = \frac{dx}{x-t},$$

quae tantum duas variabiles continet, hac forma repraeſentata

$$t\,v\,dv = dx(1+vv) + x\,v\,dv,$$

quae per $\sqrt{(1+vv)}$ diuiſa manifeſto fit integrabilis

$$\frac{t\,v\,dv}{\sqrt{(1+vv)}} = dx\sqrt{(1+vv)} + \frac{x\,v\,dv}{\sqrt{(1+vv)}}$$

integralis enim eſt

$$x\sqrt{(1+vv)} = \int\frac{t\,v\,dv}{\sqrt{(1+vv)}} = t\sqrt{(1+vv)} - \int dt\sqrt{(1+vv)} + C$$

vbi formula

$$\int dt\sqrt{(1+vv)}$$

denotat arcum curuae propoſitae D U, deinde ſi ex puncto A erigatur ad axem perpendicularis rectam M S ſecans in R erit

$$UR = t\sqrt{(1+vv)}$$

ideoque

$$RM = RU - DU + C,$$

ita vt ſit

$$DU = MU + C$$

abſcindatur ergo in figura arcus $DC = C$, vt fiat recta U M aequalis U C, atque nunc manifeſtum eſt punctum

punctum M eſſe in curua ex euolutione nata C M, initio euolutionis in puncto C facto. Verum ſi aequationem pro hac curua C M deſideremus, ex aequatione inuenta habemus ſtatim

$$x = t - \frac{\int dt \surd(1+vv)}{\surd(1+vv)},$$

hincque porro

$$y = u - \frac{v \int dt \surd(1+vv)}{\surd(1+vv)},$$

vnde ſi liceret variabilem t eliminare, haberetur aequatio pura inter x et y pro curua quaeſita.

Sed videamus etiam, qualis futura ſit traiectoria, ſi angulus interſectionis fuerit quicunque conſtans, tum autem aequatio inuenta reducatur ad hanc formam

$$\alpha dx(1+vv) - x dv(1-\alpha v) = t dv(\alpha v - 1) \text{ ſiue}$$

$$dx - \frac{x dv(1-\alpha v)}{\alpha(1+vv)} = \frac{t dv(\alpha v - 1)}{\alpha(1+vv)},$$

quae cum forma generali

$$dx + Px dv = Q dv,$$

comparata integrabilis redditur, ſi multiplicetur per $e^{\int P dv}$, tum enim integrale erit

$$x e^{\int P dv} = \int e^{\int P dv} Q dv,$$

quum igitur hic ſit

$$P dv = \frac{dv(\alpha v - 1)}{\alpha(1+vv)} \text{ erit } \int P dv = L\surd(1+vv) - \tfrac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.}v,$$

ideoque

$$e^{\int P dv} = e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.}v} \surd(1+vv),$$

quocirca ob

$$Q = \frac{t(\alpha v - 1)}{\alpha(1 + vv)} = tP$$

vnde erit

$$\int e^{\int P dv}. Q dv = \int e^{\int P dv} t P dv = t e^{\int P dv} - \int dt e^{\int P dv}$$

ita vt fiat

$$x = t - e^{-\int P dv} \int dt. e^{\int P dv}$$

ex quo facta ſubſtitutione habebimus

$$x = t - \frac{e^{\frac{1}{\alpha}\text{Arc. Tang.} v}}{\sqrt{(1 + vv)}} \int dt. e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.} v} \sqrt{(1 + vv)}$$

hincque

$$y = u - \frac{v e^{\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.} v}}{\sqrt{(1 + vv)}} \int dt. e^{-\frac{1}{\alpha}\text{Arc.Tang.} v} \sqrt{(1 + vv)}.$$

Problema II.

Sint rectae ſecandae ita ductae, vt ſingulae earum U M ſint normales in curuam datam A U et quaerantur traiectoriae pro quouis angulo interſectionis.

Solutio.

Pro curua data A U ſit iterum abſciſſa A T $= t$ et applicata T U $= u$, tum vero ſit $du = v dt$, ita vt hae quantitates tanquam functiones parametri variabilis ſpectentur, ducta iam ad punctum U normali U N M conſtat anguli T U N tangentem fore $= v$ ob ſubnormalem

$$TN = \frac{u du}{dt} = uv$$

hinc-

hincque normalem

$$UN = u\sqrt{(1+vv)}.$$

Quia nunc recta U N M eſt vna ex ſecandis, ſumatur in ea punctum quodcunque M et vocatis coordinatis

$$AP = x \text{ et } PM = y \text{ erit}$$

$$TP = x - t \text{ et } UT + PM = u + y,$$

manifeſtum autem eſt fore $v = \frac{x-t}{u-y}$, vnde deducitur haec aequatio

$$y = \frac{x}{v} - u - \frac{t}{v} \text{ et.}$$

Differentietur nunc iſta aequatio et reperietur:

$$dy = \frac{dx}{v} - \frac{x\,dv}{vv} - v\,dt - \frac{dt}{v} + \frac{t\,dv}{vv},$$

quae comparata cum forma generali

$$dy = p\,dx + q\,da,$$

praebet $p = \frac{1}{v}$ hinc

$$1 + pp = \frac{1+vv}{vv} \text{ et } q\,da = -\frac{x\,dv}{vv} - dt\frac{(1+vv)}{v} + \frac{t\,dv}{vv}$$

at vero pro traiectoriis inuenta eſt haec aequatio

$$\alpha\,dx(1+pp) = q\,da(1-\alpha p).$$

Ponamus hic primo $\alpha = 0$, vt inueniamus eam traiectoriam, quae omnes noſtras lineas rectas tangat, quam patet eſſe euolutam curuae propoſitae A V; pro hac ergo habebimus iſtam aequationem $q\,da = 0$, vnde fit

$$(x-t)\,dv + v\,dt\,(1+vv) = 0$$

hincque

$$x = t - \frac{v\,dt(1+vv)}{dv},$$

hincque porro

$$y = -u - \frac{dt(1+vv)}{dv}$$

quae ſunt coordinatae pro euoluta curuae propoſitae, praeterea vero notaſſe iuuabit, quum ſit

$$TP = x - t = -\frac{v\,dt(1+vv)}{dv}$$

hanc proportionem

$$TN : UN = TP : UM$$

ita vt ſit

$$UN = -\frac{dt(1+vv)}{dv},$$

quae eſt ipſa expreſſio cognita pro radio oſculi UM.

Contemplemur etiam caſum, quo $\alpha = \infty$, vt omnes traiectorias orthogonales eliciamus. Tum vero aequatio inuenta abit in hanc

$$dx(1+pp) + pq\,da = 0$$

hoc eſt

$$dx(1+vv) - \frac{x\,dv}{v} + \frac{t\,dv}{v} - dt(1+vv) = 0,$$

quae reducitur ad hanc formam

$$dx - \frac{x\,dv}{v(1+vv)} = dt - \frac{t\,dv}{v(1+vv)}$$

quae cum forma generali

$$dx + P\,dx\,dv = Q\,dv$$

compa-

comparata, dat

$$P\,dv = -\frac{dv}{\surd(1+vv)},$$

hinc

$$\int P\,dv = L\,\frac{\surd(1+vv)}{v} \text{ et } e^{\int P\,dv} = \frac{\surd(1+vv)}{v}$$

per quam quantitatem noſtra aequatio multiplicata fit

$$\frac{dx\surd(1+vv)}{v} - \frac{x\,dv}{vv\surd(1+vv)} = \frac{dt\surd(1+vv)}{v} - \frac{t\,dv}{vv\surd(1+vv)},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{x\surd(1+vv)}{v} = \frac{t\surd(1+vv)}{v} + c,$$

ita vt ſit

$$x = t + \frac{cv}{\surd(1+vv)}$$

hincque

$$y = \frac{c}{\surd(1+vv)} - u.$$

Quodſi iam hic conſtantem c ponamus $= 0$, habebimus $x = t$ et $y = -u$, quo caſu traiectoria orthogonalis eſt ipſa curua noſtra propoſita A U, ſed praeter hanc infinitae adhuc aliae dantur, quae inueniuntur, ſi c non ſit $= 0$, capiantur enim in ſingulis noſtris rectis portiones $U\mu = c$, atque manifeſtum eſt fore

$$\frac{cv}{\surd(1+vv)} = T\pi \text{ et } \frac{c}{\surd(1+vv)} = TU - \mu\pi,$$

quibus ſubſtitutis habebimus

$$x = AT + T\pi = A\pi \text{ et } y = \frac{c}{\surd(1+vv)} - u = -\mu\pi,$$

ex quo intelligitur omnes curuas per puncta haec μ ductas, quae parallelae vocari ſolent curuae A U,

 eſſe

eſſe traiectorias orthogonales, conſtat enim omnes has curuas communem habere euolutam.

Sin autem angulus interſectionis fuerit quicunque; aequatio inuenta erit

$$\alpha dx(1+vv) = -(v-\alpha)\frac{x\,dv}{v} - (v-\alpha)(1+vv)dt + (v-\alpha)\frac{t\,dv}{v}$$

quae reducatur ad hanc formam:

$$dx + \frac{(v-\alpha)x\,dv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{(v-\alpha)dt}{\alpha} + \frac{(v-\alpha)t\,dv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{du}{\alpha} + dt + \frac{(v-\alpha)t\,dv}{\alpha v(1+vv)}$$

vnde fit

$$\int P\,dv = \tfrac{1}{\alpha}\text{ Ang. Tang. } v + L\frac{\surd(1+vv)}{v},$$

vnde calculus reducitur ad quantitatem exponentialem, in cuius exponentem ingreditur angulus, cuius Tangens eſt v.

Problema III.

Propoſita curua quacunque A U per coordinatas A T $= t$ et T A $= u$ data, ſi ad ſingula eius puncta U ſecundum legem quamcunque datam educantur rectae U M, inuenire traiectorias, quae omnes has rectas ſub angulo dato traiiciant.

Solutio.

Ponamus vt ante $du = v\,dt$ et vocemus angulum T U M $= \Phi$ qui vel ipſe vel cuius Sinus, Tangensue, per quantitates ad curuam pertinentes vtcunque determinetur, ita vt ſit $d\Phi = \varrho\,dt$, atque

que omnes iſtae quantitates, tanquam functiones parametri ſpectari queant. Quum igitur U M ſit vna ex rectis ſecandis, ſumto in ea puncto quocunque M habebimus pro traiectoriis A P $= x$ et P M $= y$, atque nunc vt ante euidens eſt fore

$$\text{Tang.}\,\Phi = \frac{x - y}{u + y},$$

vnde definitur

$$y = \frac{x}{\text{Tang.}\,\Phi} - u - \frac{t}{\text{Tang.}\,\Phi}.$$

Differentietur haec aequatio:

$$dy = dx\,\text{cot.}\,\Phi - \frac{x\,d\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi^2} - v\,d\,t - d\,t\,\text{cot.}\,\Phi + \frac{t\,d\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi^2}$$

eritque

$$p = \text{cot.}\,\Phi \quad \text{et} \quad 1 + p\,p = \frac{1}{\text{ſin.}\,\Phi^2} \quad \text{et}$$

$$q\,d\,a = \frac{(t - x)\,d\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi^2} - v\,d\,t - d\,t\,\text{cot.}\,\Phi,$$

quare quum pro traiectoriis inuenta ſit haec aequatio

$$\alpha\,d\,x\,(1 + p\,p) + q\,d\,a\,(\alpha\,p - 1) = 0,$$

quae duas tantum variabiles complectitur et altera x vnam dimenſionem non ſuperat, eius reſolutio erit in noſtra poteſtate.

Euoluamus autem potiſſimum caſum, quo $\alpha = 0$, vt curua inueniatur omnes has rectas propoſitas tangens, pro hac igitur curua aequatio erit $q\,d\,a = 0$ ſiue

$$x = t - \frac{v\,d\,t.\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{d\,\Phi} - \frac{d\,t\,\text{ſin.}\,\Phi.\,\text{coſ.}\,\Phi}{\rho} = t - \frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{\rho} - \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\rho}$$

hinc-

hincque

$$y = - u - \frac{v\,ſin.\,\Phi\,coſ.\,\Phi}{\rho} - \frac{coſ.\,\Phi^2}{\rho},$$

quum ergo hinc ſit

$$x - t = - \frac{v\,ſin.\,\Phi^2}{\rho} - \frac{ſin.\,\Phi.\,coſ.\,\Phi}{\rho},$$

inde concluditur ipſa recta

$$\text{U M} = - \frac{v\,ſin.\,\Phi - coſ.\,\Phi}{\rho},$$

notandum autem M eſſe punctum, in quo duae huiusmodi rectae ſibi proximae conueniunt.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

EXPOSITIO THEORETICA SINGVLARIS MACHINAE HYDRAVLICAE TIGVRI HELVETIORVM EXSTRVCTAE.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Machinam, de qua nobis ſermo erit, non dubito inter ingenioſiſſimas referre; inuentorem habuit virum egregium, *Andream Wirz* Tigurinum, Artificem ſtannarium, variis ornatum dignitatibus in ciuitate patria, ſuoque ingenio mechanico inter conciues conſpicuum: Quin ipſe inventor paruulam optatiſſimo cum ſucceſſu exſtruxit machinam in fluuio Limagi, cuius ope aquae ad notabilem eleuantur altitudinem in vſus officinae tinctoriae ad ripam ſitae. Accuratiorem nouae huius machinae deſcriptionem dedit Cl. *Ioh. Henricus Zigler* Med. D. in tertio Volumine Transactionum Tigurinarum, ad quam licet lectorem ablegare, cui perfunctoria noſtra delineatio non ſatisfecerit.

§. 2. Interna machinae Wirzianae ſtructura eadem perfecte eſt, quae tympani horologici, cui ela-

ſtrum incluſum eſt ſpirale; figura noſtra prima ſectionem ſiſtit tympani perpendicularem ad axem: inuolucrum habet deſignatum litteris *a*, *a*, *a*, *a*, quod deſinit in ſitellam aquis hauriendis dicatam A; cavitati tympani incluſa eſt lamina ſtannea, dimidiam lineam craſſa, atque ductu ſpirali ab interiori inuolucri ſuperficie verſus centrum intorta, relicto debito interuallo inter quamuis laminae duplicaturam; Tab. III. ſic helices formantur 1, 2; 3, 4; 5, 6 etc. Vtraque ora laminae intortae ſit quaeuis exactiſſime in eodem plano, vt helices a fundis ſuperimpoſitis in vtroque latere perfecte claudantur; Ferruminatione hoc opus, in quo cardo rei vertitur, perficere docuit auctor. Ex medio alterutrius fundi exoriatur bulbus perforatus inſtar modioli rotae vel choenicii formatus, per quem aquae et aër ex intima helice lateraliter exprimantur et transfundantur in diabeten vel ſiphonem immobilem, primo horizontalem, mox incuruatum et verticaliter aſſurgentem; diabetes aquarum eleuationi et effluxui per orificium ſuperius dicatus eſt; modiolus autem ſua cauitate extremitatem diabetis ſtrictiſſime circumplectatur, ita vt in tota iunctura ne guttula quidem fluidi, vtut compreſſi, perſpirare poſſit; attamen opera detur, vt praefatum choenicium circa diabetis exortum ipſi inſertum absque notabili impedimento rotari poſſit: figura ſecunda hanc machinationis partem exprimit.

§. 3. Vſus machinae Wirzianae in eo conſiſtit, vt aquis ad dimidiam propemodum altitudinem ſubmerſa ſit, axe horizontaliter poſito altera vero

dimi-

dimidietas extra aquas promineat; tum ſi rotetur machina, ſecundum ductum ſpirarum a centro verſus peripheriam, fiet, vt alternis vicibus aquam et aërem hauriat, vtrumque fluidum verſus centrum profluat, per choenicium in diabeten transfundatur, in diabete aſſurgat, tandemque eiiciatur. Sic parvula machina aſcenſum aquarum obtinuit inuentor octodecim pedum, quae machinae praeſtantia atque theoria omnibus erunt mirabiles: nec tamen omnis a machina obtinetur effectus, niſi partes eius ſingulae ad debitam conformationem atque proportionem fuerint reductae; vltimi machinae perfectio in eo conſiſtere videtur, vt quauis reuolutione extima helix, ad dimidiam ſui partem nouis impleatur aquis, poſteaque aëre naturali, vt ambo fluida ſecunda reuolutione in helicem ſecundam, tertia in tertiam, et ſic porro, progrediantur, donec ad intimam peruenerint helicem, vt ex hac per choenicium in diabeten transfundantur, eleuentur ac denique effluant. Niſi omnis aqua in primam helicem hauſta, ſuo ordine hanc viam perficiat, neceſſe eſt vt pars eius in ſupremo helicis loco retropellatur atque regurgitet in helicem praecedentem, vnde venerat: iſta vero regurgitatio effectum non ſolum diminuit, ſed et aliquando integrum euertit, quod ipſi contigit Inuentori in primo ſuo tentamine, cum helices verſus centrum nimis coarctabat; commiſſum errorem protinus animaduertit, factaque eius correctione pleniſſimum a machina obtinuit effectum. Conſtructio machinae non ſine praeuio circumſtan-

tiarum examine aggredienda eſt: cum vero interna aquarum in ſingulis helicibus diſpoſitio atque ordinatio, a qua totus machinae effectus pendet, oculis diſcerni non poſſit, haec disquiſitio *a priori* ſecundum veras leges hydroſtaticas inſtituenda erit.

§. 4. Ante omnia exiſtimo attendendum eſſe ad altitudinem, ad quam aquae ſint eleuandae, et quanta inde in infima diabetis parte oritura ſit compreſſio, diſpiciendum; Ponamus primo nullam eſſe hanc altitudinem, ita vt aquae effluant per axem excauatum horizontalem; tunc vtique in ſingulis helicibus aquae infimum occupabunt locum, aër ſupremum, nec aër iſte erit compreſſus; ſeruabit ſuam denſitatem naturalem, placidusque fiet vtriusque fluidi transfluxus; ſi modo orificium effluxus amplum fuerit, lentiusque machina circumagatur; nec tunc, ſi animus a reſiſtentiis alienis abſtrahatur, vlla vis ad machinam rotandam requiretur. Si vero diabetes aliquam habuerit altitudinem, tunc aquae in illo contentae repriment aquas effluxui proximas, ſimulque aërem ſubſequentem compriment, et in minus volumen condenſabunt: Inde facile videtur fore vt aquae in ſingulis helicibus eleuentur in latere ſiniſtro figurae noſtrae, deprimanturque in latere dextro: ſic ſinguli arcus aquei preſſionem exercebunt verſus centrum, atque ſumma omnium harum preſſionum dabit proxime integram potentiam in eleuationem aquarum, quae in diabete continentur, impendendam: vocabo deinceps pro quauis helice, *altitudinem arcus aquei* illam altitudinem verti-

tica-

ticalem, qua in illa helice extremitas poſterior aquae eleuata eſt ſupra extremitatem anteriorem; ſinguli autem arcus aërei comprimuntur vi, quae reſpondet ſummae altitudinum arcuum aqueorum a tergo ſubſequentium; quanto magis eleuandae ſunt aquae in diabete aſſurgente, tanto maiores oriri debent altitudines arcuum aqueorum, donec tandem ſummitatem helicis ſuae attigerint, qui vltimus eſt machinae propoſitae effectus: tunc arcus aquei integram capacitatem lateralem ſiniſtram occupant, totumque latus dextrum aëre ſit repletum oportet: figura noſtra prima vltimo huic ſtatui reſpondet, in qua numeri impares arcus aqueos, numeri pares arcus aëreos indicant; hunc vltimum ſtatum vt ſinguli arcus aquei ſimul attingant, opera danda eſt, ne vlla in ordinatione perturbatio oriri poſſit: quod ſi altitudo diabetae aſſurgentis excedat ſuos limites, nullae profecto aquae effluent, nullaeque a ſitella haurientur, niſi quantum requiritur, vt paruuli excitentur motus reciproci, dum alternis vicibus parum aquae ſitellam ingreditur rurſusque eiicitur.

§. 5. Cum nullus *arcus aqueus* maiorem poſſit habere *altitudinem*, quam eſt diameter helicis ſuae, ſequitur aquas in diabete contentas nunquam maiorem exercere poſſe repulſum, quam qui reſpondet altitudini omnium diametrorum ad ſingulas helices pertinentium; imo ob multas rationes requiritur, vt aquae in diabete contentae minorem reniſum faciant, quam qui deducitur ex praefata diametrorum ſumma; inter has rationes pro momentoſiſſima habeo

beo, quod helices in progreſſu ſuo verſus centrum aliquam capacitatis ſuae diminutionem capeſſere debeant, vti mox demonſtrabo, ſi omnia rite perficere velimus; ſic igitur, ſi extima helix ad dimidium fuerit aquis repleta, fiet vt haec eadem aquarum quantitas in interioribus helicibus arcum efformet plus quam 180 graduum; tunc autem neceſſe eſt, vt *altitudo arcus aquei* minor ſit quam diameter helicis; apparet exinde, non tam diametros helicum, quam *altitudines arcuum aqueorum* accipiendas eſſe, ex quarum ſumma aliquod de altitudine diabetis ferri poteſt iudicium; attamen cum non ita pridem paruulam obtinuiſſem machinam, protinus prouidi, fore vt machinula diabeten admitteret multo altiorem quam eſſet ſumma altitudinum arcuum aqueorum, immo quam ſumma diametrorum; id valde paradoxum videbatur amicis praeſentibus, in quorum conſpectu primum parabam experimentum; mox tamen, audita aſſerti ratione, in ſententiam meam tranſierunt, nec exſpectationem noſtram fefellit experimentum. Iam dicam, quod res eſt.

§. 6. Machina Wirziana alternatim aquam et aërem haurit, hauſtaque per orificium diabetis ſuperius reddit; diabetes in paruula machinula, quam prae manibus habebamus, vix duas lineas in diametro habebat, nec aquae in hoc ſiphone ſtrictiori diffluere poterant: igitur in illo formari debebant columellae aqueae et aëreae alternatim poſitae, atque aſcendere: cum vero pondus columellarum aërearum facile negligi poſſit, ſolae columnae aqueae pondere

ſuo

ſuo reactionem facient: poſtulat igitur aequilibrium, vt maxima diabetis altitudo aeſtimetur ex ſola ſumma columellarum aquearum, neglecta altitudine columellarum aërearum: hoc modo altitudo diabetis abſoluta erit multo maior quam altitudo hydroſtatica. Erit autem altitudo hydroſtatica ad altitudinem abſolutam proxime vt 1 ad $1 + \frac{a}{A}$ log. hyperb. $(1 + \frac{a}{A})$, ſi per a intelligatur ipſamet altitudo hydroſtatica, et per A altitudo aquae, cuius preſſio eadem ſit cum preſſione atmoſphaerae. At ſi aquae ductus aſcendens amplior fuerit, facile eueniet, vt aër intermixtus erumpat, ſicque pars aquarum confluat, quod ſi contingat, minorem aſcenſum machina permittet.

§. 7. Quae modo dixi de augenda aquarum eleuatione ab intermixto aëre, iam diu mihi fuerant obſeruata, cum viderem idem hoc artificium Pariſiis fuiſſe excogitatum atque felici cum ſucceſſu adhibitum in antlia aſpirante (*pompe aſpirante*), cuius ope aquae ad altitudinem notabiliter maiorem quam 33 aut 32 pedum ex caſtello adducebantur, prouti videre eſt in poſterioribus Commentariis Academiae Regiae Scientiarum Pariſinae, huncque mirandum effectum obtinuit Inuentor hoc ſolo artificio, quod in inferiori parte machinae aëri per paruulum foraminulum acceſſum concederet: ſic nempe aquae aëre permixtae veluti fluidum efformebant ſpecifice leuius quam eſt aqua pura, quod tanto altius quanto leuius eſt a preſſione atmoſphaerae eleuari poterat. Vi-

deantur hac de re hiſtoria et Commentarii praelaudatae Academiae ad annum 1766. pag. 150. et 431. Summam memorabilis inuenti paucis exponam verbis. Machina exſtat Pariſiis in aedibus D. *Bellangé* compoſita ex tubo vel diabete verticaliter aſſurgente, extremitate ſua inferiore aquis immerſo; diametrum internam habet 10. lin. atque aſcendit ad altitudinem 55. ped. vbi inſeritur in antliam, 25. lin. pro diametro interna habertem, in qua embolus agitationes reciprocas 8. poll. permittit; embolus ipſe perforatus eſt atque valuula inſtructus, quae aſcenſum aquis concedit, deſcenſum aut regreſſum negat: in infima tubi parte ſimilis eſt valuula aquis ex caſtello vel dolio ingreſſum in tubum, cum embolus in antlia eleuatur, concedens, regreſſum, cum deprimitur embolus, vetans. Denique in parua diſtantia, veluti decem pollicum, a ſuperficie aquae in dolio contentae, diabetes aſcendens a latere paruulo foramine perforatus eſt, cuius diameter ſemilineam parum ſuperat, interius valuula debiliſſima ac mobiliſſima obtecta, aëri externo, dum embolus eleuatur, ingreſſum permittente, at egreſſum omnem, cum deprimitur embolus, impediente. Ope huius machinae, dum agitatur embolus, aquae ad totam diabetis altitudinem 55. ped. vna cum permixto aëre, per foraminulum laterale ingreſſo, eleuantur, antliam ingrediuntur, embolum dum depremitur traiiciunt, ob eodemque mox eleuato ex antlia eiiciuntur Cl. *Nolletus* vera huius effectus tradit principia mechanico-phyſica generalia; menſuras atque proportio-

portiones reconditas non addit, quae calculum paullo operoſiorem requirunt, quamuis plane neceſſariae ſint, vt pro diuerſis circumſtantiis effectus non ſolum explicari ſed et prouideri poſſint. Commentationes, quas reliquas fecit Cl. D. *Nollet*, nunc nimis alienas, in aliud differam otium. Nunc in viam redeo.

§. 8. Quae adhuc diximus, generaliora ſunt; ſunt autem nonnulla ſpecialius pertractanda. Quo maior adhibetur ſpirarum numerus, eo facilius continget, vt aquae in diuerſis helicibus ſitum obtineant valde inordinatum; in aliquibus helicibus *altitudines arcuum aqueorum* (§. 4.) poterunt eſſe maximae, in aliis minores, in aliis negatiuae, ſi nempe praeponderent in latere dextro; pro re nata fiet, vt effectus oriatur maximus, vel minor vel etiam nullus, quod poſterius iam dixi §. 3. ipſi Inuentori in primo ſuo tentamine contigiſſe. Ante omnia certiores ſimus, fieri non poſſe, quin ſinguli arcus aquei magis ſint eleuati a latere ſiniſtro, quam a dextro; ſic enim omnes ad communem inter ſe conſpirabunt effectum; at enim quamuis tunc aquae in vna vel altera helice imo in ſingulis helicibus ſint multo minus eleuatae, quam alias fieri potuiſſet, decreſcet quidem altitudo, ad quam aquae per diabeten eleuari poſſint, ſimul autem in eadem ratione decreſcet potentia ad machinam circumagendam requiſita, ita vt nihil de effectu vtili perdatur.

§. 9. Cardo negotii in hoc verti videtur, vt cuiuis helici debita concilietur capacitas: cum arti-

ſex noſter, in ſecundo ſuo tentamine, ſingulis helicibus aequalem dediſſet capacitatem, egregium habuit ſucceſſum, nec tamen optimum, ſi aquae ad maiorem eleuandae fuiſſent altitudinem. Optima erit methodus, quae ad ductum paragraphi quinti inſtituitur: arcus aquei ſuum vtique volumen ſeruant, dum omnes helices percurrunt, ſi modo aquae nusquam regurgitare poſſint in helicem proximam vnde venerant; at vero arcus aërei, dum cochleam percurrunt, continuo magis magisque comprimuntur, condenſantur, atque in minus volumen coërcentur. Velim autem ego, vt vterque arcus, aqueus et aëreus, vbique integram expleant helicem; id enim ni fiat, perturbabitur ſitus, quem aquae et aër in helicibus ſingulis obſeruare debent, atque in paragraphum praecedentem peccabitur. Neceſſe adeoque eſt, vt capacitas helicum tanto magis diminuatur, quanto propior facta eſt centro. In primo tentamine Inuentor nimis conſtrinxit helices verſus centrum, in ſecundo nimis aperuit. Quod ſi huic noſtro ſatisfiat praecepto, eueniet vbique, vt arcus aqueus plusquam dimidiam helicis ſuae occupet partem; atque adeo vt *altitudo arcus* aquei ad integram helicis diametrum nunquam aſcendere poſſit, etiamſi ſummitas arcus aquei in ipſa ſummitate helicis poſita ſit: ſemper enim deficiet iſta altitudo ea parte, quae reſpondet ſinui verſo arculi ſuperabundantis: at exiguus eſt iſte defectus, nec vllum inde oritur *effectus vtilis* decrementum, ratione habita ad potentiam motricem ſimul diminutam. Hos ſingulos arcus.

cus aqueos, quotcunque fuerint, certiſſime habebimus conſpirantes apteque locatos; quae ſola conditio eſſentialiter cum argumento noſtro connexa videtur, atque optatum machinae ſucceſſum certum reddit: nec tamen requiritur, vt omni accuratione expleatur: imo pro minoribus aquarum eleuationibus parum derogabitur ex machinae perfectione, ſi eadem capacitas in ſingulis helicibus conſeruetur.

§. 10. Vt vera atque conuenientiſſima determinetur amplitudo in ſingulis helicibus, ante omnia reſpiciendum eſt ad altitudinem diabetis per quem aquae eleuandae ſunt: vidimus autem §. 6. diabeten, praeſertim ſi ſtrictior fuerit, columellis impleri aqueis et aëreis alternatim poſitis atque ſolas priores pondere ſuo comprimere aërem infimum diabeti incarceratum, quia pondus columellarum aërearum facile negligi poteſt; eadem autem eſt compreſſio aëris in intima helice, quae eſt in infima parte diabetis; fuerit iam altitudo diabetis $= b$ et altitudo integra omnium columellarum aquearum $= a$, habebimus vi paragraphi ſexti $a +$ A log. hyperb. $(1 + \frac{a}{A}) = b$ quam proxime; atque haec aequatio, facillima appropinquatione, ſubminiſtrabit valorem altitudinis a; ſub qua aqua comprimit aërem in intima helice contentum; quia vero altitudo atmoſphaerae concurrit ad comprimendum eundem aërem, haec in aquam conuerſa erit $=$ A et integra altitudo $= a +$ A. In extima helice aër eſt naturalis, atque comprimitur ſola altitudine A: erit adeoque denſitas aëris naturalis ad denſitatem aëris in inti-

intima helice contenti vt A ad $A + a$, et cum quantitas aëris eadem ſit in vtraque helice, erit ſpatium aëreum in extima helice ad idem ſpatium in intima vt $A + a$ ad A; quod ſi itaque ſpatium aëreum in extima helice ſit $= c$, erit idem ſpatium in intima helice $= \frac{A}{A + a} c$ et cum extima helix aequali volumine aëris atque aquae impleta ponatur, erit capacitas extimae helicis $= 2c$; capacitas vero intimae helicis $= c + \frac{A}{A + a} c$; ſunt itaque ambae capacitates vt 1 ad $\frac{2A + a}{2A + 2a}$; erit quoque capacitas extimae helicis ad differentiam inter extimam et intimam vt 1 ad $\frac{a}{2A + 2a}$.

Quod deinde attinet ad helices intermedias, ſufficiet praefatam differentiam aequaliter diſtribuere, ita vt differentia inter quasuis duas helices proximas eadem ſit, nempe $= \frac{1}{n - 1} \times \frac{a}{2A + 2a}$, ſi per n intelligatur numerus helicum. Inde facillime etiam deducitur pro quauis helice ratio inter arcum aqueum et arcum aëreum, modo vnica quaeuis helix vniformis amplitudinis cenſeatur.

§. 11. Lubet haec omnia vnico illuſtrare exemplo: ponatur $a = A = 32$ ped. paris. ſic fiet, vi paragraphi praecedentis, altitudo diabetis $b = a + A$ log. hyperb. $(1 + \frac{a}{A}) = 54$. ped. neglecta fractione ſuperaddenda; habebimus porro denſitatem aëris in intima helice duplo maiorem, quam eſt denſitas aëris naturalis: capacitatem intimae helicis = tribus quartis partibus capacitatis extimae helicis. Denique duae partes

partes intimae helicis aqua, vna pars aëre condenſato replebitur: arcus nimirum aqueus erit 240. gr. aëreus 120 gr. Numerus autem ſpirarum vel helicum tantus ſit oportet, vt ſi in ſummam colligantur *altitudines arcuum aqueorum* paragrapho quarto definitorum, fiat haec ſumma paullo maior, quam 32 p. d. Caeterum praefatae menſurae conueniunt machinae non ſolum perfectiſſimae, ſed et ad ſtatum maximae ſuae efficacitatis reductae, pro quo nimirum ſinguli arcus aquei ad ſummitatem helicis ſuae pertingunt; quia vero in hoc ſtatu facile euenit, vt aquae hanc ſummitatem praeterlabantur et in helicem praegreſſam regurgitent, imo vt aquae in diabete ſubſiſtant nullaeque effluant, velim vt in calculo altitudo *b* octaua vel ſaltem decima ſua parte maior adhibeatur, quam quae pro altitudine diabetis propoſita eſt: conuenientiſſimas puto allatas proportiones, cum aquae ad altitudinem 48 vel 50 pedum ſunt eleuandae. Imo ſi diabetes ita amplus ponatur, vt conſeruatio columellarum aërearum integra locum habere non poſſit, tunc altitudo eius parum ſuperabit altitudinem *a*, id eſt, 32 ped. haec omnia probe diſpiciantur antequam ipſa machinae constructio tentetur.

§. 12. Quae dixi de augmento altitudinis, ad quam aquae data machina eleuari poſſint, ab interſertis columellis aëreis oriundo, eſſentialiter ad machinae effectum pertinent, nec ſine diſpendio adhibitarum virium motricium negligi poſſunt; et enim machina nihil addit altitudini *a*, quod non acceperit

rit a viribus motricibus adhibitis, et cum vires eaedem impendantur, ſiue negligatur augmentum ſiue ſtudioſe conſeruetur, caueamus, ne plus de viribus motricibus pereat, quam neceſſe eſt: vires motrices non ſolum in motum aquarum machinae incluſarum earumque in ſingulis helicibus eleuationem, ſed et in compreſſionem atque condenſationem aëris interni impenduntur. Oſtendi autem in *Hydrodynamica* mea, omni aëri condenſato *vim viuam potentialem* ineſſe, cuius ope datum pondus, ad certam altitudinem, quam in *Hydrodynamica* definiui, eleuari poſſit, antequam exhauſta fuerit. In noſtro autem argumento, quod hic tractamus, exhauritur, dum omnes aquae vlterius eleuantur ad altitudinem $b-a$ ſiue altitudinem A log. hyp. $(1+\frac{a}{A})$. Huc quadrat *Hydrodynamicae* ſectionis decimae paragraphus quadrageſimus. Igitur ſi nobis timeamus a nimia diabetis amplitudine, quam vt columellae aëreae manere poſſint integrae, exiſtimo huic incommodo occurri poſſe, ſi plures diabetae coniungantur: Nec tamen puto, fieri vnquam poſſe, vt omnes aquae in diabete confluant, liberamque aëri eruptionem concedant; videtur enim id minime timendum eſſe de aquis celeriter ſatis transfluentibus, nec de aëre tot vinculis retento. Quin etiam ſi concedatur, aërem maxima parte in aquas proximas penetrare, an propterea ſe ſtatim totus extricabit? non puto; videtur enim, in progreſſu ſuo aquas permanſuras eſſe ſpumoſas, atque adeo leuiores, quam ſint aquae purae; huiusmodi permixtio aëris cum aqua eundem prope-

modum

modum effectum habebit, quem faciunt columellae aqueae et aëreae ſibi inuicem ſuccedentes.

§. 13. Pauca ſuperſunt monenda de diabete aſſurgente; equidem exiſtimo non male actum fore, ſi amplitudo eius fiat vniformis atque tanta ſit, quanta eſt amplitudo helicis intimae, ſique machina ea circumagatur velocitate, vt omnis aqua omnisque aër ex helice in diabeten quauis reuolutione transfundantur. Hac poſita diſtributione erunt ſingulae columellae aqueae in diabete eiusdem altitudinis; ipſaeque etiam columellae aëreae, ſi in denſitatem naturalem reſtitutae putentur, eadem illa altitudine gauderent in hypotheſi noſtra, qua nimirum ſingulis machinae reuolutionibus aquam et aërem naturalem aequali volumine hauriri ponimus, cui ſoli hypotheſi, breuitatis gratia, inſiſtimus, ne in re facili moleſti ſimus nimia prolixitate. Sit nunc altitudo cuiusuis columellae aqueae $= \alpha$, earumque numerus $= n$, atque putemus columellam aqueam eſſe in diabetis ſummitate poſitam; erit altitudo ſubſequentis columellae aëreae $= \frac{A\alpha}{A+\alpha}$; deinde ſimilis altitudo pro ſecunda, tertia etc. columella aërea erit $\frac{A\alpha}{A+2\alpha}$; $\frac{A\alpha}{A+3\alpha}$ etc. vsque dum perueniatur ad infimam columellam aëream, cuius altitudo erit $= \frac{A\alpha}{A+n\alpha}$. Igitur omnes et ſingulae columellae aëreae ſimul ſumtae altitudinem habebunt, aequalem ſummae terminorum

$$\frac{A\alpha}{A+\alpha} + \frac{A\alpha}{A+2\alpha} + \frac{A\alpha}{A+3\alpha} \ldots\ldots\ldots + \frac{A\alpha}{A+n\alpha}.$$

Equidem notum eſt, huiuscemodi progreſſiones indefinitas perfecte ſummabiles non eſſe, poſſe tamen quam proxime earum ſummam indicari, quicunque numeri aſſumantur pro literis A, α et n. Sic peculiari appropinquatione inuenio hanc ſummam propemodum $= \frac{A\alpha}{A+\alpha} + A \log. \text{hyperb.} \frac{2A+2n\alpha+\alpha}{2A+3\alpha}$, quae expreſſio plus ſatis conuenit argumento noſtro; fuerit, exempli gratia, $A = 32$ ped. $\alpha = 1$ ped. et $n = 32$, erit ſumma omnium altitudinum aërearum $\frac{32}{33} + 32 \log. \text{hyperb.} \frac{129}{67} = 21,916$. At vero ſumma omnium columellarum aquearum altitudinem habet $n\alpha = 32$. Hae determinationes optime conueniunt cum paragrapho vndecimo, vbi idem pertractauimus ſub alia facie exemplum, cum litera a idem ſignificet, quod $n\alpha$.

§. 14. Fieri vtique poteſt, vt machina, dum rotatur, aquam et aërem naturalem inaequali volumine hauriat; tunc etiam columellae aqueae et aëreae in diabete mutabuntur: fuerint ambo volumina praefata α et β; fiet quaeuis columna aquea, vt antea, $= \alpha$; at vero quaeuis columna aërea ſuam altitudinem mutabit in ratione α ad β; igitur altitudo pro omnibus columellis aqueis manebit $= n\alpha = a$; at vero altitudo pro omnibus columellis aëreis fiet $= \frac{A\beta}{A+\alpha} + \frac{A\beta}{\alpha} \log. \text{hyperb.} \frac{2A+2n\alpha+\alpha}{2A+3\alpha}$. Haec omnia ita ſe habere, obſeruare potui in machinula typica cuius diabetes componebatur ex tubis vitreis decem pollices longis, in vtraque extremitate cochlea orichalcea inſtructis, vt vnus cum altero firmiter cohaere-

haereret atque perfecte iungeretur; ſic altitudo diabetis pro lubitu augeri vel diminui poterat. Convenientiſſimum autem videbatur, cum machinula ita aquis ſubmergebatur, vt aequali volumine aquam et aërem naturalem alternatim in ſe ingurgitaret, quod factum facile intelligitur ex comparatione columellarum aquearum et aërearum in diabete.

§. 15. Non difficile eſt, rem ita immutare, vt aqua et aër ſimul in diabeten transfluant, nec tum porro vllae formabuntur columellae in diabete, ſed aqua habebitur inſigniter ſpumoſa vel aëre turgida: fluidum mixtum denſius erit in inferiori diabetis parte quam in ſuperiori; id quoque contingit in noua machina Pariſina §. 7. deſcripta. Haec denſitatum variatio pluribus quaeſtionibus phyſicis ſoluendis inſeruire poteſt: nunc vero aliud non monebo, quam quod ad argumentum noſtrum pertinet. Dico igitur, quod pro noua hac hypotheſi in duobus paragrahis praecedentibus litera α conſideranda ſit tanquam infinite parua, numerus n tanquam infinite magnus, ita vt pro $n\alpha$ ſemper poni poſſit altitudo a, quae denotat altitudinem omnis aquae in diabete contentae, ſi ab omni aëre liberaretur: hoc modo poteſt quantitas $\frac{A\beta}{A+\alpha}+\frac{A\beta}{\alpha}$ log. hyperb. $\frac{2A+2n\alpha+\alpha}{2A+3\alpha}$ cenſeri $=\frac{A\beta}{a}$ log. hyp. $(1+\frac{a}{A})$: eſt itaque altitudo, quam omnis aër inaequaliter denſus occupat, vt a ad $\frac{A\beta}{\alpha}$ log hyperb. $(1+\frac{a}{A})$ vel, poſito $\beta=\alpha$, vt a ad A log. hyp. $(1+\frac{a}{A})$. Sic igitur ſi ponatur, exempli gratia, $a=A$, erunt praefatae altitudines in ra-

 tione

tione 1 ad log. hyp. 2 ſiue proxime vt 100 ad 69; vnde integra diabetis altitudo nunc fiet $=\frac{169}{100}\times 32 = 54.08$ ped. conferantur §.§. 6. 10 et 11. Suprema autem columella aërea altitudinem habebit duplam eius, quam infima habet.

§. 16. Atque haec ſunt, quae partim ad nouae cochleae explicationem, partim ad veram eiusdem oeconomiam, quae optatum ſucceſſum et certiorem et vberiorem reddat, inſeruire poſſe exiſtimaui: ſua nouitate perinde placuit atque ingenio haec machina omnibus, in quorum notitiam venit; de pluribus autem eius momentis varii varia ſtatuerunt; duo ſunt quae mihi quidem in machina Wirziana minus placent; *primum* eſt, quod difficillimum putem, praeſertim in machinis maiusculis, totum laminae intortae tractum vtroque fundo ita cooperire, vt ne minima quidem rimula ſuperſit; hinc factum eſt, accuſante ipſo Cl. *Zieglero*, vt ceſſante rotatione aquae in diabete mox ſubſiderent, quae certe ſuſpenſae haerere debebant. *Secundum* eſt, quod diametri helicum verſus interiora inſigniter decreſcant, nimio virium motricium decremento; alium igitur ſuaſi cochleae perficiendae modum praeſtantiorem ſimul atque ſua conſtructione longe faciliorem, quem nunc quoque ipſi artifices tigurini ſequuntur. Nouam cochleam paucis exponam verbis.

§. 17. Tubus plumbeus ſufficientis longitudinis, cuius diameter 8, 10 vel 12 lineas habuerit, tympano circumflectatur gyris iuxta ſe inuicem poſitis;
diame-

diameter tympani, pro re nata, ſit vnius, duorum pluriumue pedum, atque tubus efformet duodecim, ſedecim aut plures circumuolutiones; tum vero verſus axem tympani dirigatur ibique cum aſſurgente, vt ante, coniungatur. Huiusmodi machinae conſtructio vtique facillima eſt, nec vlli periculo vel minimae eruptionis lateris obnoxia, quae in latentibus rimulis timeri poſſit, ſimulque maiores format arcus aqueos: ſed et haec mutata conſtructio eandem vbique requirit helicum diminutionem, quam paragrapho nono et ſequentibus definiui, qua ſola effici poteſt, vt ſinguli arcus aquei atque aërei in toto plumbei decurſu ſua ſponte debitam conſeruent diſpoſitionem atque collocationem: patet vero, hanc helicum diminutionem duobus diuerſis modis poſſe obtineri, vel coarctando tubum plumbeum tympano cylindrico circumflectendum, vel adhibendo tympanum conicum pro tubo vniformiter amplo, cuiusmodi propemodum configuratio in horologiis portatilibus conciliatur paruulo cono truncato, quem catenula inuoluit, et quem galli *fuſee* vocant. Sic pro exemplo, quod in paragrapho decimo atque vndecimo pertractauimus, diametri in vtraque baſi rationem obtinerent vt 4 ad 3, ſi tubus plumbeus ab vna baſi ad alteram decurrat.

§. 18. Si lubeat praefato tympano, ſiue cylindrico ſiue conico, capſulam vel receptaculum cylindricum longitudinaliter et ſub axe communi firmiter adiungere, cui tubus plumbeus pleno orificio

inſeratur, fiet vt alternis vicibus aqua et aër in iſtud receptaculum iniiciantur, ex quo demum vtrumque fluidum in diabeten attollentem impelletur, ſed alio modo, ac antea: nempe altera medietas receptaculi erit aquis repleta, altera aëre condenſato; aër condenſatus aquam in diabeten impellet, ſimulque et ipſe, vna cum aqua, iugiter in eundem iniicietur: quod receptaculum perdit, continue reparatur ab effluxu per tubum in cauitatem
Tab. III. receptaculi hiantem, vid. fig. 3. Sic igitur traiectio, in vtroque fluido ſimul facta, non ſinet venam ſuperius effluentem eſſe interruptam; aër, ni fallor, cum aqua permixtus manebit in diabete, at dum aſcendit dilatabitur, et cum iam effluxui proximus eſt, ad denſitatem naturalem reductus erit. In machina Pariſina §. 7. deſcripta vtrumque fluidum eodem modo manet permixtum, etiamſi in ſuprema parte maſſae aëreo-aqueae nonniſi ſexta pars denſitatis naturalis ſuperſit, quae aequae purae ineſt. Atque ſic etiam paragrapho decimo quinto ſatisfecimus, vnde fortaſſe augmentum altitudinis, de quo paragrapho ſexto mentionem feci, vel in ſiphonibus amplioribus, integrum manebit et omne virium in rotationem machinae adhibitarum diſpendium vitabitur. Caeterum machina Wirziana, quae alis inſtructa eſt, facile ab ipſo flumine, cui inſidet, rotatur.

EXPLI-

EXPLICATIO FIGVRARVM.

Figura prima et ſecunda pertinent ad paragraphum ſecundum atque indicant, quemadmodum, alternis vicibus, aqua et aër ex cauitate intimae helicis C, in figura prima, impellantur in canalem C figurae ſecundae, poſtquam choenicion fundo machinae, circa centrum perforato, ſuperimpoſitum et exacte adaptatum fuit. Tab. III.

Figura tertia pertinet ad paragraphum 17 et 18. atque ideam vel configurationem machinae correctae ſiſtit. Nempe *a b c d* corticem ſiſtit tympaniformem, cui canalis plumbeus

1. 2. 3. 4. 5. 6 . . . . 25. 26. 27. 28. 29 30

circumuolutus eſt. Praefato tympano *a b c d* firmiter adiungitur receptaculum *c d e f* ex ferro conſtructum, ſuper quo extremitas tubi plumbei a 29 ad 30 decurrit, eidemque inſeritur, ita vt, alternis vicibus, aqua et aër ex tubo in cauitatem receptaculi iniiciantur. Vtrumque autem fluidum ſimul per ductum excretorium C D, continue cum integra machina rotatum, traiicietur in diabeten aſſurgentem et immotum D F.

DE

DE COLLISIONE CORPORVM GYRANTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

Si globus circa axem fixum in gyrum agatur, celeritate quacunque, in eumque impingat directe alius globus; definire conflictum, ſiue motum, quo poſterior globus poſt conflictum mouebitur, quandoquidem prior globus vi aliena perpetuo in motu ſuo gyratorio conſeruetur.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. 1. Axis fixus circa quem prior globus gyratur, perpendicularis concipiatur ad planum tabulae, ſitque eius centrum in A et radius $AD = a$, ducaturque directio fixa, quae ſit ADE, ad quam tamquam axem elementa calculi referamus; ponamus iſtius globi radium $AD = a$ et celeritatem gyratoriam ſeu angularem $= \alpha$, qua hic globus in ſenſum DCF in gyrum agatur, ita vt eius celeritas in puncto D vel C ſit $= \alpha a$, vbi notandum α eſſe angulum vno minuto ſecundo abſoluendum.

2. Quia

2. Quia conflictum fieri in directum aſſumimus, neceſſum eſt, vt centrum alterius globi in ipſo plano tabulae proferatur, ponamus autem huius globi radium $= b$, eiusque maſſam $=$ B, ita autem ſit comparatus, vt eius centrum inertiae in ipſum centrum globi incidat. Qualem autem motum hic globus ante conflictum habuerit, deinceps indicemus, quoniam in ipſa Analyſi, quatenus ex principiis Mechanicae inſtituitur, nihil refert, quicunque fuerit ſtatus initialis.

3. Poſtquam conflictus inchoauerit et etiamnunc durat elapſo tempore $= t''$, teneat alter globus ſitum in figura repraeſentatum, cuius centrum ſit B ideoque ducta recta A B, contactus mutuus in punctum C incidet, foretque centrorum diſtantia A B $= a + b$, niſi ob conflictum quaepiam impreſſio mutua eſſet producta, vnde ob hanc impreſſionem diſtantia A B aliquantillum erit minor, quare poſito breuitatis gratia $a + b = c$, ſit nunc diſtantia A B $= c - s$, vbi quidem tenendum eſt, hanc quantitatem s ſemper fore quam minimam, dum autem ambo globi per hoc ſpatiolum $= s$, in ſe mutuo quaſi penetrarunt, in ipſo contactu C naſcetur certa vis vlteriori penetrationi reluctans, quae ſit $=$ S, haecque in globum B aget ſecundum directionem C B, quamquam autem hanc vim a priori definire non licet, tamen ea certe ſpectari poterit, vt functio ipſius s.

4. Ponatur nunc angulus E A B $= \Phi$, et ex B ad rectam fixam A E ducta normali B X, vo-

catisque coordinatis A X $= x$ et B X $= y$, habebimus

$$x = (c-s)\,\text{coſ.}\,\Phi \quad \text{et} \quad y = (c-s)\,\text{ſin.}\,\Phi$$

vnde fit

$$x\,\text{coſ.}\,\Phi + y\,\text{ſin.}\,\Phi = c - s \quad \text{atque} \quad x\,\text{ſin.}\,\Phi - y\,\text{coſ.}\,\Phi = 0,$$

quas formulas in poſterum plurimum notaſſe iuuabit. Conſtitutis his coordinatis motum centri globi B exprimere poterimus, quippe cuius celeritas ſecundum directionem A E erit $= \frac{dx}{dt}$ et ſecundum directionem X B $= \frac{dy}{dt}$, quatenus autem hic globus a vi S in directione C B vrgetur, inde naſcetur vis in

directione A X $=$ S. coſ. Φ et in

directione X B $=$ S. ſin. Φ.

5. Quia vero globus A in gyrum agitur in ſenſum D C F, ſimul ac alter globus eum contingere incoepit, ipſi tam ob impreſſionem, quam ob frictionem inducetur etiam motus gyratorius in ſenſum C G H, cuius celeritas angularis praeſenti momento, ſit $= \frac{d\zeta}{dt}$, ita vt celeritas in puncto C futura ſit $= \frac{d\zeta}{dt}$, quoniam hic exiguam illam diminutionem ob particulam s negligere licet, cuius celeritatis directio erit recta C γ ad B C normalis. Haec ſcilicet foret celeritas puncti C, ſi centrum globi B quieſceret; verum quia ipſum centrum motum habet ante aſſignatum, idem quoque inſuper puncto C tribui debet. Quatenus autem punctum C in directione A X celeritate $= \frac{dx}{dt}$ fertur, inde in directionem C γ reſultat celeritas $- \frac{dx}{dt}$ ſin. Φ, ex altera vero

ro celeritate $\frac{dy}{dt}$ in directione X B reſultat $\frac{dy}{dt}$ coſ. Φ ita vt vera celeritas globi B in puncto C futura ſit

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} - \frac{dx}{dt}\text{ ſin. }\Phi + \frac{dy}{dt}\text{ coſ. }\Phi,$$

quum autem ſit

$$x\text{ ſin. }\Phi - y\text{ coſ. }\Phi = 0$$

erit differentiando

$$dx\text{ ſin. }\Phi - dy\text{ coſ. }\Phi + d\Phi(x\text{ coſ. }\Phi + y\text{ ſin. }\Phi) = 0$$

vnde fit

$$dx\text{ ſin. }\Phi - dy\text{ coſ. }\Phi = -d\Phi(c-s),$$

quare vera celeritas illa ſecundum C γ obtinetur

$$= \frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c-s).$$

6. Quatenus autem punctum C in priori globo A accipitur, eius celeritas in eadem directione C γ eſt $a\alpha$, cui ſi illa celeritas eſſet aequalis, nullus attritus in contactu contingeret; nulla ergo vis exſurgeret, motum gyratorium globi B ſiue accelerans ſiue retardans. Verum quamdiu celeritas $a\alpha$ maior eſt celeritate

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c-s)$$

attritus orietur, quo celeritas gyratoria globi C γ accelerabitur, contra vero ſi

$$\frac{b\,d\zeta}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}(c-s)$$

maior eſſet quam illa $a\alpha$, motus gyratorius globi B retardaretur, quam ob rem hi tres caſus probe a ſe inuicem diſtingui conuenit.

I^mus Caſus quo $a\alpha > \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$ et motus gyratorius globi B acceleratur.

II^dus Quo $a\alpha = \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$ et motus iſte nullam alterationem patitur, ac

III^tius quo $a\alpha < \frac{b\,d\zeta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$ motusque ille retardatur.

7. Haec autem vis ſiue accelerans ſiue retardans motum gyratorium globi B ob frictionem naſcitur, quam nouimus partim ab aſpritie in contactu, partim vero a mutua preſſione, qua ambo corpora ſe vrgent, pendere. Quum igitur hi duo globi ſe mutuo vrgeant vi $= S$, frictio commode exprimi ſolet formula δS, vbi δ eſt certa fractio ab aſpritie pendens, quae plerumque aeſtimatur $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ vel ſi corpora fuerint probe leuigata adhuc minor, conſequenter globus B in puncto C, ſecundum directionem $C\gamma$ ita ſollicitatur, vt haec vis pro *primo* caſu ſit $= +\delta S$, pro *ſecundo* caſu $= 0$ at pro *tertio* caſu $= -\delta S$.

8. Ne opus habeamus hos tres caſus perpetuo a ſe inuicem diſtinguere, ſit $b\,a$ breuitatis gratia $= \Sigma$ vis ſecundum directionem $C\gamma$ agens, ita vt ſit caſu primo

$\Sigma = \delta S$, caſu ſecundo $\Sigma = 0$ et caſu tertio $\Sigma = -\delta S$.

Haec autem vis Σ non ſolum motum gyratorium globi B afficit, ſed etiam eius motum progreſſiuum, idque perinde, ac ſi in ea in ipſo centro B eſſet applicata, inde ergo orietur vis ſecundum

$$AX = -\Sigma \sin.\Phi$$ et

et ſecundum directionem

$$XB = + \Sigma \operatorname{coſ.} \Phi$$

vnde omnes vires motum progreſſiuum huius globi ſollicitantes erunt:

I^a. Vis ſecundum directionem $AX = S \operatorname{coſ.} \Phi - \Sigma \operatorname{ſin.} \Phi$

II^{da} ſecundum directionem $XB = S. \operatorname{ſin.} \Phi + \Sigma \operatorname{coſ.} \Phi$.

Ex his viribus accelerantibus, poſita altitudine ex qua graue delabitur vno ſecundo $= g$, ſumtoque elemento dt conſtante, motus progreſſiuus globi b determinabitur his duabus aequationibus:

$$\text{I.}\quad \frac{B.\,ddx}{2g\,dt^2} = S. \operatorname{coſ.} \Phi - \Sigma \operatorname{ſin.} \Phi$$

$$\text{I}'.\quad \frac{B.\,ddy}{2g\,dt^2} = S. \operatorname{ſin.} \Phi + \Sigma \operatorname{coſ.} \Phi\,,$$

at vero pro eius motu gyratorio, ſi globi momentum inertiae ponatur $= Bkk$, quia momentum vis Σ eſt $= \Sigma b$ habebitur iſta aequatio:

$$\text{III.}\quad \frac{Bkk\,dd\zeta}{2g\,dt^2} = \Sigma b \;\; \text{ſiue} \;\; dd\zeta = \frac{2gb\Sigma dt^2}{Bkk}.$$

9. Euoluamus primo duas aequationes priores, atque ex iis eliciemus has duas ſequentes:

$$ddx \operatorname{coſ.} \Phi + ddy. \operatorname{ſin.} \Phi = \frac{2gSdt^2}{B} \quad \text{et}$$

$$ddy \operatorname{coſ.} \Phi - ddx. \operatorname{ſin.} \Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}$$

quum autem ſit

$$x \operatorname{coſ.} \Phi + y \operatorname{ſin.} \Phi = c - s \quad \text{et} \quad x \operatorname{ſin.} \Phi - y \operatorname{coſ.} \Phi = 0$$

erit vti iam vidimus

$$dx \operatorname{coſ.} \Phi + dy \operatorname{ſin.} \Phi = -ds \;\; \text{et} \;\; dx \operatorname{ſin.} \Phi - dy \operatorname{coſ.} \Phi = -(c-s)d\Phi$$

atque vlterius differentiando

$$ddx\cos.\Phi + ddy\sin.\Phi = -dds - (c-s)d\Phi^2$$

$$ddy\cos.\Phi - ddx\sin.\Phi = (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi$$

conſequenter binae aequationes motum progreſſiuum definientes ſunt

$$\text{I. } dds + (c-s)d\Phi^2 = -\frac{2gSdt^2}{B} \text{ et}$$

$$\text{II. } (c-s)dd\Phi - 2dsd\Phi = \frac{2g\Sigma dt^2}{B}.$$

10. In his duabus aequationibus tres occurrunt variabiles, t, Φ et s, ſiquidem S et Σ ſunt functiones ipſius s, harum autem aequationum, quia ſunt differentiales ſecundi gradus, reſolutio maximas haberet difficultates, niſi commode vſu veniret, vt quantitatum t et Φ tantum differentialia, non vero ipſae occurrant atque hanc ob cauſſam eas ad differentialia primi gradus reuocare licebit, ſequenti modo. Ponatur

$$dt = \frac{ds}{\surd p} \text{ et } d\Phi = \frac{ds\surd q}{\surd p}$$

et quia dt erat conſtans, prior poſitio praebet

$$0 = 2pdds - dsdp$$

vnde fit

$$dds = \frac{dpds}{2p},$$

altera vero praebet

$$dd\Phi = \frac{dds\surd q}{\surd p} + \frac{dsdq}{2\surd pq} - \frac{dsdp\surd q}{2p\surd p} = \frac{dsdq}{2\surd pq},$$

quibus valoribus ſubſtitutis, ambae noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$dp + 2(c-s)qds = -\frac{4gSds}{B}$$

$$(c-s)\frac{dq}{q} - 4ds = \frac{4g\Sigma ds}{B\surd pq}$$

in

in quibus adhuc inſunt tres variabiles p, q et s, ſicque binas priores p et q per poſteriorem s definiri oportet, quo autem hoc facilius praeſtari poſſit, plurimum notaſſe iuuabit, quoniam s eſt particula admodum parua, hic loco $c - s$ ſcribi poſſe ſimpliciter c. Nulla autem patet via ad harum aequationum reſolutionem perducens. Videtur autem hic potiſſimum eo ſpectari oportere, quod quantitas s ſit quaſi infinite parua, num ſorte hinc aliquid ſubſidium peti poſſet.

11. Quando autem s eſt quantitas vehementer exigua, quemadmodum vſu venit in corporibus ſaltem mediocriter duris; tum conflictus tam exiguo temporis puncto abſoluitur, vt interea angulus Φ quam minimam mutationem ſubeat, ita vt quantitates s et Φ quaſi infinite parua eiusdem ordinis ſpectari debeant, tum autem in prima aequatione ſecundus terminus $c\,d\Phi^2$ ad ordinem infinite paruorum quaſi ſecundum pertinet ideoque reſpectu primi termini reiici poterit, ſimili modo in altera aequatione ſecundus terminus $-2\,ds\,d\Phi$ continens duas dimenſiones infinite paruorum euaneſcit prae primo, vbi tantum vnica eſt dimenſio, hoc autem admiſſo noſtrae aequationes differentiales ſecundi gradus erunt:

$$dds = -\frac{2gS\,dt^2}{B} \text{ et } c\,dd\Phi = 2g\frac{\Sigma\,dt^2}{B}$$

quarum prior per ds multiplicata et integrata praebet

$$\frac{ds^2}{dt^2} = C - \frac{4g}{B}\int S\,ds,$$

vnde

vnde colligitur

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

iam ſecunda aequatio hoc modo expreſſa

$$\frac{c\,dd\Phi}{dt} = \frac{2g\Sigma\,dt}{B} = \pm \frac{2g\Sigma\,dt}{B\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

integrale dabit

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = D \pm \frac{2g}{B}\int\frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}}$$

quam formulam ſemper actu integrare licet, quia vel $\Sigma = 0$ vel $\Sigma = \pm S$.

12. Definito igitur motu progreſſiuo globi B, ſimili modo eius motum gyratorium definire poterimus, tertia enim aequatio ſupra inuenta

$$\frac{dd\zeta}{dt} = \frac{2gb\Sigma\,dt}{Bkk},$$ cuius integrale erit

$$\frac{d\zeta}{dt} = E \pm \frac{2gb}{Bkk}\int\frac{\Sigma\,ds}{\sqrt{(C - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}},$$

quae formula denuo eſt integrabilis, et ex valoribus hic inuentis prioribus $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$ celeritas motus progreſſiui globi B definiri poteſt, ſiquidem eſt

$$\frac{dx}{dt} = -c\,\text{ſin.}\,\Phi\frac{d\Phi}{dt} - \frac{ds}{dt}\,\text{coſ.}\,\Phi$$

et $\frac{dy}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}c\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{ds}{dt}\,\text{ſin.}\,\Phi$.

13.

13. At vero pro hoc motu perfecte cognoſcendo etiam ipſum angulum Φ noſſe debemus, quae inuentio nulla laborat difficultate, quum ſit

$$\Phi = \int \pm \frac{d s}{\sqrt{(C - \frac{4 g}{B} \int S d s)}} \left(\frac{D}{c} \pm \frac{2 g}{B c} \int \frac{\Sigma d s}{\sqrt{(C - \frac{4 g}{B} \int S d s)}} \right).$$

Deinde eodem modo ipſa celeritas gyratoria globi B quae eſt $= \frac{d \zeta}{d t}$, ita reperietur expreſſa

$$\frac{d \zeta}{d t} = E \pm \frac{2 g b}{B k k} \int \frac{\Sigma d s}{\sqrt{(C - \frac{4 g}{B} \int S d s)}}.$$

14. Expreſſiones autem has ob geminam integrationem nimis generales atque adeo vagas, ex ſtatu initiali, quem merito vti datum ſpectamus, reſtringi et determinari oportet, iam autem innuimus initio fuiſſe $t = 0$ et quia tum conflictus incipit et nulla adhuc impreſſio facta eſt, erat etiam $s = 0$, ita vt poſito $t = 0$, fiat etiam $s = 0$. Ponamus autem globi B ante conflictum motum ita fuiſſe comparatum, vt primus contactus contigerit in puncto D ſicque initio fuerit $\Phi = 0$; deinde vero huius globi celeritatem ſecundum directionem E A fuiſſe $= m$ et in directione I D $= n$, ita vt hic globus in directione L D aduenerit, denique vero eidem globo ante conflictum tribuamus motum gyratorium $= \gamma$ in eundem ſenſum C G H, hinc igitur facto $t = 0$ debet eſſe

$$\frac{d x}{d t} = -m \quad \text{et} \quad \frac{d y}{d t} = n,$$

quia igitur initio erat ſin. $\Phi = 0$ et coſ. $\Phi = 1$, erat vtique

$$m = \frac{d s}{d t} \quad \text{et} \quad n = c . \frac{d \Phi}{d t},$$

ita vt pro initio fieri debeat

$\frac{ds}{dt} = m$ et $\frac{c\,d\Phi}{dt} = n.$

Denique pro motu gyratorio initio fieri debet $\frac{d\zeta}{dt} = \gamma.$

15. Quare ſi primum integrale $\int S\,ds$ ita capiamus vt poſito $s = 0$, quod initio euenit, euaneſcat pro prima aequatione §. 11.

$\frac{ds^2}{dt^2} = C - \frac{4g}{B}\int S\,ds,$

fit conſtans $C = m^2$ ita, vt haec prima aequatio determinata ſit

$\frac{ds^2}{dt^2} = mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds$, hincque

$\frac{ds}{dt} = \pm \surd(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)$ ergo $dt = \frac{ds}{\surd(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}.$

Pro ſecunda aequatione integrata, fit conſtans illa $D = n$ ſiquidem ſequens integrale

$$\int \frac{\Sigma\,ds}{\surd(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}$$

euaneſcat ipſo initio, ſicque haec ſecunda aequatio ita ſe habebit

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n + \frac{2g}{B}\int \frac{\Sigma\,ds}{\surd(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)};$$

quoniam autem Σ eſt $= \pm \delta S$ niſi $= 0$, haec formula actu integrata dat

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n \pm \delta\,(m - \surd(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds))$$

hincque porro ob

$$c\,d\Phi = (n \pm \delta m)\,dt \mp \delta.\,ds$$

conclu-

concluditur ipſe angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{c} \mp \frac{\delta s}{c}$$

quae expreſſio ſponte euaneſcit in initio.

Simili modo pro motu gyratorio ſumto iterum $\Sigma = \pm \delta S$ habebimus primo

$$\frac{d\zeta}{dt} = \pm \frac{2\delta bg}{Bkk} \int \frac{S\,ds}{\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}} = \gamma \pm \frac{\delta b}{kk}(m - \sqrt{(mm - \frac{4}{B}\int S\,ds)})$$

ſicque omnes formulae ſolutionem continentes ſunt penitus determinatae, atque ex his deducimus vtramque celeritatem progreſſiuam

$$\frac{dx}{dt} = -n\,\text{ſin.}\Phi \mp \delta\,\text{ſin.}\Phi(m - \sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}) - \text{coſ.}\Phi\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}$$

$$= -\text{ſin.}\Phi(n \pm \delta m) + \sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}(-\text{coſ.}\Phi \mp \delta\,\text{ſin.}\Phi)$$

et $\frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\text{coſ.}\Phi - (\text{ſin.}\Phi \pm \delta\,\text{coſ.}\Phi)\sqrt{(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds)}$

quarum illa pro initio manifeſto dat

$\frac{dx}{dt} = -m$ et altera $\frac{dy}{dt} = +n$.

16. Hoc ergo modo ſatis feliciter problema reſoluimus, ſiquidem ambo corpora fuerint ita dura, vt impreſſio facta tanquam infinite parua ſpectari poſſit, quum autem omnes formulae, quae ſolutionem conſtituunt, inuoluant functionem S, cuius natura nobis neutiquam eſt cognita, quoniam tantum nouimus creſcente impreſſione s, etiam functionem S augeri, hae formulae nobis parum lucis ſuppeditant ad cognitionem omnium mutationum, quae motui globi B durante conflictu inducuntur. Verum parum refert omnes has mutationes accurate cognoviſſe,

viſſe, dummodo eius motum, quem finito conflictu eſt habiturus, aſſignare valeamus; quare in hoc nobis erit elaborandum, vt id temporis momentum inueſtigemus, quo conflictus penitus ceſſat. Hic autem finis conflictus definiri non poteſt, niſi conſtet, vtrum ambo corpora propoſita ſint elaſtica nec ne, atque hinc duo genera principalia ſunt conſtituenda, quorum priore ambos globos omni elaſticitate deſtitutos aſſumemus, altero vero vtrique perfectam elaſticitatem tribuemus.

Primum genus globorum omni elaſticitate carentium.

17. Quando ambo corpora nulla prorſus elaſticitate ſunt praedita conflictus eo vsque tantum durat, quoad impreſſio ſibi mutuo facta, ſeu ſpatium s maximum euaſerit, tum enim ſubito vis repellens S euaneſcit, quoniam impreſſiones inductae non reſtituuntur atque tum globi non amplius in ſe mutuo agunt, ceſſante enim mutua actione ipſe conflictus ceſſat. Hoc ergo genere conflictus finitur, quando valor formulae $\frac{ds}{dt}$ in nihilum abit. Quum igitur inuenerimus §. 15.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(mm - \tfrac{4g}{B}\int S\,ds)}$$

hic valor euaneſcit, quando fit

$$mm = \tfrac{4g}{B}\int S\,ds\text{, ſiue }\int S\,ds = \tfrac{mmB}{4g};$$

ſcilicet cum initio eſſet $s = 0$ et $S = 0$ eo vsque s cum S creſcit, donec fiat

$$\tfrac{4g}{B}\int S\,ds = mm.$$

atque

atque tum conflictus ſubito finitur. Subſtituamus igitur vbique hunc valorem loco $\int S\,d\,s$, atque formulae ante inuentae ſequenti modo determinabuntur

I°. $\frac{d\,s}{d\,t}=0$; II°. $\frac{c\,d\,\Phi}{d\,t}=n\pm\delta\,m$; III°. $\Phi=\frac{(n\pm\delta\,m)\,t}{c}\mp\frac{\delta\,s}{c}$

IV°. $\frac{d\,\zeta}{d\,t}=\gamma\pm\frac{\delta\,m\,b}{k\,k}$.

18. Pro motu ergo progreſſiuo globi B poſt conflictum habebimus primo eius celeritatem, ſecundum directionem A X ſiue

$$\frac{d\,x}{d\,t}=-(n\pm\delta\,m)\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

deinde celeritatem in directione

$$X\,B=\frac{d\,y}{d\,t}=(n\pm\delta\,m)\,\text{coſ.}\,\Phi$$

atque tertio pro eius motu gyratorio celeritatem angularem

$$\frac{d\,\zeta}{d\,t}=\gamma\pm\frac{\delta\,m\,b}{k\,k},$$

vnde intelligitur, iſta motus momenta perfecte cognoſci non poſſe, niſi pro fine conflictus innoteſcat tam tempus t, quam quantitas impreſſionis s, his enim inuentis etiam angulus Φ erit cognitus; at vero inter s et t hanc elicuimus relationem

$$d\,t=\frac{d\,s}{\sqrt{(m\,m-\frac{4g}{B}\int S\,d\,s)}}$$

quocirca hic nihil certi definire licet, niſi natura functionis S fuerit perſpecta.

19. Quo igitur hinc ſaltem aliquid colligere liceat, fingamus aliquam hypotheſin a veritate non adeo abhorrentem ſtatuamusque

$$\frac{2g}{B} S = \lambda\lambda s,$$

vt fiat

$$\frac{4g}{B} \int S\, ds = \lambda\lambda s s,$$

ideoque pro fine conflictus

$$mm = \lambda\lambda s s \text{ ſiue } s = \frac{m}{\lambda},$$

deinde quia fit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{(mm - \lambda\lambda s s)}}$$

erit integrando

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{ Ang. ſin. } \frac{\lambda s}{m}$$

pro fine ergo conflictus erit

$$t = \frac{1}{\lambda} \text{ Ang. ſin. } 1 = \frac{\pi}{2\lambda},$$

pro hac ergo hypotheſi prodit angulus

$$\Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2c\lambda} \pm \frac{\delta m}{c\lambda} = \frac{n\pi}{2\lambda c} \pm \frac{\delta m(\pi - 2)}{2\lambda c}$$

cognito autem hoc angulo Φ reliqua momenta erunt

$$\frac{dx}{dt} = -(n \pm \delta m)\, \text{ſin.}\, \Phi; \quad \frac{dy}{dt} = (n \pm \delta m)\, \text{coſ.}\, \Phi \text{ et}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$$

vbi notetur, numerum λ eſſe quaſi infinitum, propterea, quod $\lambda = \frac{m}{s}$ et s per hypotheſin quantitas infinite parua.

20. Quoniam igitur angulus Φ eſt quam minimus, erit

$$\text{ſin.}\, \Phi = \Phi = \frac{(n \pm \delta m)\pi}{2\lambda c} \mp \frac{\delta m}{\lambda c} \text{ et coſ.}\, \Phi = 1,$$

hinc ergo finito conflictu globi B celeritas in directione A X reperietur

$\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{(n \pm \delta m)^2 \pi}{2 \lambda c} \pm \frac{\delta m (n \pm \delta m)}{\lambda c} = \frac{n \pm \delta m}{2 \lambda c}\left(-\frac{(n \pm \delta m)\pi}{2} \pm 2 \delta m\right)$$

$$= -\frac{(n \pm \delta m)}{2 \lambda c}(n \pi \pm \delta m (\pi - 2))$$

et celeritas in directione X B

$$\frac{dy}{dt} = n \pm \delta m,$$

tum vero celeritas angularis in ſenſum C G H

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$$

vnde intelligitur, primam celeritatem ſecundum A X quaſi euaneſcere, celeritatem autem angularem, quae ante conflictum erat γ, nunc mutari in $\gamma \pm \frac{\delta m b}{kk}$ et globo motum ſecundum X B relinqui, cuius celeritas ſit $= n \pm \delta m$, vbi notandum, ſignum $+$ valere,

Caſu primo, quo eſt

$$a \alpha > \frac{b d\zeta}{dt} + (c - s)\frac{d\Phi}{dt}; \text{ ideoque}$$

$$a \alpha > b \gamma + \frac{\delta m b^2}{kk} + n + \delta m, \text{ ita vt ſi fuerit}$$

$$a \alpha > b \gamma + \frac{\delta m b^2}{kk} + n + \delta m,$$

tum celeritas globi poſt conflictum in directione X B futura ſit $n + \delta m$,

Caſu ſecundo, quo eſt

$$a \alpha = b \gamma - \frac{\delta m b^2}{kk} + n$$

iſta celeritas euadet $= n$.

Tertio vero caſu quo

$$a \alpha < b \gamma - \frac{\delta m b^2}{kk} + n - \delta m$$

celeritas iſta fiet $n - \delta m$.

De altero genere globorum perfecte elaſticorum.

21. Si ambo globi fuerint perfecte elaſtici, conflictus non finitur, vbi impreſſio facta eſt maxima, ſed

ſed quia haec ipſa impreſſio iterum reſtituitur, tum demum conflictus ceſſat, cum denuo euaſerit $s = 0$, ita vt tam in fine quam initio conflictus habeamus $s = 0$, vtroque ergo caſu quoque erit $S = 0$, atque adeo etiam $\int S\,ds = 0$. Neque tamen hinc ſequitur motum poſt conflictum eundem fore, qui erat ante, vbi nunc oſtendemus.

22. Quoniam enim inuenimus:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right),$$

hincque

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)},$$

ex hac forma perſpicuum eſt poſt initium conflictus quamdiu impreſſio augetur, ſiue formula $\frac{ds}{dt}$ poſitiuum obtinet valorem, tum formulae huic radicali ſignum $+$ tribui debere; at quando iam fit reſtitutio, ſiue impreſſio s iterum diminuitur, tum ob $\frac{ds}{dt}$ negatiuum, formulam illam radicalem quoque negatiue capi oportebit, ideoque quum in fine conflictus fiat

$$\int S\,ds = 0, \text{ tum erit } \frac{ds}{dt} = -m.$$

Quum igitur poſt conflictum in noſtris formulis ſupra inuentis expreſſio

$$\sqrt{\left(mm - \frac{4g}{B}\int S\,ds\right)}$$

vbique fiat $= -m$, illae formulae ſequenti modo ſe habebunt:

$$\frac{a\,d\Phi}{dt} = n \pm 2\delta m;\ \Phi = \frac{(n \pm \delta m)t}{a};\ \frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{2\delta m b}{kk};$$

ex

ex quibus colligimus ambas celeritates poſt conflictum

$$\frac{dx}{dt} = m \operatorname{coſ.} \Phi - (n \pm 2\delta m) \operatorname{ſin.} \Phi \text{ et}$$

$$\frac{dy}{dt} = m \operatorname{ſin.} \Phi + (n \pm 2\delta m) \operatorname{coſ.} \Phi.$$

23. Quia autem corpora admodum dura aſſumimus, etiam totum tempus conflictus t pro euaneſcente haberi poterit, ex quo ſimul angulus Φ euaneſcet, ita vt ſit

$$\operatorname{ſin.} \Phi = 0 \text{ et } \operatorname{coſ.} \Phi = 1,$$

quo circa poſt conflictum celeritas globi B ſecundum directionem

$$AX \text{ erit } \frac{dx}{dt} = m,$$

celeritas vero ſecundum

$$AB\ \frac{dy}{dt} = n \pm 2\delta m,$$

tum vero celeritas gyratoria in ſenſum

$$CGH\ \frac{d\zeta}{dt} = \gamma \pm \frac{2\delta m b}{kk},$$

vbi ratione celeritatis $\frac{dy}{dt}$ notari oportet, ſignorum ambiguorum ſuperius valere, ſi fuerit

$$a\alpha > \frac{b\,d\zeta}{dt} + n + 2\delta m > b\gamma + \frac{2\delta m b^2}{kk} + n + 2\delta m$$

inferius vero, quando fuerit

$$a\alpha < \frac{b\,d\zeta}{dt} + n - 2\delta m < b\gamma - \frac{2\delta m b^2}{kk} + n - 2\delta m$$

at vero caſu quo

$$a\alpha = \frac{d\zeta}{dt} + n = b\gamma + n,$$

tum celeritas illa $\frac{dy}{dt}$ erit $= n$.

24. Caeterum probe hic eſt animaduertendum, ſolutionem hanc locum habere non poſſe, niſi ambo corpora fuerint maxime dura, ita vt tam ipſa impreſſio s, quam angulus Φ pro quantitatibus euaneſcentibus haberi queant, vnde niſi tanta durities in vtroque corpore inſit, mirari non debemus, ſi hae determinationes e veritate receſſerint. Quod autem hoc problema tantis difficultatibus fuerit inuolutum, cauſa ſine dubio in hoc eſt ſita, quod globum A, vi quadam aliena perpetuo in eodem motus ſtatu conſeruari ſuppoſuimus, ad quod quum vis admodum irregularis requiratur, mirum non eſt hanc ipſam irregularitatem in noſtram ſolutionem eſſe ingreſſam, vnde ſequentis Problematis ſolutionem faciliorem ſperare poterimus.

Problema II.

Si duo corpora ſphaerica ſuper plano horizontali vtcunque mota, atque inſuper motu gyratorio circa axem verticalem praedita, in ſe mutuo incurrant, inueſtigare motus mutationem, quam haec corpora durante conflictu, ſibi mutuo inducent.

Solutio.

25. Moueantur igitur centra vtriusque globi in eodem plano tabulae et motus gyratorius vtriusque fiat circa axem ad hoc planum normalem, hoc enim modo eueniet, vt dum in ſe mutuo impingunt contactus ſemper in eodem plano fiat, et per

mutuam

mutuam actionem neque motus de hoc plano deturbetur, neque poſitio axium varietur.

26. Poſt conflictus initium elapſo tempore $= t''$, reperiantur centra vtriusque globi in punctis M et N, ponaturque maſſa prioris $= M$ eius radius $= a$ et momentum inertiae reſpectu axis gyrationis $= \alpha M a a$; alterius vero globi maſſa ſit $= N$, radius $= b$ et momentum inertiae $= \beta N b b$, vbi notandum, ſi ambo globi ex materia homogenea conſtent, fore $\alpha = \beta = \frac{2}{5}$. Poſita porro ſumma radiorum $a + b = c$, nunc interuallum centrorum $M N$ ob impreſſiones ſibi mutuo inductas aliquanto minus erit quam c, ponatur igitur diſtantia $M N = c - s$, ſitque vis, qua iam ſe mutuo vrgent, $= S$, quam vti functionem ipſius s ſpectare licet, quae euaneſcat facto $s = 0$, hac igitur vi S globus M ſollicitabitur in directione $T M$ alter vero globus in directione $T N$ exiſtente T puncto contactus, per quod ducta ſit recta $t T \theta$, tangens communis ad rectam $M N$ normalis. Tab. IV. Fig. 2.

27. Sumta iam recta fixa $A B$ loco axis, ad quam ex centris M et N demittantur perpendicula $M P$ et $N Q$ voceturque coordinatae

$$A P = = x; \; P M = y \quad \text{et} \quad AQ = x' \quad \text{et} \quad QN = y',$$

tum vero ponatur angulus, quo recta $M N$ ad iſtum axem inclinatur $= \Phi$ eritque manifeſto

$$x' = x + (c - s) \operatorname{coſ.} \Phi \quad \text{et} \quad y' = y + (c - s) \operatorname{ſin.} \Phi.$$

28. His poſitis pro temporis momento propoſito t motus progreſſiuus globi M ita erit comparatus,

tus, vt eius celeritas ſecundum A P futura ſit $=\frac{dx}{dt}$ et ſecundum P M $=\frac{dy}{dt}$; alterius vero globi N celeritas ſecundum A Q $=\frac{dx'}{dt}$ et ſecundum QN $=\frac{dy'}{dt}$; vbi obſeruandum eſt fore

$$dx' = dx - ds\,\text{coſ.}\,\Phi - (c-s)\,d\Phi.\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et}$$

$$dy' = dy - ds\,\text{ſin.}\,\Phi + (c-s)\,d\Phi.\,\text{coſ.}\,\Phi \text{ vnde fit}$$

$$dx'\,\text{coſ.}\,\Phi + dy'\,\text{ſin.}\,\Phi = dx\,\text{coſ.}\,\Phi + dy\,\text{ſin.}\,\Phi - ds \text{ et}$$

$$dx'\,\text{ſin.}\,\Phi - dy'\,\text{coſ.}\,\Phi = dx\,\text{ſin.}\,\Phi - dy\,\text{coſ.}\,\Phi - (c-s)\,d\Phi.$$

Pro motu autem gyratorio et eodem temporis momento gyretur globus M ita, vt eius punctum T moueatur ſecundum directionem T t celeritate angulari $=\frac{d\zeta}{dt}$, alterius vero globi punctum T ſecundum eandem directionem T t celeritate angulari $=\frac{d\eta}{dt}$; vnde ſequitur, ſi vtriusque globi centrum quieſceret, veram celeritatem puncti T quatenus ad globum M pertinet fore $=$ M T. $\frac{d\zeta}{dt}$, quatenus autem idem T pertinet ad alterum globum N, eius celeritatem fore $=$ N T. $\frac{d\eta}{dt}$; verum quia ſemper impreſſionem s vt valde exiguam ſpectare licet, hic tuto ponere poterimus M T $= a$ et N T $= b$.

29. Quoniam vero etiam centra globorum mouentur, eorum motus inſuper ad iſtos motus puncti T accedet. Hinc autem per reſolutionem eam tantum partem adiiciamus, quae etiam ſecundum directionem T t ſit directa, dum altera pars incidit in directionem M N, et in impreſſionem factam

ctam redundat. Hinc autem pro globo M vera celeritas puncti T ſecundum directionem Tt erit

$$= \frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{dx}{dt}\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{dy}{dt}.\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

In altero vero globo N vera celeritas puncti T, ſecundum directionem Tt erit

$$= \frac{b\,d\eta}{dt} - \frac{dx'}{dt}.\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{dy'}{dt}.\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{b\,d\eta}{dt} - \frac{dx}{dt}.\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{dy}{dt}.\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{(c-s)\,d\Phi}{dt}.$$

30. Hanc vtramque autem celeritatem ideo definire neceſſe eſt, vt iudicare poſſimus, vtrum in ipſo contactu attritus hincque frictio eueniat nec ne? perſpicuum autem eſt, ſi ambae illae celeritates inter ſe fuerint aequales, nullum plane dari attritum, neque propterea ob hanc cauſſam motum globorum affici. Hic ergo caſus locum habet, quando fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} = \frac{b\,d\eta}{dt} + (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$$

vel $\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} = (c-s)\frac{d\Phi}{dt}$,

quem caſum *primum* conſtituamus. *Secundus* autem caſus locum habeat, quando celeritas prior maior eſt poſteriore, quod euenit ſi fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} > (c-s)\frac{d\Phi}{dt},$$

hoc caſu, quia celeritas globi M maior eſt quam globi N, huius punctum T abripietur ideoque accelerabitur ſecundum directionem Tt, contra vero ob reactionem motus gyratorius prioris M retardabitur. *Tertius* vero caſus ſtatuatur, ſi fuerit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} < (c-s)\frac{d\Phi}{dt},$$

 atque

atque hoc caſu motus gyratorius prioris globi M accelerabitur, alterius vero retardabitur.

31. Conſtat autem frictionem ſemper proportionalem eſſe adpreſſioni mutuae, quae hic eſt ipſa vis $= S$, vnde ponamus frictionem inde natam $= \delta S$, atque caſu *ſecundo* globus M praeter vim ante memoratam, etiam ſollicitabitur ſecundum directionem $t\,\theta$ vi $= \delta S$, alterum vero globum N praeterea ſuſtinere etiam vim $= \delta S$ ſecundum directionem T t. Calculum autem tantum ad hunc caſum ſecundum accommodabimus, quoniam is facillime ad caſum *tertium* transferri poterit, ſumendo tantum litteram δ negatiue; quin etiam pro primo valebit ſumto $\delta = 0$.

32. Nunc demum accelerationes vtriusque motus definire poterimus, quum enim globus M a duabus viribus ſollicitetur altera $= S$ in directione T M, altera vero δS in directione T θ, ex his deducetur pro

directione A P vis $= - S \operatorname{coſ.} \Phi + \delta S \operatorname{ſin.} \Phi$ et pro directione P M vis $= - S \operatorname{ſin.} \Phi - \delta S \operatorname{coſ.} \Phi$.

Pro altero vero globo elicimus

vim ſec. A Q $= + S \operatorname{coſ.} \Phi - \delta S \operatorname{ſin.} \Phi$ et

vim ſec. Q N $= + S \operatorname{ſin.} \Phi + \delta S \operatorname{coſ.} \Phi$

quae vires ad motum progreſſiuum referuntur, pro motu vero gyratorio globi M vis T $\theta = \delta S$ praebet momentum retardans $\delta a S$, globi vero N vis T $t = \delta S$ praebet momentum accelerans $\delta b S$.

33.

33. His viribus inuentis, pro motu progreſſiuo globi M has duas adipiſcimur aequationes:

I. $\frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} = -S \text{ coſ. } \Phi + \delta S \text{ ſin. } \Phi$;

II. $\frac{M\,ddy}{2g\,dt^2} = -S \text{ ſin. } \Phi - \delta S \text{ coſ. } \Phi$

pro motu progreſſiuo autem globi N has:

III. $\frac{N\,ddx'}{2g\,dt^2} = S \text{ coſ. } \Phi - \delta S \text{ ſin. } \Phi$;

IV. $\frac{N\,ddy'}{2g\,dt^2} = S \text{ ſin. } \Phi - \delta S \text{ coſ. } \Phi$;

denique pro motu gyratorio globorum M et N nanciſcimur adhuc has duas aequationes:

V. $\frac{\alpha M aa\,dd\zeta}{2g\,dt^2} = -\delta a S$; VI. $\frac{\beta N bb\,dd\eta}{2g\,dt^2} = +\delta b S$.

Has aequationes inſpicienti ſtatim patet primam et tertiam iunctim ſumtam dare:

$$M\,ddx + N\,ddx' = 0;$$

ſimilique modo ſecundam et quartam coniunctim dare

$$M\,ddy + N\,ddy' = 0,$$

atque hinc ſtatim deducimus integrando:

$$M\,dx + N\,dx' = A\,dt; \text{ et } M\,dy + N\,dy' = B\,dt$$

vbi A et B ſunt conſtantes per integrationem ingreſſae, quas adeo vlterius integrantes, conſequimur

$$Mx + Nx' = At + \mathfrak{A}; \text{ et } My + Ny' = Bt + \mathfrak{B}$$

quibus formulis promotio vniformis centri inertiae communis, vel etiam conſeruatio quantitatis motus indicatur. Eodem autem modo aequatio quinta et ſexta iunctim praebent:

a M *a*

$$\alpha M a\, dd\zeta + \beta N b\, dd\eta = 0$$

ideoque

$$\alpha M a \frac{d\zeta}{dt} + \beta N b \frac{d\eta}{dt} = \text{Conſt.},$$

vnde intelligitur, dum motus gyratorius vnius globi vel augetur vel minuitur, tum motum gyratorium alterius vice verſa vel diminui vel augeri.

34. Si hos valores pro x et x' inuentos, in formulis ſupra datis (§. 27.) ſubſtituamus, reperiemus

$$x = \frac{At + \mathfrak{A} - N(c-s)\cos.\Phi}{M+N};\quad x' = \frac{At + \mathfrak{A} + M(c-s)\cos.\Phi}{M+N}$$

et $$y = \frac{Bt + \mathfrak{B} - N(c-s)\sin.\Phi}{M+N};\quad y' = \frac{Bt + \mathfrak{B} + M(c-s)\sin.\Phi}{M+N}$$

ex his colligimus differentiando

$$dx = \frac{A\,dt + N\,ds\cos.\Phi + N(c-s)\,d\Phi\sin.\Phi}{M+N}$$

et $$dy = \frac{B\,dt + N\,ds\sin.\Phi - N(c-s)\,d\Phi\cos.\Phi}{M+N}$$

denuoque differentiando

$$ddx = \frac{N\,dds\cos.\Phi - 2N\,ds\,d\Phi\sin.\Phi + N(c-s)\,dd\Phi\sin.\Phi + N(c-s)\,d\Phi^2\cos.\Phi}{M+N}$$

$$ddy = \frac{N\,dds\sin.\Phi + 2N\,ds\,d\Phi\cos.\Phi - N(c-s)\,dd\Phi\cos.\Phi + N(c-s)\,d\Phi^2\sin.\Phi}{M+N}$$

inuentis autem x et y ſponte patent x' et y'.

35. Ex his vltimis formulis ſecundi gradus, elicimus binas ſequentes concinniores

$$ddx\,\cos.\Phi + ddy\,\sin.\Phi = \frac{N\,dds + N(c-s)\,d\Phi^2}{M+N} \text{ et}$$

$$ddx\,\sin.\Phi - ddy\,\cos.\Phi = \frac{2N\,ds\,d\Phi + N(c-s)\,dd\Phi}{M+N}$$

vero ex formulis principalibus I et II. §. 32.

adipi-

adipiſcimur

$$\frac{M(ddx\,cof.\,\Phi + ddy\,fin.\,\Phi)}{2g\,dt^2} = -S$$

et $$\frac{M(ddx\,fin.\,\Phi - ddy\,cof.\,\Phi)}{2g\,dt^2} = +\delta S,$$

atque hinc duas ſequentes aequationes finales

$$dds + (c-s)d\Phi^2 = -\frac{2g(M+N)S\,dt^2}{M-N} \text{ et}$$

$$(c-s)dd\Phi - 2ds\,d\Phi = +\frac{2g\delta(M+N)S\,dt^2}{M.N},$$

ex quibus binas variabiles s et Φ ad quoduis tempus definiri oportet, ſiue quod perinde eſt, quantitates t et Φ per variabilem s, cuius functio eſt S, exprimantur. Ponamus autem breuitatis gratia

$\frac{2g(M+N)S}{MN} = \Sigma$ vt habeamus:

$$dds + (c-s)d\Phi^2 = -\Sigma dt^2; \text{ et } (c-s)dd\Phi - 2ds\,d\Phi = +\delta\Sigma dt^2$$

hae ergo aequationes omnino ſimiles ſunt iis, ad quas praecedens problema perduximus, ideoque eas etiam ad differentialia primi gradus tantum reducere liceret, vti ſupra fecimus §. 10., quoniam autem haec reductio nihil plane ſubſidii ad noſtrum inſtitutum adfert, aliud remedium nobis relinqui non videtur, niſi vt hic etiam ambos globos valde duros ſtatuamus, vt quantitates s et Φ tuto tamquam minimas ſpectare eaque membra, in quibus eae ad plures quam vnam dimenſionem aſcendunt, reiicere queamus, quemadmodum etiam in ſuperiori problemate fecimus. Hoc autem modo noſtra tractatio non adeo limitari eſt cenſenda, quoniam omnia, quae adhuc de colliſione corporum ſunt prolata, eidem

 hypo-

hypotheſi innituntur, quod corpora collidentia ſint duriſſima.

36. Sint igitur ambo noſtri globi duriſſimi et quia ambas quantitates s et Φ tamquam euaneſcentes ſpectare licet, ſiquidem axis A B ita ducatur, vt in initio conflictus per amborum globorum centra tranſeat, ita vt poſitio axis A B non amplius ſit arbitraria; noſtrae duae aequationes ſequentes formas induent

$$dds = -\Sigma dt^2 \text{ et } c\,dd\Phi = \delta\,\Sigma dt^2$$

quarum illa vti ſupra integrata praebet

$$\frac{ds^2}{dt^2} = D - 2\int \Sigma ds \text{ hincque } \frac{ds}{dt} = \sqrt{(D - 2\int \Sigma t^2)}$$

et $dt = \frac{ds}{\sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)}}$,

quam valorem ſi in altera aequatione ſubſtituamus, prodibit haec aequatio

$$\frac{c\,dd\Phi}{dt} = \delta\,\Sigma dt = \frac{\delta\,\Sigma ds}{\sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)}}$$

cuius integrale eſt

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = E - \delta \sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)}.$$

Atque ſimili modo pro motu gyratorio ob

$$\frac{dd\zeta}{dt} = -\frac{\delta N \Sigma . dt}{\alpha a (M + N)} = -\frac{\delta N \Sigma ds}{\alpha a (M + N) \sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)}}$$

et $\frac{dd\eta}{dt} = +\frac{\delta M \Sigma dt}{\beta b (M + N)} = \frac{\delta M \Sigma ds}{\beta b (M + N) \sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)}}$

per integrationem obtinetur

$$\frac{d\zeta}{dt} = F + \frac{\delta N}{\alpha a (M + N)} \sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)} \text{ et}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = G - \frac{\delta M}{\beta b (M + N)} \sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)}.$$

37. Quo omnes iſtas conſtantes integratione ingreſſas rite definiamus, contemplemur ſtatum initialem, quo erat $t = o$ hincque etiam $s = o$, atque adeo $\int \Sigma\, d\, s = o$ et pro globo M ſumamus eius celeritatem fuiſſe ſecundum $AP = p$ et ſecundum $PM = m$, eiusque celeritatem angularem in ſenſum $Tt = \mu$, pro altero globo N fuiſſe celeritatem in directione $AQ = q$ et in directione $QN = n$, celeritatem vero angularem in $Tt = \nu$, ita vt initio fuerit

$$\frac{dx}{dt} = p;\ \frac{dy}{dt} = m;\ \text{et}\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu,$$

tum vero etiam

$$\frac{dx'}{dt} = q;\ \frac{dy'}{dt} = n;\ \text{et}\ \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

38. Si hos valores pro ſtatu initiali in ſuperioribus aequationibus ſubſtituamus: ex §. 33. erit ob coſ. $\Phi = 1$ et ſin. $\Phi = o$

$$\frac{dx}{dt} = p = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = m = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N} \cdot \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

deinde ex §. 28. $\frac{dx'}{dt} = q = \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} = p - \frac{ds}{dt}$ et

$$\frac{dy'}{dt} = n = \frac{dy}{dt} + \frac{c\,d\Phi}{dt} = m + \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

vnde immediate colligimus pro initio

$$\frac{ds}{dt} = p - q \quad \text{et} \quad \frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m;$$

hincque porro

$$A = Mp + Nq \quad \text{et} \quad B = Mm + Nn,$$

reliquae vero conſtantes hinc ita determinabuntur:

 D =

$D = (p-q)^2$; $E = n - m + \delta(p-q)$; $F = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$
et $G = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$.

39. Definitis his conſtantibus durante ipſo conflictu ad tempus t colligamus aequationes inuentas et habebimus:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}; \quad \frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m + \delta(p-q)$$
$$- \delta \sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)}((p-q) - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}), \text{ et}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M}{\beta b(M+N)}(p-q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)})$$

vnde deducuntur ipſae celeritates progreſſiuae

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{Mp+Nq}{M+N} + \frac{N}{M+N}\sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)} \\ \frac{dy}{dt} &= s - \frac{\delta N}{M+N}(p-q-\sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}) \end{aligned}\right\} \text{pro globo M}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{Mp+Nq}{M+N} - \frac{M}{M+N}\sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)} \\ \frac{dy'}{dt} &= n + \frac{\delta M}{M+N}(p-q-\sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}) \end{aligned}\right\} \text{pro globo N.}$$

Applicatio ad corpora omnis elateris expertia.

40. Si ambo globi omni elaſticitate careant, iam ſupra obſeruauimus, conflictum terminari, vbi impreſſio facta eſt maxima ſeu $\frac{ds}{dt} = 0$, quare in fine conflictus erit $2\int \Sigma\, ds = (p-q)^2$, ideoque pro hoc momento habebimus praeter $\frac{ds}{dt} = 0$

$$\frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m + \nu(p-q),$$

deinde vero celeritates progreſſiuas poſt conflictum.

Pro

Pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p - q)}{M + N}$$

Pro globo N vero

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \text{et} \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p - q)}{M + N}$$

celeritates autem gyratorias in ſenſum T t vtrinque pro globo M, $\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$,
pro globo N, $\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}$.

41. Antequam autem hinc vllas concluſiones deducere liceat, diligenter diſpiciendum eſt, ſub quibusnam conditionibus quilibet caſuum ſupra conſtitutorum locum habeat; quod iudicium ſeorſim tam pro initio conflictus, quam pro fine inſtitui debet. Ex allatis autem ibi criteriis, patet *primum* caſum quo $\delta = 0$ pro initio conflictus locum eſſe habiturum, ſi fuerit **Primus Caſus.**

$$a\mu - b\nu = n - m$$

pro fine autem conflictus ſi fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

quae duae conditiones quum inter ſe conueniant, patet, primum caſum per totum conflictum valere, ſi modo initio valuerit. Pro hoc ergo *primo* caſu ſi fuerit

$$a\mu - b\nu = n - m,$$

poſt conflictum ſingula motus elementa ita ſe habebunt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m; \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n; \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

Vnde intelligitur poſt conflictum vtrumque globum ſecundum directionem axis A B eadem celeritate progredi, at ſecundum directionem ad A B normalem, vtrumque globum eam celeritatem, quam ante habebat, conſeruare, quia etiam vterque priſtinum motum gyratorium retinebit.

II. Caſus. 42. *Secundus* autem caſus, quo δ habet valorem poſitiuum, pro conflictus initio locum habebit, ſi fuerit

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

at vero pro fine conflictus ſi fuerit

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha(M+N)} - \frac{\delta M(p-q)}{\beta(M+N)} > n - m + \delta(p-q) \text{ ſeu}$$

$$a\mu - b\nu > n - m + \delta(p-q)\left(1 + \frac{\alpha M + \beta N}{\alpha\beta(M+N)}\right) > n - m + \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quare dummodo poſterior conditio locum habeat, caſus ſecundus per totum conflictum vigebit, motusque poſt conflictum ſequenti modo ſe habebit:

Si conditio

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta N(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N}; \quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta M(p-q)}{M+N}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$$

43.

43. Vt porro caſus tertius, quo δ ſumi debet negatiue, locum habeat, pro initio conflictus haec conditio requiritur: III. Caſus.

$a\mu - b\nu < n - m$, pro fine vero conflictus haec

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

quae poſterior conditio priorem iam inuoluit, vnde caſus tertius per totum conflictum vigebit, ſi fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

tum autem poſt conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp+Nq}{M+N};\quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta N(p-q)}{M+N};\quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp+Nq}{M+N};\quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta M(p+q)}{M+N} \text{ et } \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta M(p-q)}{\alpha b(M+N)}.$$

44. His autem tribus caſibus ſolutio problematis neutiquam exhauritur, ſuperſunt enim adhuc duo caſus maxime memorabiles, alter quo

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

alter vero quo

$a\mu - b\nu = n - m - k$ exiſtente

$$k < \frac{\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

ita tamen, vt ſit $k > 0$, priori enim caſu in ipſo conflictus initio δ habebit valorem poſitiuum, ſed durante conflictu frictio ſubito ceſſabit, ita vt deinceps vsque ad finem conflictus ſtatui debeat $\delta = 0$, id quod etiam de altero caſu eſt intelligendum, hoc tantum diſcrimine, quod ab initio δ habeat valorem negatiuum. Quemadmodum igitur his caſibus

vtrius-

vtriusque globi motus poſt conflictum ſe ſit habiturus, quaeſtio haud parum eſt ardua, quum interuallum conflictus in duas partes diuidi debeat, quae continuitatis lege deſtituuntur, ſequenti autem modo hos caſus prorſus ſingulares expedire poterimus.

45. Durante igitur conflictu id temporis punctum inueſtigari debet, quo frictio primum euaneſcere incipit, id quod euenit vbi fit

$$\frac{a\,d\zeta}{dt} - \frac{b\,d\eta}{dt} = \frac{c\,d\Phi}{dt}$$

ex formulis autem §. 38. inuentis, haec conditio praebet

$$a\mu - b\nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha\beta(M+N)}\left(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)}\right)$$
$$= n - m + \delta\left(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)}\right)$$

ſiue

$$a\mu - b\nu = n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)})}{\alpha\beta(M+N)}$$

ponamus hic breuitatis gratia

$$\frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)} = \Delta$$

vt fiat

$$a\mu - b\nu = n - m + \Delta\left(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)}\right)$$

et quia per hypotheſin eſt

$$a\mu - b\nu = n - m + k,$$

hinc habebimus

$$k = \Delta\left(p - q - \sqrt{(p-q)^2 - 2\int\Sigma ds}\right),$$

quare pro hoc momento temporis colligimus

$$p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)} = \frac{k}{\Delta}$$ ideoque

$$\sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma ds)} = p - q - \frac{k}{\Delta}.$$

46.

46. Pro hoc iam temporis momento inueſtigemus vtriusque globi motum, et habebimus, pro motu globi M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} + \frac{N(p - q)}{M + N} - \frac{kN}{\Delta(M + N)}$$

$$\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta kN}{\Delta(M + N)};\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta kN}{\alpha a\Delta(M + N)}$$

pro motu globi N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{M}{M + N}\left(p - q - \frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta kM}{\Delta(M + N)};\ \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta kM}{\beta b\Delta(M + N)}$$

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta} \text{ et}$$

$$\frac{cd\Phi}{dt} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}.$$

47. Hae ergo celeritates modo inuentae locum habent in fine prioris partis colliſionis, ideoque tamquam celeritates initiales pro parte colliſionis poſteriori ſunt ſpectandae, hanc igitur partem inueſtigaturi, reſumamus formulas integrales primum inuentas, in quibus adhuc conſtantes indeterminatae, A, B, C etc. inſunt, easque nunc ita definiamus, vt pro initio huius temporis, quo eſt

$$\surd((p - q)^2 - 2\int \Sigma\, ds) = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

celeritates eae ipſae prodeant, quas modo inuenimus, vbi notari oportet, pro hac temporis parte ſumi debere $\delta = 0$, hae autem formulae nunc ita ſe habebunt

$$\frac{ds}{dt} = p - q - \frac{k}{\Delta};\ \frac{cd\Phi}{dt} = E \text{ hincque}$$

iſtae conſtantes ita determinantur

$$E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta};\ A = Mp + Nq;$$
$$B = Mm + Nn;\ F = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$
$$G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}.$$

48. Nunc demum ad finem partis poſterioris temporis progredi licet, pro quo quum ſit

$$2 \int \Sigma\, ds = (p - q)^2,\ \text{ſiue}$$
$$\sqrt{((p - q)^2 - 2 \int \Sigma\, ds)} = 0,$$

eaedem formulae generales ad hunc ſtatum accommodatae pro fine conflictus dabunt:

$$\frac{ds}{dt} = 0;\ \frac{c\, d\Phi}{dt} = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$$

et pro globo priori M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)};\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)};\ \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}.$$

Quae formulae ſi fuerit $k = 0$, congruunt cum caſu primo; at ſi ſiat $k = \Delta (p - q)$, eae cum caſu ſecundo conueniunt, prorſus vti natura rei poſtulat.

49. At ſi fuerit $a\mu - b\nu = n - m - k$ ratiocinium ſimili modo inſtitui deberet, verum facile intelligitur inde pro fine conflictus ſequentes formulas eſſe prodituras

pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta k N}{\Delta (M + N)};\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta k M}{\Delta (M + N)};\ \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta b \Delta (M + N)}$$

vbi

vbi iterum notaſſe iuuabit, hunc caſum in primum recidere, ſi $k = 0$, in tertium vero ſi $k = \Delta(p-q)$. Sicque tota haec determinatio quinque caſibus comprehendi debet.

Applicatio ad corpora elaſtica.

50. Quando ambo globi ſunt perfecte elaſtici, conflictus ante non finitur, quam impreſſio facta iterum ad nihilum redigatur, ita vt in fine conflictus denuo fiat $s = 0$ atque etiam $\int \Sigma\, ds = 0$. Verum formula radicalis

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{((p-q)^2 - 2\int \Sigma\, ds)}$$

quam diu impreſſio augetur, poſitiuum ſortitur valorem, negatiuum vero, dum reſtitutio abſoluitur, ſiquidem priori caſu $\frac{ds}{dt}$ poſitiuum, altero vero negatiuum induit valorem. Quocirca in fine conflictus erit haec formula radicalis $= -(p-q)$.

51. Quodſi ergo hunc valorem vbique ſubſtituamus, pro fine conflictus habebimus primo

$$\frac{ds}{dt} = -(p-q) \text{ et } \frac{c\,d\Phi}{dt} = n - m + 2\delta(p-q)$$

deinde pro globo M reperiemus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M + N} - \frac{N(p-q)}{M+N};\ \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} + \frac{M(p-q)}{M+N};\ \frac{dy'}{dt} = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

52. Hic autem imprimis ratione litterae δ animaduertendum eſt, eam habere valorem poſitiuum, quamdiu fuerit

$$\frac{a\,d\,\zeta}{d\,s} - \frac{b\,d\,\eta}{d\,t} > \frac{c\,d\,\Phi}{d\,t}$$

ſiue ſubſtitutis valoribus

$$a\,\mu - b\,\nu - \frac{\delta(\alpha M + \beta N)}{\alpha\beta(M+N)}(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds)})$$
$$> n - m + \delta(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds)}), \text{ ſiue}$$
$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}(p - q - \sqrt{((p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds)})$$

vnde iam intelligitur litteram δ negatiue capi debere, quando fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}(p - q - \sqrt{(p-q)^2 - 2\int\Sigma\,ds})$$

at vero quando fit

$$a\,\mu - b\,\nu = n - m,$$

tum litteram δ in nihilum abire. Vnde vt ante tres caſus reſulant, quorum *primus* ſit vbi $\delta = 0$, *ſecundus* vbi δ habet valorem poſitiuum, *tertius* vero vbi negatiuum.

53. Incipiamus a caſu primo, quo $\delta = 0$ atque is in initio conflictus locum habebit, quoties fuerit

$$a\,\mu - b\,\nu = n - m,$$

in fine vero conflictus quando etiam fuerit

$$a\,\mu - b\,\nu = n - m$$

ex quo intelligitur, ſi hic caſus in initio conflictus locum habeat, tum eum per totum conflictum eſſe duraturum; quare hinc ſequentes determinationes deducimus: Si

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m$ erit

pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N};\ \frac{dy}{dt} = m;\ \frac{d\zeta}{dt} = \mu$$

pro globo vero N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{2Mp + (N-M)q}{M+N};\ \frac{dy'}{dt} = n;\ \frac{d\eta}{dt} = \nu.$$

54. Conſideremus nunc caſum ſecundum, quo δ eſt poſitiuum, atque vt is iam initio conflictus eueniat oportet eſſe

$$a\mu - b\nu > n - m,$$

verum vt etiam in fine locum habeat, debet eſſe

$$a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)};$$

vnde quum ſemper ſit $p > q$; conditio poſterior priorem in ſe continet, ideoque caſus ſecundus per totum conflictum ſubſiſtit, vnde hae ſequuntur determinationes:

Si fuerit $a\mu - b\nu > n - m + \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$

tum erit pro globo M;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p + 2Nq}{M+N};\ \frac{dy}{dt} = m - \frac{2\delta N(p-q)}{M+N} \text{ et}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)q + 2Mp}{M+N};\ \frac{dy'}{dt} = n + \frac{2\delta M(p-q)}{M+N};\ \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

55. Caſus denique tertius tam in initio, quam in fine adhuc vigebit, quando fuerit

$$a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

ac tum in ſuperioribus formulis δ negatiue capi debet, vnde ſequentes determinationes adipiſcimur:

Si fuerit $a\mu - b\nu < n - m - \frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$

poſt conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M-N)p+2Nq}{M+N};\quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{2\delta N(p-q)}{M+N};\quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{2\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

et pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N-M)q+2Mp}{M+N};\quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{2\delta M(p-q)}{M+N};\quad \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{2\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

56. Vt nunc etiam in caſus hinc excluſos inquiramus, qui contingunt quando fuerit:

$$a\mu - b\nu = n - m \pm k,$$

dum ſcilicet k inter limites o et

$$\frac{2\delta(p-q)(\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$$

continetur; ante omnia formulas integrales ſupra inventas in genere ſumtas, neque ad certum ſtatum initialem accommodatas ob oculos ponamus:

ob $\frac{ds}{dt} = \sqrt{(D - 2\int\Sigma\, ds)}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N}\cdot\sqrt{(D-2\int\Sigma\, ds)};\quad \frac{dy}{dt} = \frac{B}{M+N} - \frac{N}{M+N}(E-\delta\sqrt{(D-2\int\Sigma\, ds)})$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = F + \frac{\delta N}{\alpha a(M+N)}\sqrt{(D-2\int\Sigma\, ds)}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A}{M+N} \mp \frac{M}{M+N}\cdot\sqrt{(D-2\int\Sigma\, ds)},\quad \frac{dy'}{dt} = \frac{B}{M+N} + \frac{M}{M+N}(E-\delta\sqrt{(D-2\int\Sigma\, ds)})$$

$$\frac{d\eta}{dt} = G - \frac{\delta M}{\beta b(M+N)}\sqrt{(D-2\int\Sigma\, ds)}.$$

57. Quodſi hae formulae ad ſtatum noſtrum initialem referantur, quo eſt

$\frac{dx}{dt} = p$, $\frac{dy}{dt} = m$, $\frac{d\zeta}{dt} = \mu$ et $\frac{dx'}{dt} = q$, $\frac{dy'}{dt} = n$ et $\frac{d\eta}{dt} = \nu$,

conſtantes noſtrae ſequenti modo determinabuntur:

$A = Mp + Nq$; $\surd D = p - q$; $B = Mm + Nn$;

$E = n - m + \delta(p-q)$; $F = \mu - \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$; $G = \nu + \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}$

qui ſunt ipſi valores iam ante inuenti.

His ita praeparatis aggrediamur caſum, quo

$a\mu - b\nu = n - m + k$, exiſtente

$k < 2\delta \frac{(p-q)(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)}$,

atque iam vidimus in ipſo initio caſum ſecundum $\delta > 0$ valere, dehinc vero tantum ad certum quendam terminum continuari, quem reperiemus pro hoc loco, poſito vt ante breuitatis gratia

$\frac{\delta(\alpha(\beta+1)M + \beta(\alpha+1)N)}{\alpha\beta(M+N)} = \Delta$;

$p - q - \surd((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds) = \frac{k}{\Delta}$ et

$\surd((p-q)^2 - 2\int\Sigma\, ds) = p - q - \frac{k}{\Delta}$;

vnde pro hoc momento valor $\int\Sigma\, ds$ determinatur, nobis autem ſufficit valorem formulae huius radicalis noſſe. Atque hinc pro hoc termino habebimus iſtas determinationes:

$\frac{dx}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} + \frac{N}{M+N}(p - q - \frac{k}{\Delta})$

$\frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)}$; $\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M+N)}$;

$\frac{dx'}{dt} = \frac{Mp + Nq}{M+N} - \frac{M}{M+N}(p - q - \frac{k}{\Delta})$

$\frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)}$; $\frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M+N)}$

ſcilicet

ſcilicet quoniam totum conflictus tempus in duas partes diuidi debet, hae celeritates locum habent in ſine partis prioris, quae ergo eaedem locum quoque habebunt in initio ſecundae partis, vbi erit $\delta = 0$.

58. Nunc motum per ſecundam partem inveſtigemus, pro qua celeritates modo inuentae ſtatum initialem conſtituunt, quam ob cauſam nunc vti debemus formulis generalibus §. 55. allatis, quoniam autem pro initio huius partis eſt

$$\sqrt{(D - 2\int \Sigma ds)} = p - q - \frac{k}{\Delta},$$

hoc valore poſito ipſae illae celeritates prodire debent, vnde naſcuntur ſequentes aequationes

$$\text{I. } \frac{dx}{dt} = \frac{Mp+Nq}{M+N} + \frac{N}{M+N}\left(p-q-\frac{k}{\Delta}\right) = \frac{A}{M+N} + \frac{N}{M+N}\left(p-q-\frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\text{II. } \frac{dx'}{dt} = \frac{Mp+Nq}{M+N} - \frac{M}{M+N}\left(p-q-\frac{k}{\Delta}\right) = \frac{A}{M+N} - \frac{M}{M+N}\left(p-q-\frac{k}{\Delta}\right)$$

$$\text{III. } \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M+N)} = \frac{B}{M+N} - \frac{NE}{M+N}$$

$$\text{IV. } \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M+N)} = \frac{B}{M+N} + \frac{ME}{M+N}$$

$$\text{V. } \frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M+N)} = F; \quad \text{VI. } \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M+N)} = G$$

ex priore et ſecunda ſequitur

$$A = Mp + Nq,$$

quia D manet vt ante $= (p-q)^2$, deinde ex tertia et quarta

$$B = Mm + Nn \quad \text{et} \quad E = n - m + \frac{\delta k}{\Delta}$$

at ex quinta et ſexta litterae F et G immediate dantur

$$F = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M+N)}; \quad G = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M+N)}.$$

59.

59. Quodſi hos valores conſtantium introducamus, formulae §. 55. generales exhibebunt motum corporum per partem poſteriorem temporis, vbi $\delta = 0$. Atque hinc pro fine huius partis adeoque totius conflictus ſtatui debebit

$$\sqrt{(D - 2\int \Sigma\, d s)} = -(p - q),$$

vnde conſequimur ſequentes determinationes:

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m + k$ exiſtente

$$k < 2\Delta(p - q)$$

tum poſt conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N};\quad \frac{dy}{dt} = m - \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mu - \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta (M + N)}$$

at pro globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N - M)p + 2Mq}{M + N};\quad \frac{dy'}{dt} = n + \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)};\quad \frac{d\eta}{dt} = \nu + \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M + N)}.$$

60. Hinc iam ſponte caſus adhuc reſiduus reſoluitur in hunc modum:

Si fuerit $a\mu - b\nu = n - m - k$, exiſtente

$$k < 2\Delta(p - q)$$

poſt conflictum erit pro globo M

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N};\quad \frac{dy}{dt} = m + \frac{\delta k N}{\Delta(M + N)};\quad \frac{d\zeta}{dt} = \mu + \frac{\delta k N}{\alpha a \Delta(M + N)}$$

et pro altero globo N

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(N - M)p + 2Mq}{M + N};\quad \frac{dy'}{dt} = n - \frac{\delta k M}{\Delta(M + N)};\quad \frac{d\eta}{dt} = \nu - \frac{\delta k M}{\beta b \Delta(M + N)};$$

vbi manifeſtum eſt, ſi fuerit $k = 0$, ambos hos caſus ad caſum primum reuocari, at ſi fuerit

$$k = 2\Delta(p - q),$$

tum caſus penultimus reuoluitur ad caſum ſecundum, vltimus autem ad caſum tertium, ita vt nusquam ſaltus occurrat.

DE

DE COLLISIONE CORPORVM PENDVLORVM, TAM OBLIQVA, QVAM MOTV GYRATORIO PERTVRBATA.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in diſſertatione praecedente ſunt determinata, egregie per motum pendulorum illuſtrari atque experimentis comprobari poſſunt. Si enim duo globi M et N ita filorum ope ex punctis A et B ſuſpendantur, vt dum fila ſitum verticalem tenent, globi ſe mutuo contingant, atque recta M N per eorum centra tranſiens fiat horizontalis; tum omnes illae colliſiones, quas ante definiuimus, facili mechaniſmo produci poſſunt. Si enim ambo globi in eodem plano verticali, in quo fila A M et B N verſantur, de ſitu naturali deducantur, indeque ſubito dimittantur, vt ſimul ad ſtatum naturalem perveniant, tum conflictus orietur directus, cuius phoenomena iam pridem ſunt explorata atque per huiusmodi experimenda comprobata. Si autem globi in diuerſis planis verticalibus deducantur iterumque ita dimittantur, vt ſimul ad ſtatum naturalem pertingant, tum conflictus eueniet obliquus, de quo Tab. IV. Fig. 3.

etiam nunc regulae certae nusquam reperiuntur traditae, ſemper autem in ipſo colliſionis momento, non ſolum recta $M N$ ſed etiam directio vtriusque motus erit horizontalis, omnino vti in ſuperiori diſſertatione aſſumſimus.

2. Hoc autem modo non ſolum vtrique globo celeritates quaecunque, quibus conflictus inchoetur, imprimi poſſunt, ſed etiam fila contorquendo vtrique motus gyratorius quicunque induci poterit, qui quum ſemper circa axem, quem ipſum filum exhibet fiat, etiam in conflictu axis vtriusque gyrationis erit verticalis, prorſus vti in ſuperiori ſcripto aſſumſimus, quin etiam durante conflictu, circa hos axes in globis motus gyratorius generari poterit, ita vt hoc modo non ſolum omnia, quae de colliſione obliqua inueſtigauimus, experimentis confirmari, ſed globis inſuper motus gyratorius imprimi posſit, de quo motu nihil adhuc ab iis, qui de colliſione corporum tractauerunt, accurate eſt definitum.

3. Neque etiam abſolute opus eſt, vt ambo corpora ſint globi, ſed ad inſtitutum noſtrum ſufficit, vt ſint eiusmodi corpora rotunda, quorum axes incidant in ipſa fila ſuſpenſionis, tum vero etiam neceſſe eſt, vt eorum circuli maximi, quibus ſe mutuo contingunt, per vtriusque centrum grauitatis
Tab. IV. Fig. 4. tranſeant. Sint igitur centra haec in punctis M et N et vocemus pro priore radium circuli illius maximi $MC = a$, alterius vero globi N radium $NC = b$, praeterea vero pondus illius ſiue maſſa ſtatuatur

$= M$,

$= M$, huius vero $= N$, praeterea autem pro motu gyratorio, ſit prioris corporis M momentum inertiae reſpectu axis $MA = \alpha M a a$, alterius vero corporis N reſpectu axis $NB = \beta N b b$, vbi per nota praecepta, pro data vtriusque corporis figura, numeri α et β inueniri poſſunt.

4. Vt nunc ſtatum motus vtriusque corporis ante conflictum accurate deſcribamus, repraeſentent circuli $A a C$ et $B b C$ circulos illos maximos in plano horizontali, quibus corpora ſe in puncto C contingunt, ita vt ſit $MC = a$ et $NC = b$, hunc enim ſitum concipiamus in ipſo colliſionis initio tenere, quo ambo centra peruenerint ſecundum directiones μM et νN; ex quorum motuum reſolutione naſcatur pro corpore M celeritas ſecundum $pM = p$ et ſecundum $nM = m$, pro altero vero corpore N, celeritas ſecundum $qN = q$ et ſecundum $nN = n$, praeterea vero corpus M gyretur in ſenſum $C a A$, celeritate angulari $= \mu$, alterum vero N in ſenſum $C b B$ celeritate $= \nu$, ita vt pro illo celeritas puncti $C = a\mu$, pro hoc vero celeritas puncti $C = b\nu$, hisque elementis vtriusque corporis motus ante conflictum erit definitus.

5. Hic ante omnia notandum eſt, vt figura initium conflictus repraeſentet, interuallum centrorum MN minus eſſe debere, quam inſtanti praecedente, vbi haec diſtantia erat $\mu\nu$, ſiue rectam $\mu\nu$ maiorem eſſe debere, quam MN, hoc autem euenire nequit, niſi ſit interuallum $pq > MN$ ſiue niſi

ſit $Mp > Nq$, ſiue $p - q > 0$, ſemper autem figuram ita repraeſentare licet, vt fiat p quantitas poſitiua, tum ergo vel q debet eſſe quantitas negatiua, vel ſi ſit poſitiua, debet eſſe $q < p$, quod ad reliquas quantitates attinet m, n, μ et ν; eae cenſendae ſunt poſitiuae, ſi earum directiones cum figura conueniant, ſecus eae ſumendae ſunt negatiuae, quae quidem per ſe ſatis ſunt perſpicua.

6. His circa ſtatum corporum ante conflictum definitis, pro eorum ſtatu poſt conflictum ponamus celeritates ſecundum easdem directiones ſumtas, primo quidem pro corpore M:

celer. centri ſec. $pM = p'$; ſec. $mM = m'$ et angularem in ſenſum $CaA = \mu'$

pro altero autem corpore N, ſit

celerit. centri ſec. $qN = n'$ et angularis in ſenſum $CbB = \nu'$

ſicque nunc totum negotium eo redit, vt ex datis celeritatibus ante conflictum, quae ſunt p, q, m, n, μ, ν definiantur celeritates poſt conflictum, quae ſunt $p', q', m', n', \mu', \nu'$, cognitis ſcilicet, quae initio iam indicauimus, maſſis corporum M et N, porro radiis a et b ac denique etiam momentis inertiae

αMaa et βMbb.

7. Antequam autem ſtatum corporum poſt conflictum definire liceat, nonnulla momenta ſunt probe perpendenda. Primo enim, quum nulla colliſio

liſio obliqua euenire queat, niſi in contactu corporum attritus contingat, frictionis ratio omnino haberi debet, quoniam igitur frictio certae parti cuipiam adpreſſionis mutuae aequalis cenſeri ſolet, quae pars vulgo ſiue $\frac{1}{3}$ ſiue $\frac{1}{4}$, ſiue etiam minor aeſtimatur, prouti corpora fuerint magis minusue leuigata, loco huius fractionis hic in genere littera δ vtamur, ita vt vis qua ambo corpora ſibi mutuo adprimuntur per δ multiplicata exhibeat quantitatem frictionis. Deinde vero imprimis diſpiciendum eſt, vtrum ambo corpora ſint elaſtica nec ne, et quum infiniti dentur gradus elaſticitatis, hic duo praecipua corporum genera primum ſumus contemplaturi. Primo ſcilicet loco corpora omni elaſticitate deſtituta conſiderabimus, deinde vero eiusmodi corpora, quae perfecte ſint elaſtica, ſeu in quibus impreſſiones inter conflictum inductae perfecte reſtituantur. De vtroque autem genere tenendum eſt, impreſſiones ſibi mutuo factas, quam minimas eſſe debere, quia alioquin regulae, quas ſumus daturi ob figuram mutatam non amplius locum habere poſſent, vnde corpora molliora hinc excludi oportet. Denique quo ſequentes calculi fiant faciliores breuitatis gratia loco formulae

$$\delta \frac{\alpha(\beta+1)M+\beta(\alpha+1)N}{\alpha\beta(M+N)},$$

ſcribamus ſimpliciter Δ; ita vt fieret $\Delta = 0$, ſi frictio euaneſceret.

I. Col-

I. Colliſio corporum omnis elateris expertium.

8. Hic ante omnia has duas formulas probe perpendi oportet, $m + a\mu$ et $n + b\nu$, quarum illa indicat veram celeritatem puncti C quatenus ad corpus prius M pertinet, ſecundum directionem CD, normalem ad axem MN, haec vero indicat celeritatem eiusdem puncti C quatenus ad alterum corpus pertinet in eadem directione CD, prout enim hac duae formulae inter ſe fuerint vel aequales, caſus colliſionis ſollicite diſtingui oportet, atque inſuper caſus inaequalitatis, duplici modo conſiderari debent, prouti differentia iſtarum formularum, fuerit vel minor vel maior, quam haec formula $\Delta(p-q)$, vnde cum ipſa differentia illa poſſit eſſe vel poſitiua vel negatiua, hinc quinque caſus naſcuntur, ſecundum quos colliſionis praecepta exhiberi oportet.

Caſus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

9. Hoc caſu poſt colliſionem habebimus

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ m' = m;\ \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ n' = n;\ \nu' = \nu.$$

Caſus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ et $m + a\mu < n + b\nu + \Delta(p-q)$, ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + \gamma\Delta(p-q)$

ita

ita vt ſit γ certa fractio vnitate minor.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ m' = m - \frac{\delta\gamma N(p - q)}{M + N};\ \mu' = \mu - \frac{\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N:

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ n' = n + \frac{\gamma\delta M(p - q)}{M + N};\ \nu' = \nu + \frac{\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Caſus Tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + \Delta(p - q)$.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ m' = m - \frac{\delta N(p - q)}{M + N};\ \mu' = \mu - \frac{\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ n' = n + \frac{\delta M(p - q)}{M + N};\ \nu' = \nu + \frac{\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Caſus Quartus.

quo $n + b\nu > m + a\mu$, at $n + b\nu < m + a\mu + \Delta(p - q)$,

ponatur $n + b\nu = m + a\mu + \gamma\Delta(p - q)$,

ita vt ſit γ fractio vnitate minor.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ m' = m + \frac{\gamma\delta N(p - q)}{M + N};\ \mu' = \mu + \frac{\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\ n' = n - \frac{\gamma\delta M(p - q)}{M + N};\ \nu' = \nu - \frac{\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Caſus Quintus.

pro $n + b\nu > m + a\mu + \Delta(p - q)$.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\quad m' = m + \frac{\delta N(p-q)}{M+N};\quad \mu' = \mu + \frac{\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq}{M + N};\quad n' = n - \frac{\delta M(p-q)}{M+N};\quad \nu' = \nu - \frac{\delta M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

10. Quemadmodum in primo caſu eſt:

$$m + a\mu = n + b\nu,$$

ita ſi fuerit

$$m + a\mu > n + b\nu,$$

tum vel caſus ſecundus vel tertius locum habet, ita vt caſus ſecundus medium quoddam teneat inter primum et tertium, atque ſi ſit $\gamma = 0$ in primum recidat, ſin autem ſit $\gamma = 1$, in tertium. Simili modo tam pro quarto, quam pro quinto caſu eſt

$$n + b\nu > m + a\mu$$

et caſus quartus certum tenet medium inter primum et quintum, ita vt ſi ſit $\gamma = 0$, in primum, ſin autem ſit $\gamma = 1$ in quintum cadat. Praeterea etiam manifeſtum eſt, ſi frictio penitus euaneſceret, tum omnes hos quinque caſus prorſus inter ſe conuenire, atque ad ſolum primum reduci, ita vt omnis diuerſitas horum caſuum ſoli frictioni ſit tribuenda. Quodſi ergo nulla eſſet frictio ſeu $\delta = 0$, in colliſione tantum celeritates ſecundum directio-

nem

nem ictus A B mutationem paterentur, celeritates vero laterales ſecundum directiones m M et n N prorſus immutatae relinquerentur, quin etiam motus gyratorius vtriusque corporis neutiquam per conflictum afficeretur. Huc autem redeunt omnia ea, quae ante de colliſione corporum obliqua ſunt tradita, ex quo omnes mutationes, quae hic occurrunt, a ſola frictione originem ducunt.

11. Quodſi iam noſtros quinque caſus perpendamus, ſtatim apparet, frictionem in celeritates p et q, quae in directione conflictus A B ſunt conſtitutae, plane non influere, pro omnibus enim caſibus ſemper eſt

$$p' = q' = \frac{Mp + Nq}{M + N},$$

ita vt ſecundum hanc directionem ambo corpora poſt conflictum communi motu progrediantur, cuius celeritas communi corporum centro grauitatis conueniat.

12. Quod deinde ad celeritates laterales attinet, quae ante conflictum ſunt m et n, poſt conflictum vero m' et n'; manifeſtum eſt pro omnibus caſibus fore

$$Mm' + Nn' = Mm + Nn$$

ſiue etiam in his celeritatibus quantitatem motus conſeruari. Porro vero circa motus gyratorios perpetuo haec proprietas ſubſiſtet

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

 quae

quae aequatio quodammodo conſeruationem motus gyratorii continere eſt cenſenda. Denique vero etiam haec conditio in omnibus caſibus locum inuenit, vt ſit

$$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu \text{ ſiue } m' - m = \alpha a (\mu' - \mu)$$

atque $n' - \beta b \nu' = n - \beta b \nu$ ſeu $n' - n = \beta b (\nu' - \nu)$.

13. Vt aliquod exemplum notatu dignum adferamus, ponamus maſſam corporis N eſſe quaſi infinitam eiusque centrum ante conflictum quieſcere ita, vt ſit $q = 0$ et $n = 0$, motum autem eius gyratorium celeritate angulari ν exhiberi, tum vero alterum corpus M in id directe incurrat ſecundum directionem A B celeritate $= p$, celeritas autem tam lateralis m, quam gyratoria μ euaneſcat, hoc poſito quum ſit

$$m + a \mu = 0 \text{ et } n + b \nu = b \nu$$

euidens eſt, hanc quaeſtionem vel ad caſum quartum vel quintum referendam eſſe, ſcilicet ad quartum caſum pertinebit, ſi ob

$$\Delta = \delta \tfrac{(\alpha + 1)}{\alpha} \text{ fuerit } b \nu < \tfrac{\delta (\alpha + 1) p}{\alpha} < (1 + \tfrac{1}{\alpha}) \delta p$$

ſin autem ſit

$$b \nu > (1 + \tfrac{1}{\alpha}) \delta p,$$

tum ad quintum caſum pertinebit. Pro caſu quarto quum ſit

$$\gamma = \tfrac{\alpha b \nu}{(\alpha + 1) \delta p}$$

poſt conflictum habebimus

$$p' = 0; \; m' = \tfrac{\alpha b \nu}{\alpha + 1}; \text{ et } \mu' = \tfrac{b \nu}{(\alpha + 1) a}$$

tum

tum vero

$q' = o$; $n' = o$ et $\nu' = \nu$

verum ſi caſus quintus locum habeat, poſt conflictum erit pro corpore M

$p' = o$; $m' = \delta p$ et $\mu' = \frac{\delta p}{\alpha \alpha}$.

II. Colliſio corporum perfecte elaſticorum.

14. Totum iudicium hic iterum exordiendum eſt a formulis $m + a\mu$ et $n + b\nu$, vtrum eae ſint aequales an inaequales, hocque caſu vtra maior vel minor? tum vero differentiam comparari oportet, cum formula $2\Delta(p - q)$, an ea maior ſit minorue, vnde ſimili modo quinque caſus diuerſi euoluendi occurrunt.

Caſus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

Pro hoc caſu habebimus poſt colliſionem

pro corpore M

$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}$; $m' = m$; $\mu' = \mu$

pro corpore vero N

$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}$; $n' = n$; $\nu' = \nu$.

Caſus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ at $\mu + a\mu < n + b\nu + 2\Delta(p - q)$ ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + 2\gamma\Delta(p - q)$, ita vt γ ſit fractio vnitate minor.

Pro hoc caſu poſt colliſionem habebitur

 pro

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}$$

$$m' = m - \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{M + N}; \quad \mu' = \mu - \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}$$

$$n' = n + \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{M + N}; \text{ et } \nu' = \nu + \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Caſus tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + 2\Delta(p - q)$.

Pro hoc caſu poſt colliſionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}; \quad m' = m - \frac{2\delta N(p - q)}{M + N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{2\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}; \quad n' = n + \frac{2\delta M(p - q)}{M + N};$$

$$\text{et } \nu' = \nu + \frac{2\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Caſus Quartus.

quo $n + b\nu > m + a\mu$ at $n + b\nu < m + a\mu + 2\Delta(p - q)$

ponatur ergo $n + b\nu = m + a\mu + 2\gamma\Delta(p - q)$,

ita vt ſit γ fractio vnitate minor.

Hoc ergo caſu poſt colliſionem habebimus:

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N}; \quad m' = m + \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{M + N}; \quad \mu' = \mu + \frac{2\gamma\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{(N - M)q + 2Mp}{M + N}; \quad n' = n - \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{M + N}; \quad \nu' = \nu - \frac{2\gamma\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

Caſus

Caſus Quintus.

quo $n + b\nu > m + a\mu + 2\Delta(p - q)$.

Pro hoc ergo caſu, poſt colliſionem habemus

pro corpore M

$$p' = \frac{(M - N)p + 2Nq}{M + N};\quad m' = m + \frac{2\delta N(p - q)}{M + N};\quad \mu' = \mu + \frac{2\delta N(p - q)}{\alpha a(M + N)}$$

et pro corpore N

$$q' = \frac{(N - M)p + 2Mq}{M + N};\quad n' = n - \frac{2\delta M(p - q)}{M + N};\quad \nu' = \nu - \frac{2\delta M(p - q)}{\beta b(M + N)}.$$

15. Hic iterum vt ſupra imprimis animadverti conuenit, ſi omnis frictio euanuerit, ob $\delta = 0$, omnes hos quinque caſus ad perfectum conſenſum reduci, ita vt celeritates poſt conflictum eosdem valores obtineant, qui in caſu primo ſunt expreſſi, quae determinationes conueniunt cum iis, quae vulgo ex ſola motus reſolutione pro colliſione obliqua huiusmodi corporum deduci ſolent, omnis igitur diuerſitas in noſtris caſibus a ſola frictione proficiſcitur.

16. In omnibus his quinque caſibus, celeritates ſecundum directionem conflictus A B, quae ſunt p' et q', prorſus inter ſe conueniunt, iisque propterea nulla mutatio ob frictionem infertur. Circa has celeritates autem imprimis notaſſe iuuabit fore

$$Mp' + Nq' = Mp + Nq,$$

prorſus vti conſeruatio motus poſtulat. Praeterea vero notatu dignum hic occurrit eſſe ſemper

$$q' - p' = p - q,$$

ex quibus duabus proprietatibus colligitur haec maxime memorabilis, quod ſit

$$Mp'p' + Nq'q' = Mp^2 + Nq^2$$

qua

qua conſeruatio virium viuarum continetur, ſi enim ad quadratum prioris aequationis quadratum alterius in $M\,N$ ductum addatur et ſumma per $M + N$ diuidatur, haec ipſa formula reſultat.

17. Quod vero ad celeritates m' et n' attinet, omnes caſus in hoc conueniunt, vt ſit

$$M\,m' + N\,n' = M\,m + N\,n,$$

qua conſeruatio motus indicatur, hoc autem loco circa vires viuas nihil concluditur: Etſi enim ex primo caſu oritur

$$M\,m'\,m' + N\,n'\,n' = M\,m\,m + N\,n\,n,$$

tamen ex reliquis longe alius valor eruitur, ita vt hic vires viuae locum non habeant.

18. Ratione motus gyratorii autem, omnes quinque caſus in hoc conueniunt, quod ſit

$$\alpha\,M\,a\,\mu' + \beta\,N\,b\,\nu' = \alpha\,M\,a\,\mu + \beta\,N\,b\,\nu,$$

deinde vero ſi iſte motus cum laterali conferatur, omnibus caſibus ſequentes quoque proprietates conveniunt:

$m' - \alpha a \mu' = m - \alpha a \mu$, ſiue $m' - m = \alpha a(\mu' - \mu)$ et $n' - n = \beta\,b\,(\nu' - \nu)$.

19. Exempli loco, ſtatuamus iterum corporis N maſſam quaſi infinitam, cuius centrum ante conflictum quieuerit, ſolo motu gyratorio ei relicto celeritate angulari $= \nu$, pro altero autem corpore M ante conflictum fuerit $m = 0$ et $\mu = 0$, quibus poſitis habebimus caſum quartum, ob $q = 0$ et $n = 0$, ſi fuerit

$b\,\nu < 2\,(1 + \frac{1}{\alpha})\delta p$, quo caſu erit $\gamma\delta = \frac{\alpha b \nu}{2(\alpha + 1)p}$

at,

at ſi fuerit

$$b\nu < 2(1 + \tfrac{1}{\alpha})\delta p,$$

tunc caſus quintus locum habet, conſequenter pro caſu quarto corpus M poſt colliſionem his feretur celeritatibus

$$p' = -p;\; m' = +\frac{\alpha b \nu}{\alpha + 1};\; \mu' = \frac{b\nu}{(\alpha + 1)\alpha}$$

pro caſu autem quinto, hae celeritates erunt

$$p' = -p;\; m' = 2\delta p;\; \mu' = \frac{2\delta p}{\alpha\alpha}$$

alterum autem corpus N, motum ſuum conſeruat.

III. Colliſio corporum non perfecte elaſticorum.

20. Ex binis praecedentibus corporum generibus facile poſſumus deducere, regulas pro colliſione corporum non perfecte elaſticorum, in quibus ſcilicet impreſſiones ſibi inuicem inductae non penitus reſtituuntur. Quoniam igitur tantum ex parte reſtituuntur, denotet littera ε eam partem, quae actu reſtituitur, ita vt ſi fuerit $\varepsilon = 0$, corpora omni elaſticitate deſtituantur, ſin autem ſit $\varepsilon = 1$, corpora habeantur perfecte elaſtica, vnde intelligitur fractionem ε gradum elaſticitatis commode exprimere, quo poſito ſi ante conflictum omnia manent eadem, vt ſupra ſunt conſtituta, regulae colliſionis per quinque caſus diſtributae ſequenti modo ſe habebunt.

Caſus Primus.

quo $m + a\mu = n + b\nu$.

 Hoc

Hoc caſu poſt colliſionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M+N}; \; m' = m; \; \mu' = \mu$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N}; \; n' = n \text{ et } \nu' = \nu.$$

Caſus Secundus.

quo $m + a\mu > n + b\nu$ et $m + a\mu < n + b\nu + (1+\varepsilon)\Delta(p-q)$ ponatur ergo $m + a\mu = n + b\nu + \gamma(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$ ita, vt γ ſit fractio vnitate minor.

Pro hoc ergo caſu, poſt colliſionem habebimus

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M+N}; \; m' = m - (1+\varepsilon)\frac{\gamma\delta N(p-q)}{M+N};$$

$$\mu' = \mu - \frac{(1+\varepsilon)\gamma\delta N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore autem N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N}; \; n' = n + (1+\varepsilon)\frac{\gamma\delta M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu + (1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Tertius.

quo $m + a\mu > n + b\nu + (1+\varepsilon)\Delta(p-q)$.

Pro hoc caſu poſt conflictionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp + Nq - \varepsilon N(p-q)}{M-N}; \; m' = m - (1+\varepsilon)\delta\frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu - (1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp + Nq + \varepsilon M(p-q)}{M+N}; \; n' = n + (1+\varepsilon)\delta\frac{M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu + (1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Quartus.

quo $n+b\nu > m+a\mu$, at $n+b\nu < m+a\mu+(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$; ponatur ergo $n+b\nu = m+a\mu+(1+\varepsilon)\gamma\Delta(p-q)$, ita vt ſit γ fractio vnitate minor.

Hoc caſu poſt colliſionem erit

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq-\varepsilon N(p-q)}{M+N};\quad m' = m+(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu+(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore vero N

$$q' = \frac{Mp+Nq+\varepsilon M(p-q)}{M+N};\quad n' = n-(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{M+N}$$

$$\nu' = \nu-(1+\varepsilon)\gamma\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

Caſus Quintus.

quo $n+b\nu > a\mu+(1+\varepsilon)\Delta(p-q)$

Pro hoc caſu poſt colliſionem habemus

pro corpore M

$$p' = \frac{Mp+Nq-\varepsilon N(p-q)}{M+N};\quad m' = m+(1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{M+N}$$

$$\mu' = \mu+(1+\varepsilon)\delta.\frac{N(p-q)}{\alpha a(M+N)}$$

pro corpore N

$$q' = \frac{Mp+Nq+\varepsilon M(p-q)}{M+N};\quad n' = n-(1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{M+N};$$

$$\nu' = \nu-(1+\varepsilon)\delta.\frac{M(p-q)}{\beta b(M+N)}.$$

21. Hic iterum ambae celeritates p' et q' per omnes quinque caſus eosdem retinent valores, atque etiamnunc quantitas motus eadem conſeruatur, quum ſit

$$M p' + N q' = M p + N q.$$

Quod autem ad vires viuas attinet, quoniam hic ſit

$$q' - p' = \varepsilon (p - q),$$

ſi ad quadratum illius aequationis addamus huius quadratum per MN multiplicatum, et per M+N, diuidamus, reſultat ſequens aequatio:

$$M p' p' + N q' q' = M p p + N q q - (1 - \varepsilon\varepsilon) \frac{MN}{M + N} (p - q)^2$$

ex qua patet, ſummam virium viuarum poſt colliſionem ſemper minorem eſſe, quam ante, niſi ſit $\varepsilon = 1$ et iacturam aequari

$$= (1 - \varepsilon\varepsilon) \frac{MN}{M + N} (p - q)^2.$$

22. Praeterea pro omnibus quinque caſibus iterum erit

$$M m' + N n' = M m + N n,$$

tum vero etiam

$$\alpha M a \mu' + \beta N b \nu' = \alpha M a \mu + \beta N b \nu,$$

denique etiam hae proprietates omnibus ſunt communes, vt ſit

$$m' - m = \alpha a (\mu' - \mu) \text{ et } n' - n = \beta b (\nu' - \nu)$$

atque adeo hae proprietates ſemper valent, ſiue corpora ſint elaſtica, ſiue ſecus, quoniam in his formulis non ſolum littera δ, ſed etiam littera ε ex calculo eſt egreſſa.

DE

DE VERA TAVTOCHRONA IN FLVIDO.

Auctore

L. EVLERO.

Quae hactenus de tautochronis in medio reſiſtente ingenti ſtudio ſunt prolata, non tam ob vſum practicum omni laude digna ſunt aeſtimanda, ſed vires ingenii, quibus ſcientia plurimum locupletari ſolet, non mediocriter exercuerunt. Primum enim in rerum natura vix alia reſiſtentiae lex reperitur, niſi quae quadrato velocitatis ſit proportionalis; tum vero etiam in hac ipſa reſiſtentiae hypotheſi curua tautochrona a Geometris aſſignata nullum plane vſum in praxi habere poteſt; propterea quod aſcenſus et deſcenſus corporis peculiares et diverſas curuas ad tautochronismum requirunt; etiamſi enim hae duae curuae coniungantur et oſcillationes in curua deſcenſuum incipientes aequalibus abſoluantur temporibus; tamen oſcillationes ſequentes, quae in tautochrona aſcenſus eſſent incepturae, tautochronismi proprietate erunt deſtitutae. Quemadmodum autem huic incommodo occurri poſſet, in opere meo mechanico ſummo ſtudio inueſtigaui, neque tamen optatum ſcopum mihi attingere licuit, niſi eo caſu, quo reſiſtentia fuerit quam minima;

 neque

neque vero quisquam ab eo tempore feliciori ſucceſſu in hoc negotio elaborauiſſe videtur. Ob tantas igitur difficultates operae pretium erit, praecipua momenta, quibus haec inueſtigatio innititur, perſpicue expoſuiſſe, cum nullum ſit dubium, quin analyſis inſignia incrementa ſit acceptura, ſi cui arduum hoc negotium expedire contigerit. Fundamentum huius inueſtigationis ſine dubio ex eo problemate repeti oportet, quo pro data curua quacunque, ſuper qua corpus deſcenſus ſuos abſoluat, inveni curuam iungendam aſcenſui deſtinatam, ita, vt quilibet deſcenſus cum aſcenſu ſequente dato tempore abſoluatur. Nunc enim totum negotium eo reducitur, vt caſus quaeratur, quo curua aſcenſus ipſi curuae deſcenſus ſimilis euadat et aequalis; ſic enim omnes plane oſcillationes ſiue in hac ſiue in altera curua incipiant, neceſſario erunt iſochronae; atque hanc demum curuam licebit veram tautochronam in fluido adpellari. Quomodo igitur huius quaeſtionis ſolutionem tentari conueniat, hic adcuratius ſum examinaturus.

Tab. IV. Fig. 5. §. 1. Repraeſentetur igitur iſta curua in figura annexa, quae circa axem verticalem OA duos ramos habeat ſimiles et aequales OE et O*e* et ſumamus corpus ex E deſcenſum inchoaſſe, in altero autem ramo iterum aſcendere vsque ad *e*, ita, vt tempus totius oſcillationis per arcum EO*e* ſemper eiusdem quantitatis eſſe debeat, vbicunque deſcenſus inceperit.

§. 2. Iam vtrumque motum tam aſcenſus quam deſcenſus ſeorſim perpendamus ac primo quidem pro deſcenſu vocetur abſciſſa $Ox = x$ et arcus $OS = S$; celeritas autem in puncto S debita ſit altitudini V, ac principia motus hanc praebent aequationem

$$dV = -dX + cV\,dS$$

ſiue $dV - cV\,dS = -dX$

quae in e^{-cV} ducta et integrata dabit

$$e^{-cS}V = C - \textstyle\int. e^{-cS}dX$$

quod poſtremum integrale ita capiatur, vt in puncto infimo O, vbi et $x = o$ et $S = o$, euaneſcat; pro conſtante autem inuenta C ſtatuamus corporis celeritatem in puncto infimo O debitam eſſe altitudini k, factoque $S = o$ et $V = k$, elicitur conſtans $C = k$, ſicque habebimus

$$V = e^{cS}(k - \textstyle\int. e^{-cS}dX).$$

§. 3. Eodem modo euoluamus motum aſcenſus, pro quo ſit abſciſſa $Ox = x$ et arcus $Os = s$ et altitudo celeritati in s debita $= v$; quo poſito aequatio motum exprimens erit

$$dv = -dx - cv\,ds$$

ſiue $dv + cv\,ds = -dx$

quae per e^{cs} multiplicata et integrata dat

$$e^{cs}v = C - \textstyle\int. e^{cs}dx$$

quod poſtremum integrale etiam euaneſcat in ipſo puncto O et quia hic altitudo celeritati debita etiamnum

iamnum eſt k, facto $s = 0$ colligitur $C = k$, ita, vt ſit pro aſcenſu

$$v = e^{-cs}(k - \int. e^{cs} dx).$$

§. 4. Definita vtraque celeritate conſideremus etiam tempora, quibus arcus O S et O s abſoluuntur et quia ipſae celeritates per $\sqrt{V}$ et $\sqrt{v}$ exprimuntur, erit pro deſcenſu tempus per arcum O S

$$\int. \frac{dS}{\sqrt{(e^{cS}[k - \int. e^{-cS} dx])}} = \int. \frac{e^{-\frac{cS}{2}} dS}{\sqrt{(k - \int. e^{-cS} dx)}},$$

ita ſumendum, vt euaneſcat, facto $S = 0$. Pro aſcenſu autem erit ſimili modo tempus per O s

$$\int. \frac{e^{\frac{cs}{2}} ds}{\sqrt{(k - \int. e^{cs} dx)}},$$

quod integrale etiam in nihilum abire debet, facto $s = 0$.

§. 5. Prior harum formularum integralium exprimet tempus totius deſcenſus per arcum E O, ſi peracta integratione ſtatuatur

$$\int. e^{-cS} dx = k;$$

tempus autem aſcenſus per totum arcum O e ex formula poſteriore elicitur, ſi poſt integrationem fiat

$$\int. e^{cs} dx = k;$$

quocirca efficiendum eſt, vt haec duo tempora iunctim ſumta qnantitati conſtanti fiant aequalia; in quam autem neutiquam ingredi debet quantitas k, quippe

quippe quae pro diuerſis oſcillationibus diuerſos ſortitur valores.

§. 6. Quoniam hic binae variabiles X et x perinde ac S et s nullo modo a ſe inuicem pendent, quoniam in figura punctum s reſpectu S nulla relatione definitur, nobis liberum relinquitur, certam quandam relationem inter haec bina puncta s et S ſtabilire; ad noſtrum autem inſtitutum conuenit ſtatui

$$\int e^{-cS} dX = \int e^{cs} dx;$$

ſic enim tam in ipſo puncto O, vbi vtraque formula euaneſcit, quam pro terminis S et s, vbi vtraque formula fieri debet $= k$, conditio motus impleatur. Denotemus autem hunc vtriusque formulae valorem littera $= z$ ſicque habebimus

$$dX = e^{cS} dz \text{ et } dx = e^{-cs} dz.$$

§. 7. Hoc facto tempus per vtrumque arcum OS et Os iunctim ſumtum erit

$$\int \frac{e^{-\frac{cS}{2}} dS}{\sqrt{(k-z)}} + \int \frac{e^{\frac{cs}{2}} ds}{\sqrt{(k-z)}} = \int \frac{e^{-\frac{cS}{2}} dS + e^{\frac{cs}{2}} ds}{\sqrt{(k-z)}},$$

cuius integralis valor ſumto $z = k$ debet eſſe quantitas conſtans, non pendens a k, quae proprietas cum huic formulae conueniat

$$\int \frac{\alpha . dz}{\sqrt{(z(k-z))}}$$

quippe quae abit in $\alpha \pi$, quare ſi huic formulae noſtram aequalem ſtatuamus, adipiſcimur

$$e^{-\frac{cS}{2}} . dS + e^{\frac{cs}{2}} . ds = \frac{\alpha dz}{\sqrt{z}}$$

et integrando

$$-\frac{2}{c}e^{-\frac{cS}{2}}+\frac{2}{c}e^{\frac{cs}{2}}=2\,\alpha\sqrt{z}$$

vbi conſtante addenda non eſt opus, quia caſu, quo $S=0$ et $s=0$, ſponte fit $z=0$; ſicque obtinuimus hanc formulam ſatis concinnam

$$-e^{-\frac{cS}{2}}+e^{\frac{cs}{2}}=\alpha c.\sqrt{z}.$$

§. 8. Conditiones igitur, quibus ſatisfieri oportere hactenus inuenimus, ſequentibus formulis continentur

I. $dX=e^{cS}dz$

II. $dx=e^{-cs}dz$

III. $-e^{-\frac{cS}{2}}+e^{\frac{cs}{2}}=\alpha c.\sqrt{z}$

quibus facile infinitis modis ſatisfieri poteſt, atque adeo hinc clare intelligitur, quomodo ſi curua pro deſcenſu OE vtcunque fuerit data, inde curua pro aſcenſu Oe definiri poſſit; quod quidem problema in opere citato fuſius ſum perſecutus.

§. 9. Nunc autem potiſſimum praecipua conditio ad inſtitutum noſtrum pertinens eſt expendenda, qua poſtulatur, vt curua Oe prorſus ſimilis et aequalis prodeat curuae OE. Ad hoc autem neceſſe eſt, vt elementum dX eodem prorſus modo per arcum OS cum ſuo elemento dS determinetur, quo elementum dx per arcum reſpondentem Os cum ſuo elemento ds; ſcilicet ſi ſtatuamus

$dX=dS.\Delta:S,$

quoque

quoque eſſe debet

$$dx = ds.\Delta : s;$$

dum character Δ vtrinque denotat functionem eiusdem indolis. Hac ergo conditione principali introducta ſequentibus aequationibus ſatisfieri oportebit:

I. $dS.\Delta : S = e^{cS}dz$

II. $ds.\Delta : s = e^{-cs}dz$

III. $-e^{-\frac{cS}{2}} + e^{\frac{cs}{2}} = ac.\sqrt{z}.$

His ergo tribus aequationibus ſolutio huius quaeſtionis difficillimae continetur, et Geometrae, qui hunc laborem ſuſcipere voluerint, plurimum certe praeſtitiſſe erunt cenſendi, ſi his conditionibus ſatisfaciendi methodum inuenerint.

§. 10. Quo vim iſtarum formularum melius perſpiciamus, conſideremus caſum, quo vel ipſum fluidum eſt rariſſimum vel totus arcus vna oſcillatione confectus quaſi infinite paruus, quandoquidem motus aſcenſus et deſcenſus inter ſe erunt ſimiles et aequales, tum autem pro deſcenſu erit:

$$1 - e^{-\frac{cS}{2}} = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z} \text{ et } e^{+\frac{cs}{2}} - 1 = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z}$$

hoc enim modo tertiae aequationi manifeſte ſatisfit. Iam pro prima aequatione, quum ſit

$$\sqrt{z} = \tfrac{2}{ac}(1 - e^{-\frac{cS}{2}}) = a(1 - e^{-\frac{cS}{2}})$$

ponendo $\frac{2}{ac} = a$, erit $z = aa(1 - 2e^{-\frac{cS}{2}} + e^{-cS})$

 et

et $dz = caadS(e^{-\frac{cS}{2}} - e^{-cS}) = e^{-cS}\,dX$,

ideoque habebitur $dX = aaz\,dS(e^{+\frac{cS}{2}} - 1)$

quae eſt aequatio pro arcu deſcenſus. Pro aſcenſu autem quum ſit

$$\surd z = a(e^{+\frac{cs}{2}} - 1) \text{ erit } z = aa(e^{+cs} - 2e^{+\frac{cs}{2}} + 1)$$

et $dz = aacds\,(e^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}) = e^{+cs}.\,dx$

ideoque $dx = aacds\,(1 - e^{-\frac{cs}{2}})$,

quae duae aequationes vtique conueniunt caſu, quo vel S ſiue s, vel c eſt infinite paruum, tum enim fit

$$e^{+\frac{cS}{2}} - 1 = \tfrac{1}{2}cS \text{ et } 1 - e^{-\frac{cs}{2}} = +\tfrac{1}{2}cs,$$

ita vt oriatur:

$$dX = \frac{aacc}{2}S\,dS \text{ et } dx = \frac{aacc}{2}s\,ds,$$

ſicque vtraque aequatio eandem curuam exprimit.

§. 11. Generatim autem plurimum notaſſe iuvabit, binas aequationes inuentas lege continuitatis inter ſe cohaerere, ſi enim in priori loco S ſcribatur $-s$ et $+x$ loco X aequatio abit in hanc

$$dx = aacdS(1 - e^{-\frac{cs}{2}}),$$

quae eſt ipſa altera aequatio, vnde patet curuam aſcenſus reuera eſſe continuationem curuae deſcenſus eademque aequatione exprimi, etiamſi ambo rami non

non fuerint inter ſe aequales. Hoc caſu perpenſo in genere colligimus ſtatui debere

$$y - e^{-\frac{cS}{2}} = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z} \text{ et } e^{+\frac{cS}{2}} - y = \tfrac{1}{2}ac\sqrt{z}$$

ſic enim quoque tertiae noſtrae aequationi ſatisfit, et nunc bina tempora deſcenſus et aſcenſus non amplius ſunt aequalia. Tenendum autem eſt, quantitatem y pro puncto infimo O in vnitatem abire debere, quoniam hoc loco quantitas z euaneſcit, exponentialia autem abeunt in vnitatem. Hinc iam pro deſcenſu ob

$$\sqrt{z} = a(y - e^{-\frac{cS}{2}}) \text{ et } z = aa(y^2 - 2ye^{-\frac{cS}{2}} + e^{-cS}),$$

habebimus

$$dz = 2aady(y - e^{-\frac{cS}{2}}) + aacdS(ye^{-\frac{cS}{2}} - e^{-cS})$$
$$= e^{-cS}.\,dX,$$

vnde pro curua deducitur iſta aequatio

$$dX = 2aady(ye^{+cS} - e^{+\frac{cS}{2}}) + aacdS(ye^{+\frac{cS}{2}} - 1).$$

Eodem modo pro aſcenſu, quum ſit

$$\sqrt{z} = a(e^{+\frac{cs}{2}} - y)$$

ideoque

$$z = aa(e^{+cs} - 2ye^{+\frac{cs}{2}} + yy),$$

differentiando nanciſcimur

$$dz = aacds(e^{+cs} - ye^{+\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{+\frac{cs}{2}} - y)$$
$$= e^{+cs}dx, \text{ vnde fit}$$

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs}),$$

 quae

quae aequatio ex praecedente reſultat, ſi loco X ſcribatur x et $-s$ loco S dum quantitas y eundem retinet valorem, ex quo etiamnunc intelligimus curvam aſcenſus cum curua deſcenſus eſſe continuam, dummodo y fuerit functio par ipſius S, quae ſcilicet eadem maneat, etiamſi arcus S negatiue capiatur.

§. 18. Nunc igitur quaeſtio huc redit, cuiusmodi functio par ipſius S pro y accipi debeat, vt aequatio pro aſcenſu inter x et s, cum aequatione inter X et S plane conueniat. Attendenti autem ſtatim perſpicuum erit, hoc euenire, ſi X aequetur functioni pari arcus S, vnde ſequitur dX aequari elemento dS in functionem imparem ipſius S ducto. Hoc obſeruato alterutram harum duarum aequationum conſideraſſe ſufficiet, quam ita comparatam eſſe oportet, vt ſi arcus S vel s negatiue accipiatur manente y inuariato, eadem aequatio reſultare debeat, conſideremus igitur aequationem poſteriorem;

$$dx = aacds(1 - ye^{-\frac{cs}{2}}) - 2aady(e^{-\frac{cs}{2}} - ye^{-cs})$$

quae ſumto s negatiue abit in hanc

$$dx = aacds(ye^{+\frac{cs}{2}} - 1) + 2aady(ye^{+cs} - e^{+\frac{cs}{2}}),$$

quae duae aequationes vt inter ſe congruant, neceſſe eſt, vt ſit

$$2ydy(e^{+cs} - e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}) - 2cds = 0$$

vbi

vbi ſingula membra inuoluunt functiones impares ipſius s, quandoquidem y eſt functio par. Nam quum ſit per ſeriem

$$e^{+cs} = 1 + cs + \tfrac{1}{2}c^2s^2 + \tfrac{1}{6}c^3s^3 + \tfrac{1}{24}c^4s^4 \text{ etc.}$$

et $e^{-cs} = 1 - cs + \tfrac{1}{2}c^2s^2 - \tfrac{1}{6}c^3s^3 + \tfrac{1}{24}c^4s^4 - \tfrac{1}{120}c^5s^5$ etc.

erit vtique

$$e^{+cs} - e^{-cs} = 2cs + \tfrac{2}{6}c^3s^3 + \tfrac{2}{120}c^5s^5 \text{ etc.}$$

quae manifeſto eſt functio impar, quod etiam de

$$e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}$$

valet, ſimul autem hinc perſpicitur formulam

$$e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}$$

fore functionem parem.

§. 13. Huc ergo ardua noſtra quaeſtio eſt perducta, vt ex poſtrema illa aequatione valor quantitatis y eruatur, quippe quem iam nouimus fore functionem parem ipſius s. Ac primo quidem vt exponentialia elidamus, ſtatuamus

$$e^{\frac{1}{2}cs} - e^{-\frac{1}{2}cs} = 2p,$$

ita vt p ſit functio impar ipſius s, ac viciſſim s impar ipſius p, hinc autem elicimus:

$$e^{\frac{1}{2}cs} = \surd(1+pp) + p;\; e^{-\frac{1}{2}cs} = \surd(1+pp) - p$$

$$e^{cs} = 1 + 2pp + 2p\surd(1+pp);\; e^{-cs} = 1 + 2pp - 2p\surd(1+pp)$$

et $c\,ds = \frac{2\,dp}{\surd(1+pp)}$;

his

his autem valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra induet hanc formam:

$$2ydy.p\sqrt{(1+pp)}-pdy+ydp-\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}=0.$$

§. 14. Vt hanc aequationem etiam ab irrationalibus liberemus, ſtatuamus

$$y=\frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$$

vbi r debet eſſe functio par ipſius p, vt ſit

$$dy=\frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}}-\frac{rpdp}{(1+pp)^{3:2}}$$

et facta multiplicatione per $(1+pp)^{3:2}$ ſequentem impetramus aequationem:

$$2rdrp(1+pp)-pdr(2+pp)-2r^2p^2dp+rdp(1+2pp)$$
$$-dp(1+pp)=0.$$

Quia nouimus caſu $p=0$ fieri debere $r=1$, ſtatuamus $r=1+q$, ita vt q ſit functio par ipſius p euaneſcens caſu $p=0$ atque hinc perueniemus ad iſtam aequationem:

$$2qdq.p(1+pp)+pdq(1+pp)-2q^2p^2dp+qdp(1-2pp)-ppdp=0.$$

Tentanti hinc facile patebit, pro littera q nullam poteſtatem ſimplicem ipſius p ſatisfacere poſſe, vnde concludere debemus, valorem ipſius q vix aliter niſi per ſeriem infinitam exprimi poſſe, quocirca ponamus:

$$q=Ap^2+Bp^4+Cp^6+Dp^8+\text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{dq}{dp}=2Ap+4Bp^3+6Cp^5+8Dp^7+\text{etc.}$$

porro

porro

$$q^2 = A^2 p^4 + 2\,A\,B p^6 + (2\,A\,C + B^2) p^8 + \text{etc.}$$

et

$$\frac{2\,q\,d\,q}{d\,p} = 4\,A^2 p^3 + 12\,A\,B p^5 + 8(2\,A\,C + B^2) p^7 + \text{etc.}$$

qui valores ſubſtituantur vt ſequitur:

	p^2	p^4	p^6	p^8
$\frac{2\,q\,d\,q}{d\,p} p(1+pp) =$		$+4\,A^2$	$+12\,A\,B$ $+4\,A^2$	$+8(2\,A\,C+B^2)$ $+12\,A\,B$
$\frac{p\,d\,q}{d\,p}(1+p\,p) =$	$+2\,A$	$+4\,B$ $+2\,A$	$+6\,C$ $+4\,B$	$+8\,D$ $+6\,C$
$-2\,q^2 p^2 =$			$-2\,A^2$	$-4\,A\,B$
$+q(1-2\,pp) =$	$+A$	$+B$ $-2\,A$	$+C$ $-2\,B$	$+D$ $-2\,C$
$-p\,p =$	-1			

§ 15. Singulas igitur columnas ad nihilum redigentes reperiemus ſequentes aequationes:

I. $3\,A - 1 = 0$; ſicque $A = \frac{1}{3}$

II. $4\,A^2 + 5\,B = 0$; et $B = -\frac{4\,A^2}{5} = -\frac{4}{5 \cdot 9}$

III $2\,A^2 + 12\,A\,B + 2\,B + 7\,C = 0$; hinc $C = +\frac{2}{45}$

IV. $16.\,AC + 8B^2 + 8AB + 4C + 9D = 0$; $D = -\frac{8 \cdot 61}{9 \cdot 45^2}$

ex quo valores ipſius q indeque ipſius r colligimus ſequentes:

$$r = 1 + \tfrac{1}{3} p^2 - \tfrac{4}{45} p^4 + \tfrac{2}{45} p^6 - \frac{8 \cdot 61}{9 \cdot 45^2} p^8 +$$

quo inuento habemus $y = \frac{r}{\sqrt{(1 + p\,p)}}$, vbi recordemur eſſe

 $p =$

$$p=\frac{e^{\frac{cs}{2}}-e^{-\frac{cs}{2}}}{2} \text{ et } \surd(1+pp)=\frac{e^{\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}}}{2},$$

ita vt nunc quantitas y nobis iam ſatis exacte ſit explorata, quum enim in praxi nonniſi oſcillationes ſatis paruae admitti ſoleant ideoque arcum s perpetuo tanquam ſatis paruum ſpectare liceat, valor inuentus vsque ad octauam poteſtatem ipſius s exactus, praxi omnino ſatisfaciens eſt cenſendus, quum ſit

$$p=\tfrac{1}{2}cs+\frac{c^3s^3}{2.4.6}+\frac{c^5s^5}{2.4.6.8.10}+\frac{c^7s^7}{2.4\ldots\ldots 14} \text{ etc.}$$

Supra autem vidimus, quemadmodum viciſſim formulae arcum s inuoluentes per p determinentur, erat ſcilicet

$$e^{\frac{1}{2}cs}=\surd(1+pp)+p \text{ et } e^{-\frac{1}{2}cs}=\surd(1+pp)-p$$

$$e^{cs}=1+2pp+2p\surd(1+pp);\ e^{-cs}=1+2pp-2p\surd(1+pp)$$

$$s=\tfrac{2}{c}\,\mathrm{L}\,\surd(1+pp)+p \text{ et } cds=\frac{2dp}{\surd(1+pp)}.$$

§. 16. Quodſi nunc quantitatem y pro cognita habeamus, videamus, quomodo ipſa aequatio tautochronae exprimatur, quoniam pro dx duplicem inuenimus aequationem

$$dx=aacds(1-y.e^{-\frac{cs}{2}})-2aady(e^{-\frac{cs}{2}}-y.e^{-cs})$$

$$dx=aacds(y.e^{+\frac{cs}{2}}-1)+2aady(y.e^{+cs}-e^{+\frac{cs}{2}})$$

quarum prior a poſteriori ſubtracta nobis ſuppeditavit valorem ipſius y: nunc has duas aequationes inuicem addamus, vt prodeat

$$2dx = aa(2ydy.(e^{+cs}+e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}}+e^{-\frac{cs}{2}}))$$
$$+ aacyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

quae aequatio, ſi loco s etiam noſtra variabilis p introducatur, fiet

$$2dx = aa(4ydy(1+2pp) - 4dy\surd(1+pp) + \frac{4ypdp}{\surd(1+p^2)}$$

ſiue

$$\frac{dx}{2a^2} = ydy(1+2p^2) - dy\surd(1+pp) + \frac{ypdp}{\surd(1+p^2)}$$

quae ergo eſt aequatio pro vera curua tautochrona, quam quaeſiuimus.

§. 17. Hoc modo problema noſtrum per approximationem reſoluimus, ſin autem vti in analyſi ſublimiori operationes algebrae communis pro conceſſis haberi ſolent, ita reſolutionem aequationum differentialium primi gradus nobis tamquam conceſſam ſpectare liceat, ſolutio noſtri problematis ita concinne expedietur. Quaeratur quantitas variabilis y, ex hac differentiali primi gradus:

$$2ydy(e^{+cs}-e^{-cs}) - 2dy(e^{\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}})$$

$-2cds = 0$, integratione ita inſtituta, vt poſito $s = 0$, fiat $y = 1$, quo facto aequatio pro tautochrona quaeſita inter abſciſſam x et arcum s ita exprimetur:

$$bdx = 2ydy(e^{cs}+e^{-cs}) - 2dy(e^{+\frac{cs}{2}} + e^{-\frac{cs}{2}}) + cyds(e^{+\frac{cs}{2}} - e^{-\frac{cs}{2}})$$

vnde per operationes notiſſimas conſtructio curuae confici poterit.

§. 18. Haec ipſa autem ſolutio merito non parum ſuſpecta videri poteſt, quoniam ratiocinia, quibus innititur, plena perſpicuitate carent, quamobrem Geometrae eo magis ſunt excitandi, vt arduae huius quaeſtionis dignitate impulſi vires ſuas in eius ſolutione exercere velint; equidem lubens fateor me omnem hactenus operam in hoc negotio fruſtra conſumſiſſe, interim tamen ſolutio hic in medium allata, etiamſi ſit errorea, tamen ratione ipſius analyſeos attentione non indigna eſt viſa, caeterum hoc ipſum Problema in Mechanicae meae Volumine II^{do} pro caſu quo fluidum eſt rariſſimum, iam rite ſolutum dedi. Solutio autem ibi data ad praeſentes denominationes translata pro vera tautochrona hanc aequationem praebuerat:

$$dx = acds\left(cs + \tfrac{2}{9}c^3s^3\right),$$

quae ad vſum practicum prorſus eſt ſufficiens; quin etiam ſi fluidum non fuerit admodum rarum, dummodo oſcillationes admittantur ſatis paruae, eadem ſolutio valebit. Nihilo vero minus ſolutionem completam merito deſideramus.

DE

DE
TAVTOCHRONA
IN MEDIO RARISSIMO, QVOD RESISTIT IN RATIONE MVLTIPLICATA QVACVNQVE CELERITATIS.

Auctore
L. EVLERO.

Quamquam huius quaeſtionis iam in Mechanicae meae Volumine ſecundo plenam dedi ſolutionem, nemo tamen eorum, qui hoc argumentum deinceps pertractarunt ac penitus exhauſiſſe videntur, eandem inueſtigationem eſt aggreſſus, etiamſi hinc via tutiſſima parari videatur ad eiusmodi media, quorum reſiſtentia poteſtati cuicunque celeritatis fuerit proportionalis. Quare ne haec materia obliuioni tradatur, eam hic denuo retractare viſum eſt, idque eo magis, quod nunc methodum faciliorem ſum exhibiturus.

1. Sit igitur A S C huiusmodi Tautochrona ſiue aſcenſus, ſiue deſcenſus, namque modo oſtenſum eſt eundem calculum ad vtrumque caſum accommodari poſſe, ſitque A punctum infimum, et C terminus ſiue aſcenſus, ſiue deſcenſus, cuius eleuatio ſuper terminum imum A in axe verticali ſit $Ak=k$, ita vt totum tempus per arcum A C requiratur conſtantis quantitatis pro omnibus valoribus litterae k. Tab. IV. Fig. 6.

 2. Tum

2. Tum vero pro puncto indefinito S, vocetur abſciſſa $AX = x$ et arcus $AS = s$, celeritas porro in S vocetur $= u$ et tempus, quo arcus AS abſoluitur $= t$, ita vt ſit $t = \int \frac{ds}{u}$. Porro denotet u^{2n} eam celeritatis poteſtatem, cui reſiſtentia ſit proportionalis, atque pro motus determinatione habebitur huiusmodi aequatio:

$$2\,u\,du = -a\,dx + \lambda\,u^{2n}\,ds$$

denotante λ eum coefficientem minimum, quo actio reſiſtentiae determinatur, huiusque litterae λ valor poſitiuus ad deſcenſum, negatiuus autem ad aſcenſum referetur.

3. Iam cum neglecta reſiſtentia hinc prodiret

$$uu = a(k-x),$$

ſiquidem poſito $x = k$, celeritas in puncto C euaneſcere debet, pro caſu reſiſtentiae fingamus hanc formulam:

$$uu = a(k-x) + \lambda P + \lambda^2 Q + \lambda^3 R \text{ etc.}$$

quae ſeries vtique maxime erit conuergens ob λ quantitatem quam minimam, atque adeo ſufficere poſſet ſolam litteram P in calculum introduxiſſe, interim tamen hic operae pretium erit, noſtram inveſtigationem etiam ad maiorem praeciſionis gradum proſequi. Hinc autem porro colligitur

$$u^{2n} = a^n(k-x)^n + \lambda n a^{n-1}(k-x)^{n-1}P + \lambda^2 n a^{n-1}(k-x)^{n-1}Q + \lambda^3 n a^{n-1}(k-x)^{n-1}R$$
$$+ \frac{\lambda^2 (n)(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}(k-x)^{n-2}P^2 + \lambda^3 n(n-1)a^{n-2}(k-x)^{n-2}PQ$$
$$+ \frac{\lambda^3 n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}(k-x)^{n-2}P^3,$$

His

His igitur valoribus in aequatione noſtra ſubſtitutis; fit

$$+\lambda dP+\lambda^2 dQ+\lambda^3 dR \text{ etc.} = \lambda a^n(k-x)^n ds+\lambda^2 na^{n-1}(k-x)^{n-1}Pds$$
$$+\lambda^3 na^{n-1}(k-x)^{n-1}Qds$$
$$+\frac{\lambda^3 n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(k-x)^{n-2}P^2 ds$$

ideoque

$$P=a^n\int(k-x)^n ds;\ Q=n.a^{2n-1}\int(k-x)^{n-1}ds\int(k-x)^n ds$$
vel $Q=n.a^{n-1}\int(k-x)^{n-1}Pdy$; $R=n.a^{n-1}\int(k-x)^{n-1}Qds$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}\int(k-x)^{n-2}P^2 ds.$$

4. Valores autem harum litterarum P, Q, R per integrationem ita determinari oportet, vt euaneſcant poſito $x=k$, id quod ideo eſt neceſſe, vt celeritas in termino C euaneſcat. Manifeſtum igitur eſt, iſtas litteras factorem eſſe habituras $(k-x)$ vel adeo eius quandam poteſtatem altiorem, quam ſequente ratiocinio cognoſcere licebit. Sit $(k-x)^e$ maxima poteſtas, quam littera P inuoluit, ita vt fractio $\frac{P}{(k-x)^e}$ non amplius per $k-x$ ſit diuiſibilis, ſeu quod eodem redit, quae poſito $x=k$ non amplius euaneſcat. Quoniam autem iſtius fractionis, tam numerator P, quam denominator $(k-x)^e$ euaneſcit facto $x=k$, ſecundum regulam notiſſimam eius valor pro hoc caſu eruetur, ſi tam numerator, quam denominator ſeorſim differentientur, ſicque caſu $x=k$ haec fractio erit

$$=\frac{dP}{-edx(k-x)^{e-1}}=\frac{a^n.(k-x)^n ds}{-edx(k-x)^{e-1}}=-\frac{1}{e}a^n(k-x)^{n-e+1}\frac{ds}{dx};$$

quae

quae fractio vt facto $x = k$ fiat finita, neceſſe eſt, ſit $n = e - 1$, ideoque $e = n + 1$. Nam quia ratio $\frac{ds}{dx}$ non inuoluit k, hinc noſtra concluſio non turbatur, quocirca efficimus quantitatem P inuoluere factorem $(k - x)^{n+1}$.

5. Eodem modo ratiocinium circa litteram Q inſtituamus, cuius maximus factor itidem ſit $(k-x)^e$, et caſu $x = k$ quoque erit

$$\frac{Q}{(k-x)^e} = \frac{dQ}{-edx(k-x)^{e-1}} = \frac{a^{n-1}(k-x)^{n-1}Pds}{-edx(k-x)^{e-1}},$$

quae forma ob

$$P = (k-x)^{n+1}P' \text{ abit in } \frac{Q}{(k-x)^e} = \frac{na^{n-1}(k-x)^{2n}.P'ds}{-edx(k-x)^{e-1}}$$

quae ergo vt facto $x = k$ prodeat finita neceſſe eſt, ſit $e = 2n + 1$, ita vt littera Q certe factorem ſit habitura $(k - x)^{2n+1}$. Eodem modo iudicium circa litteram R inſtituetur, erit enim

$$\frac{R}{(k-x)^e} = \frac{dR}{-edx(k-x)^{e-1}} = \frac{n\,a^{n-1}(k-x)^{n-1}Qdx}{-edx(k-x)^{e-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.\,2}\,\frac{a^{n-2}(k-x)^{n-2}P^2dx}{-edx(k-x)^{e-1}},$$

cuius expreſſionis pars prior ob

$$Q = (k-x)^{2n+1}Q',$$

praebet $e - 1 = 3n$, ſiue $e = 3n + 1$, quem eundem valorem quoque pars poſterior ob $P^2 = (k-x)^{2n+2}$ praebet ſicque lex manifeſta eſt, ſi quis vlterius progredi voluerit.

6. In-

6. Inuentis autem his litteris P, Q, R quum ſit

$$uu = a(k-x) + \lambda P + \lambda^2 Q + \lambda^3 R \text{ etc.}$$

huius poteſtas exponentis $= -\frac{1}{2}$, praebebit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{a(k-x)}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda P}{a^{3:2}(k-x)^{3:2}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 Q}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^3 R}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{\lambda^2 P^2}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^3 PQ}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{5}{16}\frac{\lambda^3 P^3}{a^{\frac{7}{2}}(k-x)^{\frac{7}{2}}}$$

ergo quum ſit $dt = \frac{ds}{u}$, pro elemento temporis ſequentem nanciſcimur formulam:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{a(k-x)}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda P\, ds}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 Q\, ds}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^3 R\, ds}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{\lambda^2 P^2\, ds}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^3 PQ\, ds}{a^{\frac{5}{2}}(k-x)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{5}{16}\frac{\lambda^3 P^3\, ds}{a^{\frac{7}{2}}(k-x)^{\frac{7}{2}}}$$

cuius integrale quum exprimat tempus per $AS = s$, ita debet capi, vt euaneſcat poſito $s = 0$, vel $x = 0$, quo facto ſi ſtatuatur $x = k$, obtinebitur tempus totius ſiue deſcenſus ſiue aſcenſus, quod ob tautochroniſmi indolem ita debet eſſe comparatum, vt quan-

titas k inde prorſus exulat atque adeo termini, vbi occurreret, ſe mutuo deſtruant.

7. Neglecta autem reſiſtentia, notum eſt, huic indoli ſatisfieri, ſumendo

$$ds = dx \sqrt{\tfrac{b}{x}},$$

tum enim primum membrum prodit

$$dt = \sqrt{\tfrac{b}{a}} \frac{dx}{\sqrt{(kx - xx)}},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ Arc. ſin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}$$

poſito ergo $x = k$, colligitur totum tempus

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi . \sqrt{b}}{\sqrt{a}},$$

in quam expreſſionem littera k non amplius ingreditur. Quodſi ergo admiſſa reſiſtentia effici potuerit, vt totum tempus eidem formulae aequetur, ac ſequentia membra ſe mutuo deſtruant, negotium penitus erit confectum.

8. Quum ſublata reſiſtentia inuenimus

$$ds = dx \sqrt{\tfrac{b}{x}},$$

quem valorem etiam in medio reſiſtente propemodum valere certum eſt, reuera ſumamus eſſe

$$ds = dx \sqrt{\tfrac{b}{x}} + \lambda p dx + \lambda^2 q dx + \lambda^3 r dx + \text{etc.}$$

quo valore ſubſtituto, elementum temporis ſequentibus membris exprimetur

$dt =$

$$dt = \sqrt{\tfrac{b}{a}} \frac{dx}{\sqrt{(kx-xx)}} - \tfrac{1}{2} \frac{\lambda P dx \sqrt{\tfrac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{2} \frac{\lambda^2 Q dx \sqrt{\tfrac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{3}{2}}} - \tfrac{1}{2} \frac{\lambda^3 R dx \sqrt{\tfrac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda p dx}{\sqrt{a(k-x)}} + \tfrac{3}{8} \frac{\lambda^2 P^2 dx \sqrt{\tfrac{b}{x}}}{a^{\frac{5}{2}} (k-x)^{\frac{5}{2}}} + \tfrac{3}{4} \frac{\lambda^3 PQ dx \sqrt{\tfrac{b}{x}}}{a^{\frac{5}{2}} (k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \tfrac{1}{2} \frac{\lambda^2 P p dx}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{3}{2}}} - \tfrac{5}{16} \frac{\lambda^3 P^3 dx \sqrt{\tfrac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda^2 q dx}{\sqrt{a(k-x)}} - \tfrac{1}{2} \frac{\lambda^3 Q p dx}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \tfrac{3}{8} \frac{\lambda^3 P^2 p dx}{a^{\frac{5}{2}} (k-x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \tfrac{1}{2} \frac{\lambda^3 P q dx}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{\lambda^3 r dx}{a^{\frac{3}{2}} (k-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

9. Hic praeter terminum primum occurrunt membra ſiue littera λ ſimpliciter, ſiue eius quadrato, ſiue eius cubo affecta, totumque negotium nunc huc redit, vt ſingulorum horum membrorum integralia facto $x = k$, ſe mutuo tollant pro quolibet ordine, quod quomodo praeſtari queat, in ordine primo oſtendamus, vbi efficiendum eſt, vt

poſito $x = k$, fiat $-\frac{1}{2}\int \frac{P\,d\,x\,\sqrt{\frac{b}{x}}}{a^{\frac{3}{2}}(k-x)^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{p\,d\,x}{\sqrt{a(k-x)}} =$

$$-\frac{\sqrt{b}}{2\,a^{\frac{3}{2}}}\int \frac{P\,d\,x}{(k-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}} + \int \frac{p\,d\,x}{\sqrt{a(k-x)}} = 0.$$

Quum autem ſit

$$P = a^n \int (k-x)^n\, d\,s,$$

loco $d\,s$ valore principali ſubſtituto $d\,x\,\sqrt{\frac{b}{x}}$, caeteris enim partibus haec formula ad ordines ſequentes deuoluitur, pro hoc ordine erit

$$P = a^n \sqrt{b} \int \frac{(k-x)^n\, d\,x}{\sqrt{x}}.$$

Quo autem iſtae formulae pleniores reddantur, ſtatuamus $k = c\,c$ et $x = z\,z$, fietque

$$P = 2\,a^n \sqrt{b} \int d\,z\,(c\,c - z\,z)^n,$$

quem valorem nouimus inuoluere factorem

$$(c\,c - z\,z)^{n+1} \text{ ſiue } (c - z)^{n+1}.$$

Quum nunc efficiendum ſit, vt

$$\int \frac{p\,d\,x}{\sqrt{(k-x)}} = \frac{\sqrt{b}}{2\,a}\int \frac{P\,d\,x}{(k-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b}}{a}\int \frac{P\,d\,z}{(c\,c - z\,z)^{\frac{3}{2}}},$$

hoc poſtremum integrale ita reducatur

$$\int \frac{P\,d\,z}{(c\,c - z\,z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\,P}{c\,c\,\sqrt{(c\,c - z\,z)}} - \int \frac{z\,d\,P}{c\,c\,\sqrt{(c\,c - z\,z)}},$$

cuius membrum primum ſponte euaneſcit facto $z = 0$, at ſi in poſteriori ponatur $x = k$, ſiue $z = c$, quoniam

niam P factorem habet $(c-z)^{n+\frac{r}{}}$, id facto $z=c$ neceſſario euaneſcit, dummodo fuerit $n+1>\frac{r}{2}$ ſiue $n>-\frac{1}{2}$, ſemper autem aſſumi conuenit $n+1>\frac{1}{2}$, quia aliae reſiſtentiae hypotheſes forent maxime abſurdae. Hanc ob rem nobis ſupereſt haec aequatio

$$\int\frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}}=-\frac{\sqrt{b}}{acc}\int\frac{z\,d\mathrm{P}}{\sqrt{(cc-zz)}}=-\frac{a^{n-1}b}{cc}\int\frac{zzdz(cc-zz)^{n}}{\sqrt{(cc-zz)}}$$

ideoque integrando

$$\int\frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{a^{n-1}b}{cc}(cc-zz)^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}a^{n-1}b.c^{2n-1}.$$

Facto igitur $z=c$, pro toto tempore prodibit

$$\int\frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}}=-\frac{2}{2n+1}a^{n-1}.c^{2n-1}.b.$$

10. Quantitatem igitur p ita definiri oportet, vt formola $\int\frac{p\,dx}{\sqrt{(k-x)}}$ integrata poſitoque $x=k$, proveniat eadem quantitas

$$-\frac{2}{2n+1}.a^{n-1}c^{2n-1}b,$$

atque facile perſpicitur, pro p accipi debere quandam poteſtatem ipſius x, quandoquidem k ineſſe nequit. Hunc in finem ſtatuatur
$p=\theta x^{m}$ et adhibita ſubſtitutione $k=cc$ et $x=zz$ producitur

$$\int\frac{\theta x^{m}dx}{\sqrt{(k-x)}}=2\theta\int\frac{z^{2m+1}dz}{\sqrt{(cc-zz)}}=-\frac{2}{2n+1}a^{n-1}c^{2n-1}.b$$

fiat nunc $z=cv$, ita vt poſt integrationem poni debeat $v=1$ et adipiſcimur

$$2\theta c^{2m+1}\int\frac{v^{2m+1}dv}{\sqrt{(1-vv)}}=-\frac{2}{2n+1}a^{n-1}c^{2n+1}b.$$

Hinc autem loco k penitus exulare debet littera c, quod euenit ſumendo $m=n-1$, eritque nunc

$$\theta\int\frac{v^{n-1}dv}{\sqrt{(1-vv)}}=-\frac{1}{2n+1}a^{n-1}b.$$

Iam vero formula

$$\int\frac{v^{2n-1}dv}{\sqrt{(1-vv)}}$$

poſito poſt integrationem $v=1$, praebet certum numerum abſolutum, quem littera N indicemus, ita vt nunc etiam coefficientem conſequamur

$$\theta=-\frac{a^{n-1}b}{(2n+1)N}.$$

11. Inuentis igitur litteris θ et m, prodit littera

$$p=-\frac{a^{n-1}.b}{(2n+1)N}x^{n-1},$$

ſicque pro primo ordine approximationis littera λ ſimpliciter affecto adepti ſumus pro curua tautochrona hanc aequationem

$$ds=dx\sqrt{\frac{b}{x}}-\frac{\lambda a^{n-1}b.x^{n-1}dx}{(2n+1)N}$$

qua primus gradus noſtrae approximationis continetur et quia medium rariſſimum eſſe aſſumitur, in hoc gradu acquieſcere poterimus. Interim tamen hinc ſatis intelligitur, quomodo ſequentem approximatio-

mationis gradum, quadrato $\lambda\lambda$ affectum, expediri oporteat.

12. Hinc ſi reſiſtentia ipſi celeritati fuerit proportionalis ideoque exponens $2n = 1$ et $n = \frac{1}{2}$, aequatio pro Tautochrona hinc reperitur

$$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b}{(2n+1)\,\mathrm{N}\,a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

qua aequatione manifeſto cyclois exprimitur, id quod egregie conuenit. Sin autem reſiſtentia ſequatur quadratum celeritatis erit $n = 1$ et pro curua Tautochrona oritur

$$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b\, dx}{3\mathrm{N}},$$

id quod etiam conuenit cum Tautochrona pro hoc medio reſiſtente inuenta.

13. Totum ergo negotium hic redit ad inventionem numeri N ex integratione formulae

$$\int\frac{v^{2n-1}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}}$$

deriuandi, poſtquam ſcilicet poſitum fuerit $v = 1$, quare a caſibus ſimpliciſſimis inchoemus. Ac *primo* quidem ſi fuerit $2n = 1$, prodit

$$\mathrm{N} = \int\frac{dv}{\sqrt{(1-vv)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Tum vero pro caſu $2n = 2$ fit

$$\mathrm{N} = \int\frac{v\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = 1.$$

Pro aliis caſibus in ſubſidium vocetur haec reductio generalis:

$$\int\frac{v^{\nu+2}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = -\frac{1}{\nu+2}v^{\nu+1}\sqrt{(1-vv)} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\int\frac{v^{\nu}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}},$$

quae

quae caſu $v = 1$, quo opus habemus, praebet

$$\int \frac{v^{\nu+2}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = + \frac{\nu+1}{\nu+2} \int \frac{v^{\nu}\,dv}{\sqrt{(1-vv)}},$$

vnde ſequentem geminam tabellam valorum ipſius N deducimus:

$2n = 1$	$N = \frac{\pi}{2}$	$2n = 2$	$N = 1$
$= 3$	$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$	$= 4$	$N = \frac{2}{3}$
$= 5$	$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$	$= 6$	$N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$
$= 7$	$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{2}$	$= 8$	$N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$
$= 9$	$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi}{2}$	$= 10$	$N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}$.

At ſi $2n$ non fuerit numerus integer, numerus N aliter definiri nequit, niſi per quadraturas curuarum altiores.

14. Ita ergo pro medio quocunque rariſſimo, cuius reſiſtentia rationem quamcunque multiplicatam celeritatis ſequitur, Tautochronae tam pro deſcenſu quam pro aſcenſu ſatis expedite ſunt aſſignatae, quatenus ſcilicet prima approximatione ſumus contenti. Verum haec adeo multo latius patent et Tautochronas inuenire licebit, ſi reſiſtentia huiusmodi formula exprimatur

$$\lambda u^{2n} + \lambda' u^{2n'} + \lambda'' u^{2n''} \text{ etc.}$$

vbi coefficientes λ, λ', λ'' quam minimi reputentur, ſi enim exponentibus illis $2n$, $2n'$, $2n''$ etc. quaerantur numeri reſpondentes N, N′, N″ aequatio pro curua Tautochrona deſcenſus erit

$$ds = dx\sqrt{\tfrac{b}{x}} - \frac{\lambda a^{n-1} b x^{n-1} dx}{(2n+1)N} - \frac{\lambda' a^{n'-1} b x^{n'-1} dx}{(2n'+1)N'} - \frac{\lambda'' a^{n''-1} b x^{n''-1} dx}{(2n''+1)N''} \text{ etc.}$$

ſumtis

ſumtis autem litteris λ, λ', λ'' negatiuis, haec aequatio Tautochronam aſcenſus declarabit.

15. Circa illas autem Tautochronas pro reſiſtentiae hypotheſibus ſimplicibus notandum eſt, ex Tautochrona deſcenſus inueniri Tautochronam aſcenſus, ſi λ negatiue capiatur, vnde ſufficiet pro ſingulis hypotheſibus Tautochronas deſcenſus aſſignaſſe, quae dum motus hac aequatione exprimitur

$$2udu = -adx + \lambda u^{2n} ds$$

ſequenti modo ſe habebunt

Pro reſiſtentia	
λu^0 vbi $n = 0$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}}$
λu^2 vbi $n = 1$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b d x}{3}$
λu^4 vbi $n = 2$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} \lambda b a x dx$
λu^6 vbi $n = 3$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot 4} \lambda a b^2 x^2 dx$
λu^8 vbi $n = 4$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \lambda b a^3 x^3 dx$
	etc.

Pro reſiſtentia	
λu vbi $n = \frac{1}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{\lambda b dx}{\pi \sqrt{ax}}$
λu^3 vbi $n = \frac{3}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2 \lambda b dx \sqrt{ax}}{2 \cdot \pi}$
λu^5 vbi $n = \frac{5}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \frac{\lambda b a^{3:2} x^{3:2} dx}{\pi}$
λu^7 vbi $n = \frac{7}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 5} \frac{\lambda b a^{5:2} x^{5:2}}{\pi}$
λu^9 vbi $n = \frac{9}{2}$	$ds = dx\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{\lambda b a^{7:2} x^{7:2}}{\pi}$
	etc.

DILVCIDATIONES DE TAVTOCHRONISMO.

Auctore

L. EVLERO.

Poſtquam olim curuas Tautochronas in fluido, cuius reſiſtentia quadrato celeritatis proportionalis eſt, poſt plures irritos conatus elicuiſſem easque ſummus Geometra beatae memoriae *Iohannes Bernoulli* calculo ſuo quoque comprobaſſet, totum hoc argumentum in Mechanicae meae Volumine ſecundo fuſius ſum perſecutus et quoniam pro deſcenſu et aſcenſu Tautochronae reperiuntur diuerſae ideoque ad praxin ſunt inutiles, plurimum operae impendi, vt curuas duabus partibus ſimilibus conſtantes inueſtigarem, ſuper quibus non quidem deſcenſus vel aſcenſus ſeorſim forent iſochroni, ſed potius integrae oſcillationes aequalibus temporibus abſoluerentur, quod autem negotium ob ſummas calculi difficultates mihi non niſi pro fluidis rariſſimis ſucceſſit, ita vt curua, quam ibi ſum adeptus, maximo cum fructu loco cycloidis in praxi adhiberi poſſe videatur, tum vero etiam pro aliis reſiſtentiae hypotheſibus, vel cubo, vel biquadrato vel alii cuicunque poteſtati celeritatis proportionalibus fruſtra tautochronas anquiſiui, interim tamen pro caſibus, vbi hae reſiſtentiae fuerint

fuerint quam minimae, mihi licuit tautochronas tam pro deſcenſu, quam pro aſcenſu aſſignare, neque vero deinceps has inueſtigationes vlterius ſum proſecutus. Deinde autem longo poſt temporis interuallo inſignis Geometra Gallus Fontaine feliciſſimo ſucceſſu per methodum ingenioſiſſimam oſtendit, meas Tautochronas pro reſiſtentia quadrato celeritatis proportionali etiamnunc locum habere, ſi inſuper reſiſtentia ipſi celeritati proportionalis acceſſerit, qua inueſtigatione ardua iſta de Tautochronis quaeſtio plurimum eſt illuſtrata. Aliquot autem abhinc annis Viri Celeberrimi *d' Alembert et la Grange* hanc quaeſtionem denuo inſigni ſtudio ſunt aggreſſi, quaeſtionem autem ipſam ita inuerterunt, vt non pro certa quadam reſiſtentiae hypotheſi in Tautochronas inquirerent, ſed viciſſim eiusmodi reſiſtentiae leges inueſtigarent, pro quibus ipſis Tautochronas exhibere liceret, neque tamen ipſis licuit pro vlla hypotheſi ſimpliciori, qua reſiſtentia poteſtati cuipiam celeritatis eſſet proportionalis, praeter rationem ſimplicem et duplicatam celeritatum optatum ſcopum attingere. Interim tamen ſummo ardore eorum Analyſin ſum perſcrutatus et ingenioſiſſima artificia, quibus ſunt vſi, admiratus, calculis enim ſubtiliſſimis et maxime lubricis omnia ſunt referta, vt non niſi ſumma adhibita attentione perſpici queant; quae autem ſunt praeſtita, mihi quidem ſine tantis calculi tricis multo faciliori negotio expediri poſſe videntur, quam ob rem quae de hoc argumento ſum

 medi-

meditatus ob rei dignitatem hic breuiter ſum expoſiturus.

Tab. IV. Fig. 7. §. 1. Sit A M E curua, ſuper qua fiant ſiue deſcenſus ſiue aſcenſus; A P axis verticalis; A M arcus quicunque $= s$; eique abſciſſa reſpondens A P $= x$; ita, vt aequatio inter x et s definiat naturam curuae. Tum vero ſit celeritas corporis in M $= u$, et tempus, quo arcus A M abſoluitur, $= t$, ita, vt ſemper habeatur $dt = \frac{ds}{u}$. Iam ſi corpus a ſola grauitate vrgeretur; haberetur vtique $u\,du = -g\,dx$; denotante g quantitatem grauitatis. At ſi corpus inſuper patiatur reſiſtentiam quamcunque, quae ſit $=$ R, quam in genere ſpectemus, vt functionem quamcunque binarum variabilium u et x ſiue u et s, quandoquidem x ab s pendere concipitur; tum, vti conſtat, pro motu deſcenſus valebit haec aequatio

$$u\,du = -g\,dx + R\,ds;$$

pro motu autem aſcenſus haec:

$$u\,du = -g\,dx - R\,ds.$$

Quodſi ergo ipſa curua cum reſiſtentia detur, celeritatem u ex hac aequatione definiri oportebit

$$u\,du = -g\,dx \mp R\,ds$$

vbi ſignum ſuperius aſcenſum, inferius vero deſcenſum innuit. Inuenta autem celeritate tempus determinari debebit ex hac aequatione $dt = \frac{ds}{u}$.

§. 2. Sin autem viciſſim ipſum tempus t proponatur, functione quacunque binarum variabilium

u et s

u et s expreſſum; tum ipſam curuam vna cum reſiſtentia ſequenti modo inuenire licebit: differentiata ſcilicet forma pro tempore t propoſita prodeat

$$dt = M\,ds + N\,du,$$

et quia $dt = \frac{ds}{u}$ habebitur iſta aequatio

$$M\,ds + N\,du = \frac{ds}{u}$$

hincque

$$u\,du = \frac{ds\,(1 - M\,u)}{N},$$

quae forma cum hac

$$u\,du = -g\,dx \mp R\,ds$$

comparata praebet

$$-g\,dx \mp R\,ds = \frac{ds\,(1 - M\,u)}{N},$$

quae aequatio poſito $g\,dx = S\,ds$ denotante S functionem ipſius s abit in hanc

$$-S \mp R = \frac{1 - M\,u}{N};$$

euoluta enim formula $\frac{1 - M\,u}{N}$, pars ſolam variabilem s inuoluens aequetur ipſi $-S$, vnde deinceps natura curuae definietur; reliqua vero pars ambas variabiles u et s continens ipſi $\mp R$ aequalis ponatur; hincque ipſa reſiſtentia ſiue pro deſcenſu ſiue pro aſcenſu innoteſcet.

§. 3. His praemiſſis ipſum propoſitum adgrediamur; quo curua A M tautochronismi proprietate gaudere requiritur, vbi ante omnia perpendi oportet, cuiusmodi functio binarum variabilium u et s aſſumi debeat pro tempore t, vt tempus totius ſiue

 deſcen-

deſcenſus ſiue aſcenſus obtineat quantitatem conſtantem. Primum autem quia t indicat tempus, quo arcus indefinitus $AM = s$ percurritur; manifeſtum eſt, hanc functionem in nihilum abire debere, poſito arcu $s = 0$, qui eſt vnus terminus ſiue deſcenſus ſiue aſcenſus totius; alter autem terminus ibi exiſtit, vbi celeritas corporis u fit nulla; quare cum tempus inter hos terminos interceptum debeat eſſe conſtans, functio illa pro tempore aſſumenda poſito $u = 0$ in quantitatem conſtantem abire debet, quibus duabus conditionibus iunctis tempus t eiusmodi functione ipſarum u et s eſt exprimendum; quae facto $s = 0$ euaneſcat; facto autem $u = 0$ abeat in quantitatem conſtantem.

§ 4. Quo hoc clarius reddamus, ſumamus pro tempore t hanc formulam α Arc. tang. $\frac{Ns}{u}$, quae formula vtique euaneſcit ſumto $s = 0$; ſumto autem $u = 0$ prodit α Arc. tang. ∞, ſiue $\frac{\alpha\pi}{2}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Hinc autem fit

$$dt = \frac{\alpha . N . u\, ds - \alpha N s\, du}{u^2 + N^2 s^2}$$

vnde pro formula noſtra generali

$$dt = M\, ds + N\, du \text{ fit}$$

$$M = \frac{\alpha N u}{uu + NNss} \text{ et } N = -\frac{\alpha N s}{u^2 + N^2 s^2}$$

hincque denique

$$-S \mp R = -\frac{u^2 (1 - \alpha N) - N^2 s^2}{\alpha N s}$$

hic

hic pars a ſola variabili s pendens $-\frac{Ns}{\alpha}$ praebet $S = \frac{Ns}{\alpha}$. Altera vero pars dat

$$\mp R = -\frac{u^2(1-\alpha N)}{\alpha N s},$$

ita, vt reſiſtentia ſit directe vt quadratum celeritatis, inuerſe autem vt ipſe arcus s; at ſi capiatur $\alpha = \frac{1}{N}$, haec reſiſtentia penitus euaneſcit et curua prodit tautochrona in vacuo; cum enim ſit

$$g\,dx = S\,ds,$$

pro hoc caſu fit

$$g\,dx = N^2 s\,ds$$

et integrando

$$g\,x = \tfrac{1}{2} N^2 s^2,$$

quae vtique eſt aequatio pro cycloide.

§. 5. Quo autem hoc argumentum generalius pertractemus, poſtquam pro tempore t talis functio, qualem deſcripſimus, fuerit aſſumta; videamus, quemadmodum in formula differentiali

$$dt = M\,ds + N\,du$$

quantitates M et N futurae ſint comparatae. Hunc in finem cum ſit $M = (\frac{dt}{ds})$; ipſa autem functio t poſito $u = 0$ fiat conſtans; neceſſe eſt, vt formula $(\frac{dt}{ds})$ ſiue littera M fiat $= 0$ poſito $u = 0$. Deinde quia $N = (\frac{dt}{du})$; functio autem t, poſito $s = 0$, euaneſcat, etiam ipſa littera N facto $s = 0$ euaneſcere debebit, ſicque tautochroniſmus poſtulat, vt in formula

$$dt = M\,ds + N\,du$$

litte-

littera M euaneſcat, facto $u = 0$; littera autem N euaneſcat, facto $s = 0$ quibus duabus conditionibus ex ipſa rei natura haec tertia eſt adiungenda, vt ipſa formula $M\,ds + N\,du$ ſit verum differentiale, ſiue vt ſit

$$\left(\frac{dM}{du}\right) = \left(\frac{dN}{ds}\right).$$

§. 6. His autem conditionibus plene ſatisfit ſtatuendo

$$dt = \frac{u\,ds - s\,du}{Q},$$

denotante Q functionem quamcunque ambarum variabilium u et s; erit enim

$$M = \frac{u}{Q} \text{ et } N = \frac{-s}{Q},$$

dummodo Q neque habeat factorem s neque u. Quod autem haec formula verum ſit differentiale, facile oſtenditur ponendo $u = v\,s$; hinc enim quia Q eſt functio duarum dimenſionum ipſarum u et s, euadet $Q = s^2$ Funct. v; deinde vero numerator $u\,ds - s\,du$ abit in $-s^2\,dv$; ſicque tota fractio fiet $= \frac{-dv}{\text{Funct.}\,v}$ quod vtique eſt verum differentiale. His autem pro M et N valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra finalis erit

$$-S \mp R = \frac{u^2 - Q}{s},$$

cui pro indole functionis Q facile infinitis modis ſatisfieri licet.

§. 7. Vt irrationalia euitemus, pro Q ſumamus talem formam

$$Q = \alpha u^2 + \beta s u + \gamma s^2 + \frac{\delta . u^3}{s} + \frac{\epsilon . u^4}{s^2} \text{ etc.}$$

atque

atque hinc nanciſcimur

$$-S \mp R = \frac{(1+\alpha)u^2}{s} - \beta u - \gamma s - \frac{\delta u^3}{s^2} - \frac{\varepsilon u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

vnde pro natura curuae ſtatuemus $S = \gamma s$ ideoque $g\,d\,x = \gamma\,s\,d\,s$, ita, vt tautochrona iterum ſit cyclois, dummodo reſiſtentia fuerit

$$R = \frac{(1-\alpha)u^2}{s} - \beta u - \frac{\delta . u^3}{s^2} - \frac{\varepsilon . u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

qua expreſſione inuoluitur reſiſtentia ipſi celeritati u ſimpliciter proportionalis, cui adiungere licebit generatim functionem quamcunque vnius dimenſionis ipſarum u et s, cuiusmodi ſunt termini

$$\frac{(1-\alpha)u^2}{s};\ \frac{\delta u^3}{s^2};\ \frac{\varepsilon u^4}{s^3} \text{ etc.}$$

§. 8. Denotet q functionem ipſius s, quae euaneſcat poſito $s = 0$, ac facile perſpicitur, etiam hanc formam multo generaliorem

$$d\,t = \frac{u\,d\,q - q\,d\,u}{Q}$$

quaeſito ſatisfacere, ſi modo pro Q accipiatur functio duarum dimenſionum ipſarum u et q. Hinc autem erit

$$M = \frac{u\,d\,q}{Q\,d\,s} \quad \text{et} \quad N = \frac{-q}{Q}$$

atque inde reſultat iſta aequatio

$$-S \mp R = \frac{u^2\,d\,q - Q\,d\,s}{q\,d\,s};$$

cui aequationi infinitis modis ſatisfieri poteſt.

§. 9. Vnico autem modo hinc terminus a celeritate u immunis reſultare poteſt, ſumendo ſcilicet q^2 pro Q. Sit igitur $Q = \alpha q^2 + Q'$ ita, vt etiam

iam Q′ complectatur functiones duarum dimenſionum ipſarum u et q; quare cum nunc ſit

$$-S \mp R = -\alpha q - \frac{Q'}{q} + \frac{u^2 dq}{q ds}$$

ſtatuatur $S = \alpha q$, ita, vt pro curua tautochrona habeatur $g dx = \alpha q ds$; tum vero pro reſiſtentia obtinetur

$$\mp R = -\frac{Q'}{q} + \frac{u^2 dq}{q ds},$$

vbi pars $-\frac{Q'}{q}$ denotabit functionem quamcunque vnius tantum dimenſionis ipſarum u et q; ideoque tam fractiones, quam irrationalia euitando ſumi poterit

$$\frac{Q'}{q} = \beta u + \frac{\gamma u^2}{q} + \frac{\delta u^3}{q^2} + \frac{\varepsilon u^4}{q^3} + \frac{\zeta u^5}{q^4} \text{ etc.}$$

quibus inſuper adiungi poſſunt

$$\frac{\eta q^2}{u} + \frac{\vartheta q^3}{u^2} + \frac{\iota q^4}{u^3} \text{ etc.}$$

quin etiam tales ſimpliciter radicales

$$f\sqrt{qu} + \frac{gu\sqrt{u}}{\sqrt{q}} + \frac{hu^2\sqrt{u}}{q\sqrt{q}} \text{ etc.}$$

§. 10. Hic iam facile effici poteſt, vt in formula reſiſtentiae R occurrat terminus fu^2 quadrato ſcilicet celeritatis ſimpliciter proportionalis. Ex aequatione ſcilicet poſtrema fiat

$$\frac{u^2 dq}{q ds} - \frac{\gamma u^2}{q} = fu^2, \text{ ſiue } \frac{dq}{q} - \frac{\gamma ds}{q} = f ds;$$

vnde deducitur

$$ds = \frac{dq}{\gamma + fq} \text{ et integrando } s = \tfrac{1}{f} l.(\gamma + fq) + C$$

quae conſtans ita definiri debet, vt q ſimul cum s euaneſcat, ita, vt ſit

$$s = \tfrac{1}{f} l \frac{(\gamma + fq)}{\gamma} \text{ ſiue } e^{fs} = \frac{\gamma + fq}{\gamma} = 1 + \frac{fq}{\gamma};$$

ſicque

ſicque functio de nouo introducta q ita definitur, vt ſit

$$q = \frac{\gamma}{f}(e^{fs} - 1);$$

hunc igitur valorem pro q vbique ſubſtituendo proueniet tota reſiſtentia huic caſui conueniens

$$\mp R = \beta u + f u^2 + \frac{\delta . u^3}{q^2} + \frac{\varepsilon . u^4}{q^3} \text{ etc.}$$

quibus inſuper pro lubitu functiones quaecunque vnius dimenſionis adiungi poſſunt.

§. 11. Iſta inueſtigatio tam late patet, vt fere omnes reſiſtentiae hypotheſes, quas Viri Celeberrimi, Fontaine, *D'Alembert* et *la Grange*, per methodos maxime intricatas et calculos operoſiſſimos elicuerunt, in ea contineantur. Saltem non parum difficile foret, inde eiusmodi reſiſtentiae hypotheſin eruere, quam non facile ex noſtra ſolutione deriuare liceret; neque autem hinc vlla via nobis aperitur ad eiusmodi reſiſtentiam, quae vel cubo vel alii cuipiam altiori poteſtati celeritatis eſſet proportionalis.

§. 12. Hoc autem mirum videri non debet, cum formula, quam hic pro tempore aſſumſimus, neutiquam ſit generalis, cum potius caſum ſatis particularem complectatur; facile enim quotcunque alias formulas ad inſtitutum aeque adcommodatas excogitare licet; quomodo autem eiusmodi formae inveſtigari queant, quae ad certam reſiſtentiae hypotheſin deducant, minime adhuc patet, neque etiam vlla methodus id praeſtandi etiamnunc perſpicitur. Quo autem clarius pateat, infinitas ſolutiones in no-

 ſtra

ſtra euolutione non contentas facili negotio exhiberi poſſe, vnico exemplo declaraſſe ſufficiet. Sumatur ſcilicet tempus

$$t = \alpha \text{ Arc. tang } \frac{s + s u}{s + u};$$

quae formula vtique euaneſcit facto $s = 0$; facto autem $u = 0$ fit conſtans $= \alpha$. Arc. tang. 1; hinc autem oritur

$$d t = \alpha \frac{u(1+u) d s - s(1-s) d u}{2 s^2 + s u (1+s) + u^2 (1+s^2)}$$

ita, vt ſit

$$M = \frac{\alpha u (1+u)}{2 s^2 + 2 s u (1+u) + u^2 (1+s^2)}$$

et $N = \frac{\alpha s (s-1)}{2 s^2 + 2 s u (1+u) + u^2 (1+s^2)}$;

vnde conſequimur

$$- S \mp R = \frac{2 s^2 + 2 s u (1+u) + u^2 (1+s^2) - \alpha u^2 (1+u)}{\alpha s. (s-1)}$$

ex quo colligimus $S = - \frac{2 s}{\alpha (s-1)}$ ſicque

$$g d x = - \frac{2 s d s}{\alpha (s-1)} \text{ et } g x = - \frac{2 s}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} l. (s-1) + \text{Conſt.}$$

$$= - \frac{2 s}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} l. (1-s);$$

tum vero reſiſtentia prodit

$$\mp R = \frac{2 s u (1+u) + u^2 (1+s^2) - \alpha u^2 (1+u)}{\alpha s. (s-1)}$$

ex quo facile perſpicitur, ſi huiusmodi formulae vllum vſum habere poſſent, ſine vlla difficultate quotcunque alias ſimiles erui poſſe; fateor autem, parum fructus pro ſcopo noſtro hinc ſperari licere.

§. 13. Inter huiusmodi autem formas maxime eminet ea ipſa, qua iam ante ſumus vſi et quae nos deduxit ad reſiſtentiam iam ab aliis tractatam,

partim

partim ipſi celeritati, partim eius quadrato proportionalem; quin etiam hanc formam adhuc latius extendere licet; ſumta enim pro v functione quacunque ipſius celeritatis u, quae poſito $u = o$ euaneſcat, etiam haec forma pari ſucceſſu

$$dt = \frac{v\,dq - q\,dv}{Q}$$

vſurpari poterit, ſi modo Q denotet functionem duarum dimenſionum ipſarum q et v, tum enim ipſum tempus t aequabitur functioni nullius dimenſionis ipſarum q et v, ſiue functioni fractionis $\frac{q}{v}$. Hinc autem pro motu corporis habebitur iſta aequatio

$$\frac{v\,dq - q\,dv}{Q} = \frac{ds}{u}; \text{ ſiue}$$

$$u\,v\,dq - q\,u\,dv = Q\,ds,$$

quae ad formam generalem

$$u\,du = -S\,ds \mp R\,ds \text{ accommodata praebet}$$

$$u\,du = \frac{u\,v\,dq}{q}\cdot\frac{du}{dv} - \frac{Q\,ds}{q}\cdot\frac{du}{dv},$$

cuius expreſſionis portio ſolam s vel q inuoluens pro termino $-S\,ds$; reliqua vero pro termino $\mp R\,ds$ accipi debebit.

§. 14. Hinc autem nullas reſiſtentiae hypotheſes concinnas deriuare licebit, niſi pro v accipiatur poteſtas u^n; tum vero iſta formula latius non patet, quam ipſa ante vſitata

$$dt = \frac{u\,dq - q\,du}{Q};$$

quia enim ibi ſit t functio fractionis $\frac{q}{u^n}$, eadem ſpon-

te reducitur ad functionem fractionis $\frac{q^{\frac{1}{n}}}{u}$, ſicque nihil impedit, quominus loco $q^{\frac{1}{n}}$ ipſa littera q ſcribatur; quam ob cauſſam ipſa formula primum vſitata eo magis fit notatu digna; quocirca ſi loco v ipſam celeritatem u introducamus, aequatio pro tautochrona atque ipſo corporis motu erit

$$u\,d\,u = \frac{u^2\,d\,q}{q} - \frac{Q\,d\,s}{q},$$

vbi cum valor ipſius Q capi queat

$$= \alpha\, q^2 + \beta\, q\, u + \gamma\, u^2 + \frac{\delta\, u^3}{q} + \frac{\varepsilon\, u^4}{q^2} + \frac{\zeta\, u^5}{q^3} \text{ etc.}$$

haec aequatio induet iſtam formam

$$udu = -\alpha q ds - \beta u ds + u^2\left(\frac{dq}{q} - \frac{\gamma\, ds}{q}\right) - \frac{\delta\, u^3\, ds}{q^2} - \frac{\varepsilon\, u^4\, ds}{q^3} - \frac{\zeta\, u^5 ds}{q^4} \text{ etc.}$$

ita, vt nunc habeamus

$$S = \alpha q; \text{ et } \mp R = -\beta u + u^2\left(\frac{dq}{q\,ds} - \frac{\gamma}{q}\right) - \frac{\delta\, u^3}{q^2} - \frac{\varepsilon\, u^4}{q^3} - \frac{\zeta\, u^5}{q^4} \text{ etc.}$$

neque ergo pro altioribus ipſius u poteſtatibus terminus ab arcu s non pendens exhiberi poterit; pro quadrato autem u^2 factor $\frac{dq}{q\,ds} - \frac{\gamma}{q}$ vtique quantitas conſtans reddi poteſt, vti ſupra fecimus; tum vero etiam pro lubitu functioni ipſius s cuicunque aequalis ſtatui poteſt. Sumta enim hac functione $= \Sigma$, erit

$$\frac{dq}{q\,ds} - \frac{\gamma}{q} = \Sigma$$

vnde functio q ita definitur, vt ſit

$$q = \gamma \cdot e^{\int \Sigma ds} \int e^{-\int \Sigma ds} \cdot ds,$$

atque hinc quaeſtio reſolui poteſt, ſi medium in duplicata ratione celeritatis reſiſtens non fuerit vniforme

me ſed eius denſitas vtcunque a loco puncti M pendeat.

§. 15. Inprimis autem circa hanc formam notatu digna eſt haec inſignis proprietas, quod etiam ipſe corporis motus ſuper tautochrona generatim definiri poſſit, cum enim oriatur haec aequatio

$$\frac{u\,dq - q\,du}{Q} = \frac{ds}{u};$$

prius autem membrum ſit differentiale functionis ipſius $\frac{q}{u}$; perſpicuum eſt, ſi id per $\frac{u}{q}$ multiplicetur, etiam nunc fore integrabile, ita, vt tum habeatur

$$\frac{u}{q}.\ \frac{u\,dq - q\,du}{Q} = \frac{ds}{q}$$

cuius ergo vtrumque membrum eſt integrabile; quod etiam hac ſimplici ſubſtitutione facillime obtinetur, ponendo $u = qz$, tum enim functio Q abit in formam $q^2 z$, denotante z functionem quampiam ipſius z et quia

$$u\,dq - q\,du \text{ ſit } - q^2\,dz$$

his ſubſtitutis reſultat iſta aequatio

$$\frac{-z\,dz}{z} = \frac{ds}{q},$$

vnde functio quaedam ipſius z aequabitur integrali $\int \frac{ds}{q}$.

§. 16. Quicquid autem ſit, in hac inueſtigatione etiamnum parum praeſtitiſſe gloriari poſſumus; quoniam ab iis, qui hoc argumentum tractauere, eiusmodi inprimis reſiſtentiae hypotheſes deſiderari ſolent, quae purae cuidam celeritatis u functioni ſint proportionales. Huiusmodi autem caſus hactenus

nus euoluere non licet, niſi vbi reſiſtentia huic formulae $a + bu + c.u^2$ aſſumitur proportionalis, quae ſcilicet conſtet tribus partibus, prima prorſus conſtante a, altera ipſi celeritati u, tertia vero eius quadrato u^2 proportionali, qui caſus cum prae reliquis maxime attentionem noſtram mereatur, operae pretium erit eum maiore cura euoluiſſe, quandoquidem in Mechanica mea mihi tum temporis non licuit partem mediam ipſi celeritati proportionalem bu in calculum introducere.

Problema.

§. 17. Si reſiſtentia medii huic formulae $a + bu + cu^2$ fuerit proportionalis et corpus deorſum vrgeatur vi vniformi, determinare curuam tautochronam tam deſcenſus quam aſcenſus.

Solutio.

Manentibus denominationibus ante adhibitis pro motu deſcenſus habebimus hanc aequationem:

$$u\,du = -g\,dx + (a + bu + cu^2)\,ds,$$

in qua cum reſiſtentiae partem primam cum vi abſoluta commode coniungere liceat, ſtatuamus

$$g\,dx - a\,ds = p\,ds,$$

vbi p certa erit functio arcus s, mox definienda, ita, vt haec aequatio naturam curuae tautochronae ſit expreſſura. Tum igitur erit

$$u\,du = -p\,ds + (bu + cu^2)\,ds.$$

Iam

Iam introducatur functio quaepiam arcus s, quae ſit $= q$ et cum ipſo arcu s euaneſcat et ſtatuatur tempus, quo arcus $AM = s$ percurritur;

$$t = f \text{ Arc. tang. } \frac{\alpha q}{\beta q + \gamma u}$$

quae expreſſio poſito $q = 0$ ideoque etiam $s = 0$ in nihilum abit; at pro toto tempore deſcenſus, vbi $u = 0$, prodit

$$t = f \text{ Arc. tang. } \frac{\alpha}{\beta}$$

adeoque quantitas conſtans. Hinc autem differentiando eruimus

$$dt = \frac{\alpha \gamma f (u\, dq - q\, du)}{(\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2}$$

quod differentiale cum aequari debeat ipſi $\frac{ds}{u}$, habebimus

$$\alpha \gamma f (u^2 dq - q u du) = ds [(\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2].$$

Hic igitur ex aequatione aſſumta ſubſtituamus

$$u\, du = - p\, ds + (b u + c u^2)\, ds,$$

ac prodibit

$$\alpha \gamma f (u^2 dq + p q ds - q (b u + c u^2) ds)$$
$$= ds ((\alpha^2 + \beta^2) q^2 + 2 \beta \gamma q u + \gamma^2 u^2)$$

vbi triplicis generis termini occurrunt, ſcilicet ab u liberi, tum vero ſolam u ac denique eius quadratum u^2 inuoluentes, quos ſeorſim ad nihilum redigi oportet; vnde tres ſequentes aequationes emergunt

I. $\alpha \gamma f . p = (\alpha^2 + \beta^2) q$

II. $- \alpha \gamma f . b = 2 \beta \gamma$

III. $\alpha \gamma f (u^2 dq - c q u^2 ds) = \gamma^2 u^2 ds$

 quarum

quarum prima ſtatim praebet

$$p = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) q}{\alpha \gamma f}$$

ſecunda vero

$$f = -\frac{2\beta}{\alpha b}$$

tertia denique dat

$$ds = \frac{\alpha f d q}{\gamma + \alpha f c q}$$

et integrando

$$c s = \log. \frac{(\alpha f c q + \gamma)}{\gamma},$$

integratione ita moderata, vt poſito $q = 0$ fiat quoque $s = 0$. Hinc ad numeros progrediendo erit

$$e^{cs} = 1 + \frac{\alpha f c}{\gamma} q;$$

vnde colligitur

$$q = \frac{\gamma}{\alpha f c}(e^{cs} - 1);$$

atque hinc

$$p = \frac{b^2 (\alpha^2 + \beta^2)(e^{cs} - 1)}{4 \beta^2 c}.$$

Quo nunc has formulas commodiores reddamus, quoniam numerorum α, β, γ tantum ratio in computum venit, faciamus $\beta = b$, eritque

$$\alpha f = -2 \text{ atque } p = \frac{(\alpha^2 + b^2)}{4c}(e^{cs} - 1)$$

et $q = -\frac{\gamma}{2c}(e^{cs} - 1)$. Sit nunc $p = \frac{k}{c}(e^{cs} - 1)$ eritque $k = \frac{\alpha^2 + b^2}{4}$, atque $\alpha = \surd(4k - b^2)$.

Hinc igitur aequatio pro curua tautochrona deſcenſus erit

$$g\,dx - a\,ds = \frac{k}{c}(e^{cs} - 1)\,ds$$

aequa-

aequatio vero motum determinans

$$u\,du = -\tfrac{k}{c}(e^{cs}-1)\,ds + (bu + cu^2)\,ds$$

hincque tempus per arcum A M $= s$ oritur

$$t = \frac{-2}{\sqrt{(4k-b^2)}} \text{ Arc. tang. } \frac{(e^{cs}-1)\sqrt{(4k-b^2)}}{b(e^{cs}-1)-2cu}$$

ideoque tempus totius deſcenſus

$$t = \frac{-2}{\sqrt{(4k-b^2)}} \text{ Arc. tang. } \frac{\sqrt{(4k-b^2)}}{b}$$

quod vtique eſt conſtans. Quodſi iam haec curua vltra A continuetur, quod fit ſumendo s negatiue, ea vltro praebet tautochronam aſcenſus, quandoquidem ſumto s et ds negatiue aequatio pro motu erit

$$u\,du = -g\,dx - (a + bu + cu^2)\,ds,$$

quae vtique motum aſcenſus definit.

§ 18. Dubium hic occurrere poſſet, quod pro tempore t expreſſio negatiua eſt inuenta: ſed tenendum eſt, formam irrationalem $\sqrt{(4k-b^2)}$ negatiue accipi poſſe, ita, vt reuera habeatur

$$t = \frac{2}{\sqrt{(4k-b^2)}} \text{ Arc. tang. } \frac{-\sqrt{(4k-b^2)}}{b}$$

notum autem eſt, arcum tangenti negatiuae reſpondentem quadrante eſſe maiorem. Quod autem ad ipſum motum ſuper hac curua attinet, aequatio noſtra ad ſeparabilitatem perducetur, ponendo

$$u = (e^{cs}-1)z$$

vnde tota aequatio per $e^{cs}-1$ diuiſa reperitur

$$(e^{cs}-1)z\,dz = -\tfrac{k}{c}ds + bz\,ds - cz^2\,ds$$

quae ſponte dat

$$\frac{c\,c\,dz}{b\,c\,z - c^2 z^2 - k} = \frac{ds}{e^{cs} - 1}$$

cuius poſtremi membri integrale eſt $\frac{1}{c}\, l(1 - e^{-cs})$ prioris autem membri integrale et logarithmos et quadraturam circuli inuoluit.

§. 19. Alii adhuc dubio hic neceſſe videtur occurri; ſcilicet cum tempus definiatur arcu circuli, cuius tangens praeſcribitur, eidem autem tangenti innumerabiles arcus conueniant, videri poſſet, hanc formulam ſimul omnes oſcillationes ſuper hac curua in ſe complecti; vnde quia hi arcus in progreſſione arithmetica progrediuntur, ſequeretur omnes plane oſcillationes inter ſe fore aequediurnas, quod tamen ſecus euenire nouimus. Haec quidem concluſio locum eſſet habitura, ſi motus tam aſcenſus, quam deſcenſus ſuper eadem curua eadem aequatione exprimeretur; at quia hoc non vſu venit, mirum non eſt, quod formula pro tempore data vnicam tantum oſcillationem contineat, quae ſcilicet a dextra ad ſiniſtram progreditur, motus vero a ſiniſtra ad dextram alia diuerſa aequatione determinatur ſicque illa concluſio nullo modo hic admitti poteſt.

DE

DE CHORDIS VIBRANTIBVS DISQVISITIO VLTERIOR.

Auctore

L. EVLERO.

Etſi in huiusmodi quaeſtionibus analyticis vix vllus locus controuerſiis relinqui videtur; tamen, quia determinatio omnium motuum, quos chorda inter vibrandum recipere poteſt, nouum plane calculi genus requirit, cui Geometrae parum adhuc ſunt aſſueti, mirum non eſt, quod ſolutio completa, quam iam olim ex his principiis deductam dederam, plerisque non parum ſuſpecta videatur. Quam ob rem hic operam dabo, vt omnia momenta, quibus haec ſolutio innititur, dilucide exponam atque ab omnibus dubiis et obiectionibus vindicem, et quoniam iſta dubia plerumque circa ipſam methodum, qua ſum vſus, moueri ſolent, ſufficiet caſum ſimpliciſſimum, quo chorda per totam longitudinem eiusdem craſſitiei ſtatuitur, omni ſtudio euoluiſſe. Praeterea vero omnes vibrationes tanquam infinite paruas ſpectabo, quae hypotheſis ab omnibus, qui hoc argumentum tractarunt, eſt aſſumta.

§. 1. Primum ergo craſſitiem et maſſam chordae, cuius motum hic ſum inueſtigaturus, ita ad calculum reuocabo, vt portionis iſtius chordae, cu-

ius longitudo $=k$, maſſam ſeu pondus ſtatuam $=K$; neque enim hic ipſam materiam, ex qua chorda eſt confecta, conſiderare opus eſt, dummodo chorda fuerit perfecte flexilis, quandoquidem totus motus tantum ab eius longitudine et maſſa, praecipue autem a vi tendente pendet; quod quidem nulli dubio eſt ſubiectum.

§. 2. Sit igitur chorda in punctis A et B fixa, cuius longitudinem ponamus $AB=a$; cuius ergo maſſa ſeu pondus erit $=\frac{Ka}{k}$; tum vero ſit tenſa vi quacunque, quam ponderi $=\pi$ aequalem ſtatuamus; id quod etiam ſequenti modo menti repraeſentare licet, quod chorda vtrinque ſecundum ipſius directionem trahatur a viribus aequalibus $Aa=Bb=\pi$;
Tab. V. Fig. 1. tum vero vt inter vibrandum ipſi termini A et B immoti maneant, neceſſe eſt, vt chorda in punctis A et B inſuper certis viribus $A\alpha$ et $B\beta$ ad priores normalibus vrgeatur, quae quidem vires per ſe non dantur, ſed quouis momento ita comparatae eſſe debent, vt ambo chordae termini A et B in ſuo loco retineantur; perſpicuum autem eſt, quamdiu chorda ſitum naturalem in directum extenſum AB teneat, has vires fore nullas; dum autem verbi gratia ſurſum incuruatur in ſitum AyB, euidens eſt, vires illas $A\alpha$ et $B\beta$ deorſum tendere debere; neque vero opus eſſe, has vires noſſe, ſed deinceps per ipſam ſolutionem pro quouis chordae ſtatu facile determinabuntur. Hac ratione clariorem ideam conſequimur earum virium, quibus chorda in punctis A et B fixa retinetur.

§. 3.

§. 3. Ponamus iam tempore quocunque elapſo $= t$, quod in minutis ſecundis dari ſumimus; chordam noſtram incuruatam eſſe in figuram AyB, pro qua vocemus coordinatas A X $= x$; et X Y $= y$; ita, vt ſit B X $= a - x$; et quoniam omnes vibrationes pro infinite paruis habentur, omnes adplicatae X Y $= y$ erunt quam minimae; vnde ſtatim duo inſignia calculi ſubſidia adipiſcimur: 1°) quod chordae portio A Y ipſi abſciſſae A X $= x$ aequalis cenſeri poteſt; cuius propterea pondus erit $= \frac{Kx}{k}$ 2°) quod punctum chordae Y inter vibrandum alium motum recipere nequit, niſi qui fiat ſecundum ipſam directionem adplicatae Y X, dum ſcilicet ad ſitum naturalem A B accedit; ſin autem inde recedit, directio motus erit contraria ſecundum Y v. His conſtitutis euidens eſt, angulos A Y X vbique fore tantum non rectos, ſeu quod eodem redit, tangentem in puncto Y tantum non parallelam axi A B. Quanquam autem haec hypotheſis ſtatim, ac vibrationes non amplius ſunt quaſi infinite paruae, a veritate aberrare debet; tamen contra illam ab aduerſariis nullum dubium moueri ſolet.

§. 4. Cum igitur ad quoduis tempus t figuram chordae AyB determinari oporteat; euidens eſt, adplicatam y tanquam functionem binarum variabilium, temporis ſcilicet t et abſciſſae x, ſpectari debere, ex quo adplicata duplicis differentiationis eſt capax; prouti ſcilicet vel ſolum tempus t vel ſola abſciſſa x variabilis reputatur. Sumta ſcilicet abſciſſa x conſtante, illa functio indicabit quanta ad quod-

vis

vis tempus t futura ſit puncti Y diſtantia ab axe A B, et poſt quantum tempus hoc punctum Y in locum priſtinum reuertatur; vnde tempora vibrationum diiudicare licebit; ſumto autem tempore t conſtante eadem functio pro quauis abſciſſa A X $= x$ praebebit quantitatem adplicatae X Y $= y$, ſicque indolem curuae A y B ad datum tempus declarabit.

§. 5. Sumamus autem praeſenti tempore punctum chordae Y ab axe recedere atque eius celeritas formula $(\frac{dy}{dt})$ exprimetur, cuius differentiale denuo per dt diuiſum dabit ipſam accelerationem $= (\frac{ddy}{dt^2})$; quae vt cum grauitate naturali per vnitatem expreſſa comparari poſſit, diuidi debet per $2b$, denotante b altitudinem, ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur; ita, vt haec acceleratio futura ſit $= \frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$; cui ergo aequalis eſſe debet vis, qua hoc cordae elementum verſus Y v vrgetur, diuiſa per ponduſculum huius elementi: quare cum hoc ponduſculum ſit $\frac{K dx}{k}$; elementum chordae Y $y = dx$ in directione Y v ſollicitari debet vi $= \frac{K dx}{2bk} \cdot (\frac{ddy}{dt^2})$, tanta ſcilicet vi in ſingulis chordae elementis opus eſt, vt motus talis prodeat, qualem formulae analyticae complectuntur. Aſſumimus autem noſtris formulis verum chordae motum definiri, ſicque neceſſe eſt, vt ſingula chordae elementa in directione Y v ſollicitentur.

§. 6. Cum autem tales vires reuera non adſint; neceſſe eſt, vt hae vires quaſi fictae illis viribus,

bus, quibus chorda reuera ſollicitatur, aequiualeant, ſicque quaeſtio huc eſt perducta, quomodo illae vires inuentae, quas elementares vocabimus, quoniam ſingulis elementis adplicatae concipiuntur, comparatae eſſe debeant, vt viribus, quibus chorda actu ſollicitatur, perfecte aequiualeant; ſiue ſi ſingulis chordae elementis eaedem vires in directione contraria adplicatae concipiantur, neceſſe eſt, vt hae vires cum illis, quibus chorda actu ſollicitatur, in aequilibrio conſiſtant; ſicque noſtra quaeſtio ad inveſtigationem ſtatus aequilibrii eſt perducta.

§. 7. Adplicemus igitur noſtras vires elementares modo contrario, ita, vt nunc elementum chordae Y ſollicitetur in directione Y U Tab. V. Fig. 2.

$$\text{vi} = \frac{K\,dx}{2\,b\,k} \cdot \left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right)$$

et quia hae vires in aequilibrio conſiſtere debent cum illis, quae chordam actu ſollicitant et quae, vti vidimus, ſunt 1°. vires tendentes $Aa = Bb = \pi$ deinde vero vires illae incognitae $A\alpha$ et $B\beta$, quas ponamus $A\alpha = F$ et $B\beta = G$ quae, certae erunt functiones temporis t, vti deinceps videbimus; ante omnia neceſſe eſt, vt omnium virium momenta, quae in punctum Y agunt, vtrinque ſe deſtruant, propterea quod chorda perfecte flexilis aſſumitur. Inueſtigemus ergo momenta omnium noſtrarum virium, quae a parte anteriore ſeu ſiniſtra in punctum Y agunt, vt ea deinceps ad nihilum redigamus; tum enim ex altera parte dextrorſum momenta

 ſpon-

ſponte quoque euaneſcent, quia omnes vires ſumtae ſimul in aequilibrio conſiſtunt.

§. 8. Ad partem ergo ſiniſtram primum agit vis tendens $A a = \pi$, cuius momentum in punctum Y eſt πy in ſenſum X A, alterius autem vis $A \alpha = F$ momentum in ſenſum contrarium agens erit $F x$ atque in eundem ſenſum etiam agent omnes illae vires elementares verſus axem vrgentes. Ad harum igitur momentum inueſtigandum conſideremus punctum Y tanquam fixum et ſpectemus punctum quodcunque y tanquam variabile a termino A vsque ad Y ſucceſſiue promouendum, pro quo puncto ſint coordinatae

$$A x = X, \text{ et } x y = Y$$

et vis elementaris ſecundum $y x$ vrgens

$$= \frac{K d X}{2 b k} \cdot \frac{d d Y}{d t^2},$$

cuius momentum in punctum Y prodit multiplicando per interuallum

$$x X = x - X,$$

ita, vt hoc momentum ſit

$$\frac{(x - X) K d X}{2 b k} \cdot \frac{d d Y}{d t^2},$$

cuius integrale ob x conſtans erit

$$= \frac{K x}{2 b k} \int \frac{d X d d Y}{d t^2} - \frac{K}{2 b k} \int \frac{X d X d d Y}{d t^2}.$$

et exprimit momentum virium elementarium ad arcum $A y$ adplicatarum, ſiquidem haec integralia ita ſunt capienda, vt euaneſcant, ſumto $X = 0$. Promoueamus nunc punctum y vsque in Y atque momen-

momentum virium elementarium per totum arcum A y adplicatarum erit

$$\frac{K}{2bk}\left(x\int.\frac{dx.ddy}{dt^2}-\int\frac{xdx.ddy}{dt^2}\right)$$

quod reducitur ſponte ad hanc expreſſionem

$$\frac{K}{2bk}\int.dx\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quae gemina integratio ita inſtitui debet, vt ſumto $x=0$ vtraque euaneſcat.

§. 9. His igitur momentis collectis, quia eorum ſumma ad nihilum redigi debet, conſequimur ſequentem aequationem:

$$\pi y=Fx+\frac{K}{2bk}\int.dx.\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quam vt a ſignis ſummatoriis liberemus, quae abſciſſam x tanquam variabilem inuoluunt, differentiemus poſita ſola x variabili et per dx diuidendo obtinemus

$$\pi\left(\frac{dy}{dx}\right)=F+\frac{K}{2bk}\int\frac{dx.ddy}{dt^2}$$

quae denuo ſimili modo differentiata ſuppeditat hanc aequationem ſatis concinnam

$$\pi.\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\frac{K}{2bk}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

Poſito ergo breuitatis gratia

$$\frac{2bk.\pi}{K}=c^2$$

habebimus tandem iſtam elegantem aequationem

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=c^2.\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae aequatio totum motum, cuius chorda eſt capax, in ſe complectitur, ita, vt reſolutio noſtrae quaeſtionis ab integratione iſtius aequationis differen-

tialis ſecundi gradus pendeat, et quae a conſuetis aequationibus huius ordinis hoc potiſſimum diſcrepat, quod hic functio binarum variabilium t et x quaeritur atque ob hanc ipſam circumſtantiam iſta quaeſtio ad nouam illam calculi integralis partem eſt referenda, quae ad functiones duarum pluriumue variabilium eſt accommodata.

§. 10. Hic autem ſtatim commodiſſime vſu venit, vt iſtam aequationem perfecte integrare liceat, dum eius integrale completum reperitur

$$y = \Phi.(ct + x) + \Psi.(ct - x)$$

cuius veritas tentanti mox facile patebit; ſi enim huiusmodi functiones more iam recepto differentiemus; habebimus

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c.\Phi'(ct + x) + c\Psi'.(ct - x)$$

et $$\frac{ddy}{dt^2} = c^2.\Phi''(ct + x) + c^2.\Psi''(ct - x)$$

ſimilique modo, ſumendo ſolam x variabilem, erit

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Phi'.(ct + x) - \Psi'.(ct - x)$$

et $$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Phi''.(ct + x) + \Psi''.(ct - x)$$

vnde manifeſto fit

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

Hic iam probe notandum eſt, characteribus Φ et Ψ functiones quascunque denotari ſiue regulares ſiue vtcunque irregulares: quo ipſo haec analyſeos ſpecies ab ordinaria plurimum diſcrepat, quod hic adeo functiones vtcunque irregulares et nulla continuitatis lege adſtrictae ingrediantur; id quod in conſueta

Ana-

Analyſi nusquam vſu venire ſolet; quae quo clarius ob oculos ponantur, quoniam functiones per lineas curuas indicare Geometrae aſſueuerunt, formula $\Phi(ct+x)$ denotet adplicatam curuae cuiuscunque abſciſſae $ct+x$ reſpondentem; ſimilique modo formula $\psi(ct-x)$ denotabit adplicatam alius curuae cuiuscunque abſciſſae $ct-x$ reſpondentem atque neutiquam opus eſt, vt hae duae lineae curuae certa quadam aequatione analytica exprimi queant, verum etiam curuae ex portionibus variis diuerſarum curvarum vtcunque conflatae atque adeo curuae libero manus ductu vtcunque formatae hic locum inueniunt; dummodo omnes partes inter ſe cohaereant et nusquam hiatu abrumpantur. Nihil ergo impedit, quominus hae curuae ex pluribus lineis rectis inter ſe iunctis vel etiam arcubus circularibus aliarumue curuarum permixtis componantur.

§. 11. Ob hanc ipſam autem circumſtantiam iſta mea ſolutio Illuſtri *D'Alemberto* aliisque Geometris maxime ſuſpecta videtur, qui in hoc negotio alias lineas curuas admittere non vult, niſi quae certis aequationibus analyticis exprimantur, quaeque continuitatis lege ſtricto ſenſu contineantur. Inprimis autem hinc portiones diuerſarum curuarum, quae in iuncturis angulis promineant, excludit, dum huiusmodi anguli naturae aequationis differentio-differentialis penitus aduerſari ipſi videntur; ſaepius equidem reſpondi, hic tales angulos, quales pertimeſcit, nullo modo locum habere poſſe, quia hic tantum vibrationes infinite paruae ſpectantur, vbi,

vti iam notauimus, omnes tangentes tantum non axi debent eſſe parallelae, verum tamen hoc Viro Illuſtri neutiquam ſufficere eſt viſum atque etiam inclinationes adeo infinite paruas reformidat. Hanc autem litem equidem prorſus dirimere ſpero, ſi oſtendero, angulos adeo maxime prominentes in curvis illis functiones Φ et ψ repraeſentantibus negotium plane non turbare, id quod hoc ſolo exemplo probaſſe ſufficiet. Functio ſcilicet Φ eiusmodi linea curua regulari repraeſentetur, cuius abſciſſae cuicunque u reſpondeat adplicata

$$\Phi u = \sqrt[3]{(a-x)^2 a};$$

cuius lineae forma ita erit comparata; eſt ſcilicet notiſſima parabola cubicalis Neiliana, quae adeo in
Tab. V. Fig. 3. puncto C cuſpidem infinite acutam continet; interim tamen haec cuſpis neutiquam impedit, quominus iſta functio aequationi noſtrae ſatisfaciat; ſumta enim abſciſſa $u = ct + x$ vt habeamus ſaltem pro functione priore

$$y = \sqrt[3]{a(a-ct-x)^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-2c.\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{(a-ct-x)}}$$

et $$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{-2c^2\sqrt[3]{a}}{9.\sqrt[3]{(a-ct-x)^4}}$$

ſimilique modo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{3.\sqrt[3]{(a-ct-x)}}$$

et

et $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = \frac{-2\,\sqrt[3]{a}}{9.\,\sqrt[3]{(a-c\,t-x)^4}}$

quibus formulis aequationi

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = c^2.\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

perfecte ſatisfit; nequidem excluſo caſu $a = c\,t + x$, vbi cuſpis occurrit, ex quo ſine dubio recte concludere licet, ſi cuſpis adeo negotium non turbat, multo minus anguloſas prominentias easque adeo infinite paruas eſſe pertimeſcendas.

§. 12. His praenotatis integrale completum noſtrae aequationis ad ipſum caſum propoſitum chordae vibrantis adcommodemus, vbi duabus conditionibus erit ſatisfaciendum. Primum ſcilicet vt in A, vbi $x = 0$, adplicata y ſemper euaneſcat pro omni tempore t; deinde vt idem eueniat in altero termino B, vbi $x = a$. Prima autem conditio poſito $x = 0$ praebet

$$y = \Phi\,c\,t + \psi\,c\,t$$

qui valor cum debeat eſſe $= 0$, neceſſe eſt, vt ſit

$$\psi\,c\,t = -\Phi.\,c\,t$$

hoc eſt, curua functione ψ repraeſentanda ita eſſe debet comparata, vt adplicata eidem abſciſſae reſpondens negatiua ſit illius, quae in curua Φ eidem abſciſſae reſpondet, vnde ſequitur, fore generatim

$$\psi.\,(c\,t - x) = -\Phi.\,(c\,t - x);$$

vnde iſta conditio nobis ſuppeditat hanc aequationem:

$$y = \Phi.\,(c\,t + x) - \Phi\,(c\,t - x)$$

ſic

ſic enim facto $x = 0$, manifeſto prodit $y = 0$. Pro altera conditione faciamus nunc $x = a$; iterumque fieri debet

$$\Phi(ct + a) - \Phi(ct - a) = 0 \text{ ſiue}$$

$$\Phi(ct + a) = \Phi(ct - a);$$

vnde ſi faciamus

$$ct - a = u; \text{ erit } ct + a = u + 2a,$$

ita vt in genere eſſe debeat

$$\Phi.(u + 2a) = \Phi u.$$

Curua ſcilicet hac functione Φ repraeſentanda ita debet eſſe comparata, vt quaecunque adplicata reſpondeat abſciſſae u, eadem quoque reſpondeat omnibus abſciſſis

$$u + 2a;\ u + 4a;\ u + 6a; \text{ etc.}$$

itidemque retrogrediendo his abſciſſis

$$u - 2a;\ u - 4a;\ u - 6a \text{ etc.}$$

ex quo intelligitur, quemadmodum hanc curuam in
Tab. V. Fig. 4 infinitum continuari oporteat. Talem ergo curuam ſequenti modo conſtrui conueniet; ſuper portione axis $AC = 2a$ conſtruatur pro lubitu linea curua quaecunque FG, ita tamen, vt adplicata CG aequalis fiat adplicatae AF, tum vero eadem haec curua FG vltra C dextrorſum deſcribatur, ſimilique modo etiam ſiniſtrorſum ab F ita, vt ſingulis axis portionibus $= 2a$ ſimiles et aequales portiones curvae FG ſuperſtruantur; hacque ſola circumſtantia obſeruata deſcriptio curuae FG penitus noſtro arbitrio

trio relinquitur atque ſiue ex pluribus lineis rectis ſiue ex arcubus quarumcunque curuarum ſiue libero manus tractu vtcunque delineari poterit, dummodo vtrinque prouti modo innuimus continuetur.

§. 13. Tali autem linea curua, quam ſcalam constructionis adpellare liceat, erecta, ſemper certus quidam motus vibratorius chordae ſequenti modo facillime definietur, dum ſcilicet figura chordae, quam ad quoduis tempus t eſt habitura, aſſignabitur. Cum enim c lineam quandam rectam, t vero numerum abſolutum denotet, ſumatur ab axis puncto A interuallum $AT = ct$, et ab hoc puncto T vtrinque abſcindantur interualla $TS = Ts = x$ et adplicatae SZ et sz; quo facto pro figura chordae noſtrae abſciſſae $AX = x$ reſpondebit adplicata $XY = SZ - sz$ quia in ſcala noſtra eſt $AS = ct + x$ et $As = ct - x$; hic autem per ſe clarum eſt, pro ipſo termino chordae A, vbi $x = 0$, ideoque et $TS = 0$; $ts = 0$, adplicatam fore $= TV - TV = 0$. Pro altero autem termino B, vbi $x = a$, ideoque etiam capi oportet $TS = ts = a$, adplicatae SZ et sz vtique erunt aequales, quandoquidem tum interuallorum AS et As diſtantia eſt $2a$, conſequenter earum differentia $= 0$, pro chorda adplicatam in termino B praebens; quare cum hoc modo ad quoduis tempus figura chordae facillime aſſignetur, totus chordae motus perfecte innoteſcit.

§. 14. Quoniam in ſcala abſciſſis interuallo $= 2a$ continuo creſcentibus aequales adplicatae re-

ſpondent; manifeſtum eſt, pro alio tempore t' ſi fuerit $ct' = ct + 2a$, chordam eandem figuram eſſe recuperaturam, quam tempore t habuerat; interea vero chorda duas vibrationes abſoluiſſe cenſetur ita, vt $t' - t$ exhibeat tempus duarum vibrationum; quia autem $t' - t = \frac{2a}{c}$ tempus vnius vibrationis erit $= \frac{a}{c}$ idque iam in minutis ſecundis expreſſum, atque hic commodiſſime vſu venit, vt tempus cuiusque vibrationis neutiquam pendeat ab indole figurarum, quas chorda inter vibrandum induit, ſed ſemper ſimpliciſſima hac formula $\frac{a}{c}$ exprimatur. Cum vero ſupra poſuiſſemus $c^2 = \frac{2bk.\pi}{K}$; nunc patet tempus vnius vibrationis fore $\frac{a.\sqrt{K}}{\sqrt{2bk.\pi}}$ ſicque pro chordis eiusdem craſſitiei, pro quibus ſcilicet $\frac{K}{k}$ eundem obtinet valorem, tempora vibrationum erunt vti $\frac{a}{\sqrt{\pi}}$; hoc eſt, inter ſe tenent rationem compoſitam ex ſimplici longitudinum et reciproca ſubduplicata virium tendentium, quae quidem ratio iam dudum eſt cognita et per experimenta confirmata. Praeterea quoniam ſoni a chordis editi ex numero vibrationum dato tempore abſolutarum aeſtimari ſolent; hic notaſſe iuuabit, numerum vibrationum a noſtra chorda ſingulis minutis ſecundis editarum fore $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2bk.\pi}}{a\sqrt{K}}$ ſicque ipſi ſoni tenent rationem compoſitam ex directa ſubduplicata tenſionum π et reciproca ſimplici longitudinum a.

§. 15. Si in ſuperioribus formulis ponamus tempus $t = 0$; reperiemus ipſam figuram, quam chorda

chorda initio habuerit, pro qua igitur abſciſſae x reſpondet adplicata

$$y = \Phi.\, x - \Phi.\, -x$$

vnde viciſſim ex figura chordae initiali iam quodammodo natura ſcalae conſtructionis colligi poterit; neque tamen penitus inde determinatur, cuius ratio per ſe eſt manifeſta, quoniam in ſtatu initiali praeter figuram etiam motus, qui chordae potuit eſſe impreſſus, ſpectari debet, ita, vt ſtatus initialis duabus rebus contineatur; primo ſcilicet figura chordae inducta, deinde etiam motu, qui ipſi fuerit impreſſus. Quo igitur huius circumſtantiae rationem teneamus, ex formulis generalibus celeritatem chordae puncti Y deriuemus, quae erit

$$\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right) = c\ \Phi'(c\,t + x) - c\,\Phi'(c\,t - x)$$

qua exhibetur celeritas puncti y ab axe recedentis atque ipſa celeritas per ſpatium vno minuto percurrendum indicatur.

§. 16. Vt igitur vniuerſam noſtram inueſtigationem ad ſtatum chordae initialem atque cognitum adcommodemus, referat A Y B figuram chordae initialem et ponamus adplicatam abſciſſae x reſpondentem X Y $= \Gamma.\, x$; deinde pro motu initiali ſuper eodem axe A B $= a$ exſtruatur ſcala celeritatum A Z B, cuius quaelibet adplicata X Z exhibeat celeritatem, qua punctum chordae ab axe recedit, quae cum etiam ſit certa functio abſciſſae A X $= x$, repraeſentetur functione $\Delta'\, x$; nunc igitur neceſſe eſt, vt pro noſtris formulis generalibus fiat Tab. V. Fig. 5.

 $\Phi\, x$

$$\Phi x - \Phi. - x = \Gamma. x$$

ſimilique modo pro celeritate, facto ibi $t = 0$

$$c\,\Phi' x - c\,\Phi'. - x = \Delta' x$$

quam poſteriorem aequationem per dx multiplicando et integrando reducimus ad hanc formam:

$$c\,\Phi. x + c\,\Phi. - x = \Delta. x + f$$

vbi Δx exprimit aream curuae A X Z, ſicque erit

$$\Phi x + \Phi. - x = \tfrac{\Delta x}{c} + f = \text{areae } \tfrac{AXZ}{c}.$$

Nunc igitur ex his duabus aequationibus primum elicimus

$$2\,\Phi x = \Gamma x + \tfrac{\Delta x}{c} + f$$

et $2\,\Phi. - x = \tfrac{\Delta x}{c} - \Gamma x + f.$

Hunc in finem in fig. 5 ſuper axe A B inſuper deſcribatur curua M O N ſumendo primam adplicatam A M arbitrariae longitudinis $= f$ et pro abſciſſa x fiat

$$XO = f + \text{area } \tfrac{AXZ}{c}.$$

§. 17. Iam ex iſta figura 5. ſcala conſtructionis facile ſequenti modo exſtruetur: cum enim ſit

$$\Phi x = \tfrac{1}{2} XO + \tfrac{1}{2} XY \text{ et } \Phi - x = \tfrac{1}{2} XO - \tfrac{1}{2} XY;$$

primo ſumto $x = 0$, erit in A adplicata

$$Aa = \tfrac{1}{2} AM;$$

Tab. V. Fig. 6. deinde ſumtis vtrinque

$$AX = AX' = x,$$

ita, vt ſit proprie

$$AX' = -x;$$

erit

erit pro x adplicata

$$X\,x = \tfrac{1}{2}\,x\,O + \tfrac{1}{2}\,X\,Y$$

et pro altera

$$X'\,x' = \tfrac{1}{2}\,x\,O - \tfrac{1}{2}\,X\,Y$$

ac denique ſumtis vtrinque abſciſſis

$$A\,B = a = A\,A'$$

tum fiet adplicata in puncto $B = \tfrac{1}{2}\,B\,N$ et

$$A\,a' = B\,N$$

ſicque adplicatae extremae $B\,b$ et $A'\,a'$ fiunt inter ſe aequales, ſicque tota haec curua baſi

$$A'\,B = 2\,a$$

inſiſtens ex ſtatu chordae initiali plene eſt conſtructa; et nihil aliud ſupereſt, niſi vt haec ipſa curua $a'\,b$ replicetur tam dextrorſum, quam ſiniſtrorſum, quoties libuerit; hocque modo tota ſcala conſtructionis conficietur, ex qua deinceps ad quoduis tempus figura chordae innoteſcet.

§. 18. Poſtquam igitur ipſum chordae motum determinauimus; nunc vires illas initio memoratas $A\,\alpha$ et $B\,\beta$, quae ad retinendos chordae terminos A et B immotos requiruntur et quae erant incognitae, definire poterimus. Quem in finem cunctas vires ſingulis chordae punctis X adplicatas propius perpendamus. Supra autem §. 8. vidimus a parte ſiniſtra in punctum Y agere vires ſequentes 1°. vim tendentem $A\,a = \pi$ 2°. vim illam incognitam $A\alpha = F$ et 3°. omnes vires elementares portioni $A\,y$ ad-

 plica-

plicatas, quarum cum quaelibet ſit $= \frac{K\,dx}{2\,b\,k} \cdot \frac{d\,d\,Y}{d\,t^2}$, omnium ſumma erit

$$\frac{K}{2\,b\,k} \int \cdot \frac{d\,x.\,d\,d\,y}{d\,t^2} = \pi \int . \, d\,x \, \frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$$

cuius integrale eſt

$$\pi . \frac{d\,y}{d\,x} + \text{Conſt.}$$

quae ita debet eſſe comparata, vt integrale euaneſcat ſumto $x = 0$. Deinde etiam harum virium momenta pro puncto Y ſumus contemplati; ac primae vis A $a = \pi$ momentum erat πy; vis autem F momentum in ſenſum contrarium ageus F x, cui adiungi debet momentum ex omnibus viribus elementaribus ortum

$$= \frac{K}{2\,b\,k} \int . \, d\,x \int \frac{d\,x.\,d\,d\,y}{d\,t^2} = \pi . \int d\,x \left(\frac{d\,y}{d\,x} + \text{Conſt.}\right) = \pi (y + C\,x).$$

Cum igitur iam inuentum ſit

$$y = \Phi\,(c\,t + x) - \Phi\,(c\,t - x)$$

erit $\frac{d\,y}{d\,x} = \Phi'\,(c\,t + x) + \Phi'\,(c\,t - x)$

vnde ſumma illa virium elementarium ob

$$\frac{d\,y}{d\,x} + C = \Phi'\,(c\,t + x) + \Phi'\,(c\,t - x) - 2\,\Phi'\,c\,t$$

erit $= \pi\,[\Phi'\,(c\,t + x) + \Phi'\,(c\,t - x) - 2\,\Phi'\,c\,t]$.

Progenita autem inde momenta iam erunt, vis tendentis π momentum

$$= \pi\,(\Phi\,(c\,t + x) - \Phi\,(c\,t - x))$$

alterius autem vis F momentum $=$ F x; virium autem elementarium momentum

$$\pi\,(\Phi\,(c\,t + x) - \Phi\,(c\,t - x) - 2\,x\,\Phi'\,c\,t)$$

quae

quae duo poſteriora in contrarium ſenſum vrgent et quia ſe mutuo deſtruere debent, naſcitur haec aequatio

$$\pi(\Phi(ct + x) - \Phi(ct - x)$$
$$= Fx + \pi(\Phi(ct + x) - \Phi(ct - x) - 2x\Phi' ct)$$

vnde manifeſto innoteſcit vis illa incognita

$$F = 2\pi\Phi' ct$$

cui autem non aequabitur vis in altero termino $B\beta = G$ quandoquidem adplicata y pro abſciſſa $Bx = a - x$ alia functione exprimitur. Hanc autem vim G ſimili modo per ſequens ratiocinium colligere poterimus, quod omnium virium elementarium per totam chordam Ay adplicatarum ſumma erit

$$\pi(\Phi'(ct + a) + \Phi'(ct - a) - 2\Phi' ct) - G$$

quae cum debeat eſſe $= 0$; concludimus fore

$$G = \pi(\Phi'(ct + a) + \Phi'(ct - a) - 2\Phi' ct).$$

§. 19. Hactenus igitur ſolutionem ſequentis problematis generalis tradidimus:

Problema generale.

Dato ſtatu initiali chordae vniformiter craſſae tam ratione figurae, quam ratione motus ipſi impreſſi, definire ad quoduis tempus figuram, quam chorda deinceps eſt habitura, quatenus ſcilicet eius vibrationes fuerint quam minimae.

Perſpicuum autem eſt, ſolutionem, quam dedimus, non ſolum eſſe admodum facilem et concinnam, ſed etiam naturae quaeſtionis admodum con-

conformem, quandoquidem ad omnes ſtatus initiales eſt accommodata, dum aliae ſolutiones, quae plerumque prodierunt, tantum ad certas curuarum ſpecies, ad quas chorda inter vibrandum ſe componere poteſt; ſunt reſtrictae. Nemo autem negare poteſt, quin ſtatus initialis chordae penitus a noſtro arbitrio pendeat nec quisquam oſtendere eſt conatus, quod chorda ſemper ſe ad illas curuarum ſpecies formare debeat, poſtquam ipſi initio aliae figurae fuerint impreſſae; quia etiam ipſe Illuſtr. *D'Alembertus* hoc negotium non ſuſcepit, ſed potius declarauit, illis caſibus, quibus chordae initio figurae ab illis curuis diſcrepantes fuerint inductae, motum ſecuturum ope Analyſeos plane aſſignari non poſſe; quod equidem de Analyſi ordinaria facile concedo; atque in hoc ipſo non parum mihi praeſtitiſſe videor, quod nouum illud Analyſeos genus, quod circa functiones duarum variabilium verſatur, felici ſucceſſu ad motum chordarum adplicuerim. Vt autem omnibus plane dubiis occurram, aliquot caſus ſimpliciſſimos, qui Analyſi refragari videntur, euoluam ac deinde oſtendam, meam ſolutionem non ſolum experientiae, ſed et omnibus motuum principiis perfecte eſſe conſentaneam.

Caſus primus.

Tab. V. Fig. 7. Si chorda initio a ſtatu naturali A B ita fuerit diducta, vt triangulum iſoſceles A D B conſtituat, cuius quidem altitudo C D fuerit quam minima, hincque ſubito dimittatur, vt motum

a quie-

a quiete incipiat, inuenire eius motum vibratorium.

Euolutio.

§. 20. Cum ergo initio omnia chordae elementa fuerint in quiete et ſingula puncta in vtroque latere A D et B D nullis plane viribus ſollicitentur, quoniam tenſiones chordae vbique ſunt aequales et contrariae, euidens eſt, primo inſtanti omnia haec puncta nullum motum adipiſci, ſed in quiete eſſe permanſura; ſolum ſupremum elementum in apice D ſitum ob tenſionem chordae vtrinque oblique ſollicitatur, ſecundum directiones D A et D B; inde ergo vtique naſcetur vis ſecundum directionem D C ſollicitans, ex quo punctum D reuera in directione D C moueri incipiet, dum omnia reliqua chordae puncta adhuc in quiete perſeuerant. Statim autem atque hoc punctum D moueri incipiet ac primo quaſi inſtante ad G vsque peruenerit, nunc puncta illa E et F ad motum concitari incipient, propterea quod tenſiones vtrinque circa haec puncta non amplius in aequilibrio ſunt poſitae, dum reliqua puncta ab E verſus A et a F verſus B etiam nunc manent immota. Puncta autem in ſpatiolo E G F ſita, quia non amplius ſollicitantur, motu iam acquiſito verſus axem A B properabunt, ſicque denuo quopiam tempuſculo elapſo chordae inducetur figura A ef B, hocque modo tandem ad ſtatum naturalem A B perueniet; vnde ſimili modo in plagam oppoſitam extrauagabitur.

§. 21. Qui haec attentius perpendere voluerit, ſine dubio concedere cogetur, chordam tali modo, vt diximus, ad motum ſe eſſe compoſituram. Videamus ergo, cuiusmodi motum ſolutio noſtra generalis ſit praebitura; ſi enim ea ad ſimilem plane motum perduxerit; dubitari certe amplius non poterit, quin ea ſit veritati conſentanea. Sin autem alium atque diuerſum motum inde inuenerimus: tum ea ſine dubio pro ſuſpecta haberi poteſt.

§. 22. Quia omnes celeritates initiales euaneſcunt ſicque ſcala celeritatum in ipſum axem A B incidit, etiam areae illae A X Z (fig. 5.) euaneſcent hincque linea illa F V G erit recta axi A B parallela ab eoque interuallo arbitrario A F = C G remota; ex quo ſcala conſtructionis ſequenti modo erit comparata. Scilicet ſuper interuallo principali A B exiſtit etiam △ iſoſceles $a \alpha b$, cuius altitudo tantum ſemiſſis eſt figurae initialis C D. Interuallo autem A A' ſiniſtrorſum ſimile △ iſoſceles ſitu inverſo imminebit $a' \alpha' a$ atque hoc modo dextram verſus ſuper interualla aequalia ſimilia triangula alternatim deorſum et ſurſum vergentia exſtrui debent atque ex hac ſcala vtique pro $t = 0$ ipſa figura initialis reſultat.

Tab. V. Fig. 8. §. 23. Quoniam hic tempus vnius vibrationis habetur $= \frac{a}{c}$, ſumto interuallo A T $= c\,t = a$, punctum T incidet in ipſum punctum B, vnde figura chordae ſimilis prodiret initiali, ſed in plagam oppoſitam verſa, vti natura vibrationum exigit; tempo-

tempore autem medio, quo $t = \frac{a}{2c}$, punctum illud T in ſcala conſtructionis ſub ipſo apice erit ſitum, hicque manifeſtum eſt, pro figura chordae omnes adplicatas in nihilum eſſe abituras ſeu momento hoc medio chorda per ipſum ſtatum naturalem tranſit, id quod etiam nulli dubio eſt obnoxium.

§. 24. Quaeramus vero figuram chordae pro tempore $t = \frac{a}{4c}$; ita, vt ſit $AT = ct = \frac{a}{4} = \frac{1}{4}AB$ et quamdiu abſciſſae x ſunt minores, quam $AT x = \frac{1}{4}a$, adplicatae y continuo creſcere debent ideoque tantum, quantum in figura initiali a puncto A increſcebant; ſimulac vero abſciſſa x euadit $= \frac{1}{4}a$, adplicata y aequabitur dimidiae altitudini figurae initialis. Nunc igitur capiatur abſciſſa x maior, quam $\frac{1}{4}a$, ac facile patebit, adplicatas y prodire inter ſe aequales et quidem $= m\alpha - Aa$, quod euenit, donec fiat $x = \frac{3}{4}a$, ſicque per hoc ſpatium portio chordae parallela erit axi AB; ſin autem $x > \frac{3}{4}a$; adplicatae denuo decreſcent vniformiter, donec in ipſo termino B euaneſcunt. Conſequenter elapſo tempore $t = \frac{a}{4c}$; chorda figuram habebit AETB cum figura initialis fuiſſet ADB, ita, vt crura illa AD et BD in punctis E et F biſecentur et portio EF axi ſit parallela; patet igitur, quod initio monuimus, ſolam chordae portionem EF hucvsque eſſe promotam; portiones autem extremas AE et BF etiamnum manſiſſe immotas; qui ergo motus cum extra omnem dubitationem ſit poſitus; ſoliditatem noſtrae ſolutionis generalis maxime Tab. V. Fig. 9.

 confir-

confirmat, ita, vt nunc quidem nulli iam dubio locus relinqui videatur.

§. 25. Statim quidem obiicietur, cum initio chorda in angulum A D B fuerit efformata, hunc angulum in ſequentibus vibrationibus continuo magis magisque obtuſum fieri; ac fortaſſe adeo ad experientiam prouocabitur, quod equidem negare neutiquam ſuſtineo; verum hic probe obſeruari conueniet, in noſtro calculo chordam perfecte flexibilem eſſe asſumtam, ita, vt flexurae angulofae neutiquam reſiſtat. Cum autem nulla chorda ex quacunque materia confecta plane omni rigore ſit deſtituta; huic ipſi cauſſae vtique erit adſcribendum, ſi illi anguli inter vibrandum continue magis obtunduntur neque ergo hoc etiamſi experientiae fuerit conſentaneum, noſtrae methodo vllam vim inferre poteſt, vt eius ſoliditas inde ſuſpecta reddi queat.

Caſus ſecundus.

Tab. V. Fig. 10. Si initio non tota chorda A B; ſed tantum eius ſemiſſis A C in figuram trianguli iſoſcelis A C *d* diducatur; altera parte C B manente immota, tum vero chorda ſubito ex hoc ſtatu remittatur; inueſtigare eius motum tremulum ſecuturum.

Euolutio.

§. 26. Hic caſus eo magis eſt memoratu dignus, quod non ſolum Ill. *d'Alembertus*, ſed etiam alii, qui idem argumentum tractauerunt, iſtum caſum

ſum non ſunt auſi attingere, eumque adeo Analyſi aduerſari ſunt arbitrati. Ante autem quam eius euolutionem ſuſcipiamus, populari ratiocinio vtentes videamus, cuiusmodi motus inſequi debeat ac primo quidem cum chorda ipſo initio fuerit in quiete, euidens eſt, haec duo tantum puncta *d* et C ad motum ſollicitari, propterea quod in omnibus reliquis chordae punctis tenſiones vtrinque ſe in aequilibrio ſeruant; hinc ergo punctum *d* axem A B verſus vrgebitur, punctum C vero ab axe ſurſum detorquebitur, quoniam alium motum niſi in directione ad axem normali recipere nequit. Sequentibus vero porro temporis punctis continuo maior trianguli A *d* C portio ad axem accedet, ſimul vero alterius partis C *d* portio quaedam ſupra axem elevabitur, et ſic mox vndatio ſurſum vergens A *d* C vsque ad alterum terminum B propagabitur, quae cum negari nequeant, videamus, qualem motum noſtra ſolutio producere debeat.

§. 27. Quia primo inſtanti chorda motum ex quiete incepit, ſcala conſtructionis ita erit comparata, vti figura exhibet, ſcilicet interuallo A B, quo ipſa chorda refertur imminebit ſcala $\alpha\,\delta\,\gamma\,\varepsilon\,\beta$, ſimilis plane ipſi figurae initiali, triangulo nimirum iſoſcele $\alpha\,\delta\,\gamma$ et reliqua portione recta $\gamma\,\beta$ conſiſtens, hoc ſolo diſcrimine, quod hic trianguli altitudo duplo minor eſt, quam in figura initiali; at vero ſiniſtrorſum eadem figura ſitu inuerſo eſt delineanda, ita, vt portioni axis A 𝔈 immineat $\triangle\,\alpha\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}$ Tab. V. Fig. 11.

 deorſum

deorſum vergens; reliqua parte $c\,\mathfrak{a}$ exiſtente recta; axi parallela; quo facto haec figure $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} \ldots \beta$ axi $\mathfrak{A}\,B = 2\,a$ inſiſtens replicetur dextrorſum, quousque libuerit; ſingula porro interualla $\mathfrak{A}\,A$, $A\,B$, $B\,B'$ in quaternas partes ſecentur, quo facilius ſtatus chordae ſequentes ſcrutari valeamus.

§. 28. Cum tempus vnius vibrationis ſupra ſit inuentum $= \frac{a}{c}$, ipſa chordae longitudo $A\,B = a$, tempus vnius vibrationis exhibere cenſeatur, ideoque quartae illae partes in figura expreſſae etiam quartam partem durationis vnius vibrationis exhibebunt atque hinc ad temporis momenta ab initio elapſa $\frac{1}{4}a$; $\frac{1}{2}a$; $\frac{3}{4}a$ et a figuram chordae exploremus.

§. 29. Pro tempore igitur $= \frac{1}{4}a$ adplicata illa $T\,V$ (fig. 4) in puncto D erit accipienda, et cum ſemper pro abſciſſa $x = 0$ adplicata in ipſa chorda etiam ſit $= 0$; pro abſciſſa $x = \frac{1}{4}a = A\,D$ adplicata erit $C\,\gamma - A\,\alpha = 0$ vnde patet, chordam ab A vsque ad D in ipſum axem incidere. Tum vero capiatur $x = \frac{1}{2}a = A\,C$; atque in ſcala relationis adplicatae a $T\,V$ vtrinque hoc interuallo diſtantes erunt $E\,\varepsilon$ et $\mathfrak{D}\,\mathfrak{d}$; vnde pro figura chordae adplicata erit $E\,\varepsilon = \mathfrak{D}\,\mathfrak{d} = C\,c$, ita, vt iam $D\,c$ ſit portio chordae; porro ſumamus $x = \frac{3}{4}a = A\,E$ atque in ſcala relationis a puncto D vtrinque capiantur tanta interualla $D\,B = D\,\mathfrak{C} = \frac{3}{4}a$ et iam noſtra adplicata erit $B\,\beta - \mathfrak{C}\,\mathfrak{c} = 0$, ita, vt in hoc loco punctum chordae iterum in axem incidat; denique pro

Tab. V. Fig. 12.

pro abſciſſa $x = a$ in ſcala relationis a puncto D abſcindantur vtrinque interualla $D D' = D \mathfrak{E} = a$; et iam adplicatarum differentia in his punctis $D' \varepsilon^2 - \mathfrak{E}\,\mathfrak{b} = 0$; hinc igitur cognoſcimus elapſo tempore $= \frac{1}{4} a$ figuram chordae ita fore comparatam, vt vtrinque per interualla A D et B E chorda cum ipſo axe conueniat; per interuallum autem D E triangulum iſoſceles furſum formet A c E cuius autem altitudo C c duplo erit minor, quam in ſtatu initiali; ita, vt vndatio vsque in ſpatium D E ſit promota.

§. 30. Elapſum iam ab initio ſit tempus $= \frac{1}{2} a$ et nunc adplicata illa T V conſtituenda erit in puncto C, a quo puncto ſucceſſiue vtrinque capi debebunt interualla $\frac{1}{4} a$; $\frac{1}{2} a$; $\frac{3}{4} a$ et a ac primo pro $x = \frac{1}{4} a$ habebimus in ſcala relationis adplicatas E ε et D δ, quarum differentia E ε — D δ ſit negatiua ſiue pro abſciſſa $x = \frac{1}{4} a$ oſtendit adplicatam deorſum verſam, quae iterum erit duplo minor, quam in figura initiali. Capiatur nunc $x = A C = \frac{1}{2} a$ et in ſcala conſtructionis habebuntur binae adplicatae B β et A α, quarum differentia euaneſcit, ita, vt in puncto C chordae adplicata iterum euaneſcat, ita, vt hic △ iſoſceles ſub axe deorſum ſit verſum. Porro ſumto $x = \frac{3}{4} a$, in ſcala conſtructionis habebuntur adplicatae D ε' et $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{d}$, quarum differentia erit poſitiua et duplo minor altitudine trianguli in figura initiali. Quocirca elapſo tempore $= \frac{1}{2} a$ chorda in duo triangula iſoſcelia erit inflexa, priore deorſum, poſteriore vero ſurſum vergente. Tab. V. Fig. 13.

§. 31.

§. 31. Elapſum iam ab initio ſit tempus $= \frac{3}{4} a$, et nunc adplicata T V ſtatuenda erit in E; hinc pro figura chordae ſumatur primo $x = \frac{1}{4} a$ et in ſcala conſtructionis habebimus binas adplicatas B β et C γ, quarum differentia $= 0$ oſtendit portionem chordae A D in ipſo axe fore ſitam; capiatur porro $x = \frac{1}{2} a =$ A C, et in ſcala conſtructionis habebuntur binae adplicatae $D' \varepsilon'$ et D δ, quarum differentia negatiua aequabitur ſemiſſi altitudinis trianguli in figura initiali. Sumto autem $x = \frac{3}{4} a$, binae adplicatae in ſcala erunt $C' \gamma'$ et A α, quarum differentia $= 0$ oſtendit chordam in E in axem incidere pariter atque per totum interuallum reſiduum E B ſicque manifeſtum eſt, hanc figuram ſimilem prorſus eſſe illi, quam pro tempore elapſo $x = \frac{1}{4} a$ inuenimus; niſi quod haec ſitum inuerſum teneat.

§. 32. Elapſum denique ſit ab initio tempus $= a$, ita, vt hic figura chordae circa finem primae vibrationis ſit definienda et nunc adplicata illa T V incidet in B, ex quo ergo vtrinque abſcindamus interualla $\frac{1}{4} a$; $\frac{1}{2} a$ et $\frac{3}{4} a$. Nunc ergo pro $x = \frac{1}{4} a$ in ſcala habebimus binas adplicatas $D' \varepsilon'$ et E ε, quarum differentia $= 0$ praebet pro chorda $y = 0$. Sit nunc $x = \frac{1}{2} a$ et binae adplicatae in ſcala erunt $C' \gamma'$ et C γ quarum differentia iterum $= 0$
Tab. V. Fig. 15. praebet $y = 0$, ita, vt iam tota prior ſemiſſis chordae in ipſum axem incidat. Verum ſumto $x = \frac{3}{4} a$; binae adplicatae ſcalae erunt $B' \delta'$ et D δ, quarum differentia eſt negatiua atque ipſi altitudini trianguli in

in ſtatu initiali aequalis; ex quo patet, hanc chordae figuram prorſus ſimilem et aequalem eſſe ipſi figurae initiali, niſi quod eius ſitus ſit inuerſus; et cum iam prima vibratio ſit terminata, etiam ſequens motus per ſe cognoſcetur; ita, vt ſuperfluum foret has determinationes vlterius proſequi.

§. 33. Omnino igitur noſtra euolutio motum oſtendit illi, quem coniectura collegimus, conformem; ita, vt hinc nullum amplius dubium contra hanc ſolutionem moueri poſſit; quare cum iſte caſus maxime aduerſari ſit viſus, eo iam feliciſſime expedito meam theoriam de chordis vibrantibus abunde extra omnem dubitationem collocaſſe mihi equidem videor; atque adeo ſpero, in poſterum omnibus obiectionibus ſufficienter eſſe reſponſum, ita, vt ſuperfluum foret, plures adhuc caſus ſimili modo euoluere.

ANIMADVERSIONES IN SOLVTIONEM BERNOVLLIANAM DE MOTV CHORDARVM EX DVABVS PARTIBVS DIVERSAE CRASSITIEI COMPOSITARVM. TOM. XVI. NOV. COMMENT.

Auctore

L. EVLERO.

Quum haec ſolutio plurimum diſſentiat ab illa, quam iam olim de eodem argumento dederam, atque adeo a methodo mea huiusmodi quaeſtiones tractandi maxime diſcrepet, Illuſtris Auctor veritatis amore ductus, non aegre feret, ſi omnia momenta, quibus eius ſolutio innititur, ad examen reuocauero, quoniam enim huiusmodi quaeſtiones plane nouae Analyſeos genus, cui Geometrae adhuc parum ſunt aſſueti, poſtulant; mirum ſane non eſt, ſi in ſolutionibus etiamnum ingens diſcrimen deprehenditur.

I. Principio Illuſtris Auctor innuere videtur, in chordas inter vibrandum alias figuras cadere non poſſe, niſi quae ad genus lineae ſinuum referantur, quum tamen etiam aliae figurae quaecunque locum

habere

habere queant, ſiquidem totus chordae motus a figura, quae ipſi initio fuerit impreſſa, pendet, haec figura autem plane arbitrio noſtro relinquitur, interim tamen facile concedo, talem figuram chordae ex duabus partibus inaequalibus compoſitae conuenire poſſe, quemadmodum autem motus deinceps futurus ſit comparatus, Illuſtris Auctor ſingulari plane ratione inueſtigauit loco citato, quam meo equidem more hic ob oculos ſum expoſiturus.

II. Sit igitur chorda A B C, ex duabus partibus inaequalibus A B et B C conflata, atque in terminis A et C fixa, ponamus longitudines vtriusque partis A B $= a$ et B C $= b$, maſſam autem illius portionis $=$ A, huius vero $=$ B, ipſa autem chordae tenſio ſit $=$ F, tum vero ſtatuatur breuitatis gratia Tab. VI. Fig. 1.

$$\frac{2abF}{A} = \alpha\alpha \text{ et } \frac{2bbF}{B} = \beta\beta,$$

vbi littera b indicat altitudinem, vnde grauia delabuntur tempore minuti ſecundi, vt ſcilicet hoc modo tempora in minutis ſecundis exprimi queant.

III. Inter vibrandum autem elapſo tempore $= t$ ſec. induerit chorda figuram A F C, quae quidem in genere linearum ſinuum contineatur. Sumta iam in parte A B abſciſſa $=$ A X $= x$, cui reſpondeat applicata X Y $= y$, pro portione autem altera, notetur abſciſſa B X $= x'$, et applicata X' Y' $= y'$, tum vero principia motus ſequentes ſuppeditant aequationes. Pro priore quidem parte A B habetur:

 $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

ſimilique modo pro parte D C

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy}{dx^3}\right)$$

quae formulae vtique omnes motus poſſibiles, qui quidem in hanc chordam cadere poſſunt, in ſe complectuntur. His expoſitis, Illuſtris Auctor, pro curua A F, hanc conſtituit aequationem

$$y = m\ \text{ſin.}\ \theta t\ \text{ſin.}\ \frac{\theta x}{\alpha},$$

pro altera vero F B iſtam:

$$y' = n\ \text{ſin.}\ \theta t\ \text{ſin.}\ \theta\left(f + \frac{x'}{\beta}\right),$$

in quas formulas ſimul ipſum tempus elapſum introduxi, quo facilius deinceps tempus cuiusque vibrationis cognoſci poſſit. Nunc ſtatim perſpicuum eſt, in his duabus formulis tres quantitates indefinitas contineri, litteras ſcilicet θ et f vna cum ratione inter coefficientes m et n, quibus ergo tribus conditionibus ſatisfieri poſſe videtur.

IV. Sequentibus autem tribus conditionibus Illuſtris Auctor ſatisfieri oportere ſtatuit. 1°. Scilicet in ipſa iunctura B vbi $x = a$ et $x' = 0$, vtraque applicata y conuenire debet, vnde oritur iſta aequalitas

$$m\ \text{ſin.}\ \frac{\theta a}{\alpha} = n\ \text{ſin.}\ \theta f.$$

Deinde quia chorda in puncto C fixa ponitur, facto $x' = b$, ſemper eſſe oportet

$$\text{ſin.}\ \theta\left(f + \frac{b}{\beta}\right) = 0,$$

vnde

vnde iam duae quantitatum illarum indeterminatarum determinantur. Tertiam autem determinationem inde petit, quod ambabus partibus in ipſa iunctura F communem tribuit tangentem, vnde vtique ſequitur eſſe debere

$$\frac{m}{\alpha}\operatorname{coſ.}\frac{\theta a}{\alpha} = \frac{n}{\beta}\operatorname{coſ.}\theta f,$$

hocque modo ternae illae quantitates indefinitae egregie determinari videntur.

V. Quod autem ad hanc poſtremam conditionem attinet, equidem nullam rationem perſpicio, cur in puncto F, vbi ambae chordae partes iunguntur, vtraque tangens abſolute congruere debeat, praecipue quum hic tantum de vibrationibus infinite paruis agatur, ideoque nulla ſenſibilis diuerſitas in inclinatione elementorum locum habere poſſit. Statim equidem ſuſpicatus eram hoc ideo ab Auctore requiri, vt accelerationes prope iuncturam F vtrinque ad aequalitatem redigerentur. Verumtamen ne haec quidem conditio hoc pacto adimpletur, nam vis acceleratrix in hoc loco ex parte priore eſt

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{m}{\alpha\alpha}\operatorname{ſin.}\frac{\theta a}{\alpha},$$

ex poſteriore autem fit

$$= -\frac{n}{\beta\beta}\operatorname{ſin.}\theta f,$$

quae duae expreſſiones nunquam aequales eſſe poſſunt, quamdiu litterae α et β diſcrepant, quum prima conditio iam poſtulauerit

$$m\operatorname{ſin.}\frac{\theta a}{\alpha} = n\operatorname{ſin.}\theta f.$$

 VI.

VI. Non ſolum autem haec conditio mihi non neceſſaria videtur, ſed etiam mox oſtendam, eam plane eſſe ſuperfluam et plerumque indoli quaeſtionis aduerſantem. Hic ſaltem extra dubium poſitum videtur, omiſſa hac conditione problema adhuc indeterminatum relictum iri, et litteram θ nondum determinari, et quaſi arbitrio noſtro permitti. Ab hac littera autem pendet tempus cuiusque vibrationis, quod autem experientia teſte nequaquam indeterminatum eſſe poteſt, etiamſi in iunctura F inaequalis inclinatio admitteretur.

VII. Poſtquam autem has rationes diu multumque mecum perpendiſſam, tandem vitium aliquod in eo latere deprehendi, quod ambo coefficientes m et n inter ſe quaſi inaequales ſpectantur, quorum tamen aequalitatem rei naturam poſtulare ita manifeſtum reddetur: Vt in ipſa iunctura F omnis ſaltus et continui interruptio euitetur, non ſufficit, vt pro axis puncto B vna eademque applicata y vtrinque reſultet, ſed etiam ipſi anguli, quorum ſinus in ſuperiores aequationes ingrediuntur, ordine non interrupto progredi debent, ita vt in ipſo puncto B ambo illi arcus, $\frac{\theta a}{\alpha}$ ex priori parte, et θf ex poſteriori aequales fieri debeant, vnde ſtatim colligimus $f = \frac{a}{\alpha}$, haecque adeo conditio potior videtur, quam altera, vbi ipſi ſinus horum arcuum ſpectantur. Sumto autem $f = \frac{a}{\alpha}$ valores illi ipſius y aequales inter ſe fieri nequeunt, niſi ſtatuatur $n = m$. Statim autem ac ſtatuamus $m = n$, quia iam nacti

ſumus

ſumus $f = \frac{a}{\alpha}$, ſola ſupereſt quantitas indefinita θ, inde vtique determinanda, vt punctum C maneat fixum, ex quo manifeſtum eſt, circa inclinationem illam elementorum in puncto F nihil prorſus arbitrio noſtro relinqui.

VIII. Hac circumſtantia autem probe obſeruata, etiam ſuperiores formulae Bernoullianae egregie cum mea ſolutione conſpirabunt. Poſito enim

$$n = m \text{ et } f = \frac{a}{\alpha},$$

ſumendo $x' = b$ in ipſo termino C applicata oritur

$$y' = m \text{ ſin. } \theta\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right),$$

quae vt ſemper fiat o, arcus, cuius ſinus hic occurrit, vel o, vel 180, vel 360° eſſe debet, ponamus igitur

$$\theta\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) = \pi,$$

ſiue angulo 180°, ſicque iam littera θ determinatur, vnde ſponte tempus vnius vibrationis ſe prodit, quum enim omnes applicatae initio vbi $t = o$, fuerint o, idemque denuo vſu veniat ſi $\theta t = \pi$, tempus vnius vibrationis hinc manifeſto fit $\pi = \theta t$, quod conſequenter erit $= \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$ idque in ipſis minutis ſecundis expreſſum, iamque ergo euidens eſt, tempus vibrationis nullo modo ab angulo illo infinite paruo, quo elementa circa iuncturam F forte ad ſe inuicem inclinantur, pendere, prorſus vti ipſa experientia manifeſto declarat, id quod etiam plane cum mea Theoria congruit.

IX. Neque vero hoc tempus vnius vibrationis ad figuram illam, qua chorda ſecundum lineam ſinuum incuruatur, eſt adſtrictum, ſed quaecunque alia figura eidem chordae initio fuerit impreſſa, eodem ſemper tempore eius vibrationes abſoluentur, niſi forte ob ſingulares circumſtantias eueniat, vt motus vibratorius vel duplo, vel triplo, vel quadruplo etc. crebrior reddatur, id quod ſequenti modo facile oſtendo. Priori formulae

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = \alpha\,\alpha \left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

qua motus prioris partis exprimitur, in genere ſatisfacit hoc integrale completum:

$$y = \Phi : \left(t + \frac{x}{\alpha}\right) - \Psi : \left(t - \frac{x}{\alpha}\right),$$

vbi Φ et Ψ functiones quascunque ſubiunctarum quantitatum $t + \frac{x}{\alpha}$ et $t - \frac{x}{\alpha}$ deſignare poſſunt, quod non ſolum de functionibus vere analyticis, quas ſcilicet per formulas analyticas exprimere licet, eſt intelligendum; ſed etiam in genere valet pro functionibus discontinuis, ſeu quae per curuas quascunque libero manus tractu delineatas repraeſentari poſſunt, ita vt formula $\Phi : (t + \frac{x}{\alpha})$ denotet applicatam cuiuscunque curuae, abſciſſae $t + \frac{x}{\alpha}$ reſpondentem, ſimilique modo altera formula $\Psi : (t - \frac{x}{\alpha})$, ſiue eiusdem ſiue alius cuiuscunque lineae curuae applicatam, abſciſſae $t - \frac{x}{\alpha}$ reſpondentem.

X. Haec ſumma vniuerſalitas probe eſt notanda, quum ea demum indoles quaeſtionis exhauriatur,

riatur, quandoquidem chordae initio figura quaecunque penitus ab arbitrio noſtro pendens induci queat, cuius etiam naturam nulla analytica aequatione comprehendere liceat, neque etiam quod ſaepius contra methodum meam fuit obiectum, neceſſe eſt, vt curuae illae characteribus Φ et ψ deſignatae aequabili quaſi tractu procedant, ſed etiam aeque ſatisfaciunt, quamuis ex pluribus lineis rectis, vel portionibus aliarum curuarum, vtcunque inter ſe et ſub angulis quibuscunque fuerint conflatae, dummodo ſcilicet applicatae y inde formatae euadant quam minimae, id quod facile obtinetur, functiones illas Φ et ψ per fractionem quaſi infinite paruam i multiplicando. Quod autem huiusmodi anguli in iſtis curvis Φ et ψ, nullam moram faceſſant, vel ex hoc ſolo caſu liquebit, quando in his curuis adeo cuſpis occurrat. Si enim pro functione Φ abſciſſa $t + \frac{x}{a}$ ponatur $= u$, ſi fuerit

$$\Phi : u = \sqrt[3]{c(c-u)^2},$$

haec curua vtique pro abſciſſa $u = c$ habebit cuſpidem parabolae cubicalis Neilianae, interim tamen haec ipſa formula etiamnunc aequationi differentiali perfecte ſatisfacit; quum enim ob $u = t + \frac{x}{a}$ ſit $\frac{du}{dt} = 1$, et $\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$, poſito

$$y = \Phi : u = \sqrt[3]{c(c-u)^2},$$

per differentiationem nanciſcimur, ſumta ſola t variabili:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{c-u}} \text{ et } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\tfrac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{(c-u)^4}}$$

tum vero ſumta ſola x variabili reperitur

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{2}{3\alpha}\sqrt[3]{\frac{c}{c-u}} \text{ et } \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\frac{2\sqrt[3]{c}}{9\alpha\sqrt[3]{(c-u)^4}}$$

ſicque manifeſto eſt

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

neque cuſpis illa infinite acuta vllum adfert impedimentum, multo minus ergo eiusmodi anguli, quales in his curuis Φ et Ψ admittimus, vllo modo ſucceſſum noſtri calculi turbabunt.

XI. Eodem autem modo pro altera chordae parte B C, cuius motus hac aequatione continetur

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

in genere ſatisfiet hoc integrali completo:

$$y' = \Phi : \left(t + f + \frac{x'}{\beta}\right) - \Psi : \left(t - f - \frac{x'}{\beta}\right)$$

vbi characteres Φ et Ψ iterum functiones quascunque denotare poſſunt, ſiue easdem vt ante, ſiue etiam diuerſas, id quod ſtatim clarius exponemus. Quum pro vtraque parte chordae applicatae y per binas functiones Φ et Ψ exprimantur; ante omnia probe obſeruaſſe iuuabit, vtrasque iſtas functiones ſeorſim aequationi differentio-differentiali conuenire. Ideo enim huiusmodi functiones ſunt introductae, vt integrale completum obtineremus, deinde vero manifeſtum eſt, priorem formulam pro parte A B, tantum

tantum valere a termino $x = 0$, vsque ad terminum $x = a$, ſimilique modo altera formula pro parte BC valebit a termino $x' = 0$ vsque ad $x' = b$.

XII. Quum iam curuae illae functionibus ϕ et ψ expreſſae continuo quodam tractu ſine vlla interruptione progredi debeant, hoc aeque de abſciſſis quam de applicatis vtriusque eſt intelligendum, poſito ergo pro ipſo puncto B in priori formula $x = a$, in altera vero $x' = 0$, vtrinque eadem abſciſſa in illis functionibus reperiri debet; ex quo ſtatim ſequitur

$$t + \frac{a}{\alpha} = t + f,$$

ideoque $f = \frac{a}{\alpha}$, deinde vt etiam pro puncto B eadem applicata BF obtineatur, debet eſſe

$$\phi : (t + \frac{a}{\alpha}) = \phi : (t + f)$$

ſicque ob $\frac{a}{\alpha}$ manifeſto poſterior functio ϕ cum priori debet conuenire, quod etiam de functionibus ψ eſt intelligendum.

XIII. His igitur expeditis pro motu portionis AB, habemus hanc aequationem:

$$y = \phi : (t + \frac{x}{\alpha}) - \psi : (t - \frac{x}{\alpha})$$

quae valet ab $x = 0$ vsque ad $\frac{x}{a}$; pro altera autem portione BC habemus:

$$y' = \phi : (t + \frac{a}{\alpha} + \frac{x'}{\beta}) - \psi : (t - \frac{a}{\alpha} - \frac{x'}{\beta})$$

quae valet ab $x' = 0$, vsque $x' = b$, atque hoc quidem modo indoli quaeſtionis reſpectu iuncturae in

puncto B eſt ſatisfactum. Nunc igitur efficiendum eſt, vt in ipſo termino A vbi $x = 0$, applicata y ſemper euaneſcat, quod vtique euenit, ſi functio ψ prorſus conueniat cum functione Φ, ſiue binae lineae illae curuae his functionibus repraeſentatae in vnicam coaleſcere debeant, ſiquidem fieri debeat

$$\Phi : t - \psi : t = 0.$$

Supereſt igitur, vt in altero termino B, vbi $x' = b$ etiam applicata y' perpetuo ad nihilum redigatur, ad quod ob $\psi = \Phi$ requiritur, vt ſit

$$\Phi : (t + \tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta}) - \Phi : (t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta}) = 0,$$

quod quidem non tam facile effici poſſe videtur, at poſito

$$t - \tfrac{a}{\alpha} - \tfrac{b}{\beta} = v,$$

hinc iſta conditio exoritur, vt ſit

$$\Phi : (v + \tfrac{2a}{\alpha} + \tfrac{2b}{\beta}) = \Phi : v,$$

vnde intelligimus curuam illam, qua functio Φ repraeſentatur, ita eſſe debere comparatam, vt quae applicata conuenit abſciſſae cuicunque v, eadem quoque abſciſſae

$$v + \tfrac{2a}{\alpha} + \tfrac{2b}{\beta} \text{ itemque } v + \tfrac{4a}{\alpha} + \tfrac{4b}{\beta}$$

et in genere abſciſſae

$$v + 2i(\tfrac{a}{\alpha} + \tfrac{b}{\beta})$$

conueniat, denotante i numerum integrum quemcunque. Quamcunque ergo formam habuerit iſta curua, ea in infinitum producta infinitis portionibus aequalibus et ſimilibus compoſita exiſtet, interual-

teruallo ſingularum harum portionum aequalium exiſtente

$$\frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta}.$$

XIV. Hoc iam modo omnibus conditionibus, quas natura quaeſtionis poſtulat, pleniſſime eſt ſatisfactum, atque nunc facillimum erit tempus cuiusque vibrationis aſſignare, quum enim initio fuerit $t = 0$, euidens eſt, elapſo tempore

$$t = \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta},$$

chordae eandem iterum figuram induci debere ſiue chordam ad ipſum ſtatum initialem reduci. Interea autem chorda cenſeri ſolet peregiſſe duas vibrationes, ſicque adeo tempus vnius vibrationis plane idem erit, quod iam ſupra indicauimus, ſcilicet

$$t = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}.$$

Denique manifeſtum eſt, hanc ſolutionem generaliſſimam ad omnes plane ſtatus, qui chordae initio induci poſſunt, patere, prorſus vti ipſa natura quaeſtionis poſtulat, quod autem ſupra memorauimus ad hanc quaeſtionem ſoluendam nouo Analyſeos genere opus eſſe, in eo eſt ſitum, quod noſtra ſolutio complectitur functiones plane arbitrarias, cuiusmodi olim naturae Analyſeos repugnare ſunt viſae.

DE MOTV VIBRATORIO CHORDARVM EX PARTIBVS QVOTCVNQVE DIVERSAE CRASSITIEI COMPOSITARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Eadem methodo, qua caſum ab Illuſtri *Bernoullio* tractatum expendimus, etiam motus chordarum, quae ex partibus quotcunque diuerſae craſſitiei ſunt compoſitae, facile et expedite definiri poteſt, id quod caſu, quo chorda ex tribus tantum diuerſis partibus conſtat, oſtendiſſe ſufficiet.

Tab. VI. Fig. 2. 1. Sit igitur chorda A D in terminis A et D fixa ex tribus partibus $AB = a$, $BC = b$; et $CD = c$ compoſita, quarum diuerſa craſſities ita ad calculum referatur, vt ex genere, vnde portio A B eſt deſumta, chorda longitudinis $= k$ pondus habeat $= A$; chorda autem ex eo genere, vnde portio B C eſt deſumta et pariter longitudinis $= k$, pondus habeat $= B$, ſimilique modo C ſit pondus chordae itidem longitudinis k ex eo genere, vnde tertia portio C D eſt deſumta, tum vero ſit pondus ſeu vis, qua iſta chorda tenditur, K, hinc pro qualibet portione ſequentes quantitates determinentur denotante b altitudinem

dinem lapſus vno minuto ſecundo facti, ita vt ſit $b = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. Statuatur pro prima portione

$$2bk.\frac{K}{A} = \alpha\alpha;$$

pro ſecunda portione

$$2bk.\frac{K}{B} = \beta\beta$$

et pro tertia portione

$$2bk.\frac{K}{C} = \gamma\gamma,$$

quarum formularum rationem intelligere licet ex ſuperiori diſſertatione, qua motum chordarum vniformium generaliſſime determinauimus.

2. His poſitis vocemus pro prima portione $AB = a$, abſciſſam quamcunque $AX = x$ et applicatam $AY = y$, ita vt x non vltra a augeri poſſit, pro ſecunda autem portione $BC = b$ vocetur abſciſſa quaecunque a puncto B deſumta $BX' = x'$ et applicata $X'Y' = y'$, vbi abſciſſa $BX' = x'$ non vltra b augeri poteſt. Pro tertia autem portione $CD = c$, ſit abſciſſa a puncto C ſumta $CX'' = x''$ eique reſpondens applicata $X''Y'' = y''$, vbi ergo poſito $x' = c$ in ipſum terminum D peruenitur. Iam elapſo tempore t, quod ſemper in minutis ſecundis exhibeatur, per principia ſupra ſtabilita, motus ſingularum portionum ſequentibus aequationibus differentio-differentialibus definietur:

I°. pro portione AB $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\alpha\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$

II°. pro portione BB $\left(\frac{ddy'}{dt^2}\right) = \beta\beta\left(\frac{ddy'}{dx^2}\right)$

III°. pro portione CD $\left(\frac{ddy''}{dt^2}\right) = \gamma\gamma\left(\frac{ddy''}{dx^2}\right)$

facile

facile enim patet pro qualibet portione motum per eadem principia ſeorſim determinari debere.

3. Integralia completa harum aequationum nulla plane laborant difficultate, quae ita ſe habere reperiuntur:

I. pro prima portione $y = \Phi(t + \frac{x}{\alpha}) - \Psi(t - \frac{x}{\alpha})$

II. pro ſecunda portione $y' = \Phi'(t + f + \frac{x'}{\beta}) - \Psi'(t - f \frac{x'}{\beta})$

III. pro tertia portione $y'' = \Phi''(t + g + \frac{x''}{\gamma}) - \Psi''(t - g - \frac{x''}{\gamma})$

in quibus poſterioribus formulis quantitates f et g introduximus, propterea quod abſciſſae x' et x'' non ab eodem initio A ſunt ſumtae, praeterea vero characteres Φ, Φ', Φ'' et Ψ, Ψ', Ψ'' functiones quascunque formularum, quibus ſunt praefixi, denotare poſſunt, quas adeo per lineas curuas quascunque repraeſentare licebit, nequidem eiusmodi lineis exceptis, quae libero manus tractu duci poſſunt. Nunc haec integralia completa ad ipſum ſtatum chordae propoſitae adcommodari oportet, ac pro prima quidem parte, quia chorda in puncto A eſt fixa, poſito $x = 0$, etiam fieri debet $y = 0$, vnde oritur

$$\Phi : t = \Psi : t$$

ſicque functio Ψ congruere debet cum functione Φ. Hinc igitur ſi ad ipſam juncturam B progrediamur; applicata hoc loco erit:

$$\Phi(t + \frac{a}{\alpha}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha}).$$

Eadem autem applicata ex formulis ſecundae portionis, ſumendo $x' = 0$, prodit

$$= \Phi'(t + f) - \Psi'(t - f),$$

quae

quae expreſſio ergo illi aequalis eſſe debet, idque ita vt non ſolum quantitates functionibus ſubnexae conveniant, ſed etiam ipſae functiones, quippe quod ratio continuitatis poſtulat, quandoquidem functiones Φ et ψ ſeorſim aequationibus differentialibus ſatisfaciunt. Ob hanc ergo rationem ſtatim colligimus $f = \frac{a}{\alpha}$, tum vero $\Phi' = \Phi$ et $\psi' = \Phi$, ita vt pro ſecunda portione B C hanc habeamus aequationem

$$y = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{x'}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{x'}{\beta}\right),$$

vnde pro ſequente iunctura C, vbi $x' = b$, applicata prodit

$$= \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}\right),$$

cui ergo aequalis fieri debet tertia formula generalis, ſi ibi ſtatuatur $x'' = 0$, quae praebet

$$\Phi''(t + g) - \psi''(t - g),$$

quocirca ob easdem rationes habebimus $g = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, ac ratione functionum $\Phi'' = \Phi$ et $\psi'' = \Phi$, ita vt pro tertia portione C D iſta valeat aequatio

$$y'' = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{x''}{\gamma}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{x''}{\gamma}\right).$$

Quum denique ſumto hic $x'' = c$, in termino D applicata iterum euaneſcere debeat, neceſſe eſt vt fiat

$$\Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) = \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{c}{\gamma}\right)$$

vnde iam natura functionis Φ ita reſtringitur, vt

$$\Phi\left(p + \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{2c}{\gamma}\right) = \Phi : p,$$

ſcilicet ſi hae functiones denotent applicatas curuae

cuiuſcunque, haec curua ita debet eſſe comparata, vt abſciſſis interuallo

$$\frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{2c}{\gamma}$$

diſtantibus eaedem vbique applicatae reſpondeant.

4. Aequationes igitur ad noſtrum caſum accommodatae pro ſingulis portionibus chordae ita ſe habebunt:

$y = \Phi(t + \frac{x}{\alpha}) - \Phi(t - \frac{x}{\alpha})$ pro portione A B

$y' = \Phi(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{x'}{\beta}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{x'}{\beta})$ pro portione BC

$y'' = \Phi(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{x''}{\gamma}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{x''}{\gamma})$ pro portione CD

vbi quidem functio Φ eam indolem habere debet, quam modo ante deſcripſimus, vnde ſtatim colligitur elapſo tempore

$$t = \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{2c}{\gamma}$$

omnes applicatas ideoque totius chordae figuram iterum ad eum ſtatum eſſe peruenturam, quem initio, vbi $t = 0$, obtinuerat, quare quum chorda interea duas vibrationes abſoluiſſe cenſeatur, tempus vniuscuiusque vibrationis erit

$$= \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$$

idque in minutis ſecundis expreſſum, quae expreſſio ſine dubio ſimplicior eſſe non poſſet.

5. Ex formulis inuentis porro facilis et ſatis elegans conſtructio concinnari poterit, ſimilis illi, quam pro caſu chordarum vniformium tradidimus, quae ſcilicet ope cuiusdam ſcalae conſtructionis perficieba-

ficiebatur. Quoniam autem formulae t et $\frac{x}{\alpha}, \frac{x'}{\beta}, \frac{x''}{\gamma}$, meros tantum numeros indicant, multiplicentur eae per certam quandam lineam arbitrariam, quae $= i$, in quam igitur omnes ſuperiores formulae, characteri functionis Φ ſubnexae, ductae ſunt intelligendae. Atque nunc pro qualibet abſciſſa in ipſa chorda et ab eius initio A ſumta, in ſcala conſtructionis capi debebit peculiaris quaedam abſciſſa, quam abſciſſam fictam adpellare liceat, et quam littera v deſignemus, cuius relatio ad abſciſſas chordae ſequenti modo ſe habebit:

Pro abſciſſa ipſius chordae	Abſciſſa ficta
I°. $AX = x$	$v = \frac{ix}{\alpha}$
II°. $AX' = a + x'$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ix'}{\beta}$
III°. $AX'' = a + b + x''$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ib}{\beta} + \frac{ix''}{\gamma}$

ſicque pro tota longitudine chordae

$$AD = a + b + c,$$

abſciſſa ficta euadet

$$v = i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right),$$

atque hinc perſpicuum eſt, quomodo cuiuis abſciſſae in ipſa chorda a termino A deſumtae, eidem reſpondens abſciſſa ficta definiri queat, quin etiam viciſſim quomodo ex quauis abſciſſa ficta, ei reſpondens abſciſſa vera chordae reperiatur.

6. Ad conſtructionem generalem huius Problematis adornandam in axe indefinito capiatur interuallum Tab. VI. Fig. 3.

$$a i = 2 i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

 ſuper

ſuper quo deſcribatur linea curua quaecunque $\alpha\eta$, ita vt applicatae extremae $a\alpha$ et $i\eta$ ſint inter ſe aequales, tum eadem haec curua tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum ſuper eodem axe replicetur, quoties lubuerit. Sufficiet autem vtrinque ſemel eam repetiuiſſe, quoniam tempus t non opus eſt vltra valorem

$$2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$

augere, tum ſi ad tempus quodcunque t velimus chordae figuram aſſignare; a puncto fixo a capiamus interuallum $at = it$, cui reſpondeat applicata $t\theta$, quo facto, vt in ipſa chordae figura inueniamus applicatam, quae reſpondeat cuicunque abſciſſae x, a termino A ſumtae (vbi iam perinde eſt in quamnam portionem chordae alter eius terminus cadat), quaeratur primo abſciſſa ficta v illi reſpondens et a puncto t vtrinque abſcindantur interualla aequalia $tu = tu' = v$, vt in ſcala conſtructionis habeantur binae applicatae $u\aleph$ et $u'\aleph'$, tum applicata figurae cordae quaeſita erit $y = u\aleph - u'\aleph'$, quae operatio ſi pro quauis abſciſſa x inſtituatur, hoc modo delineabitur tota cordae figura, pro iſto tempore t.

7. Quod ſi fuerit $t = 0$ et punctum t in ipſo puncto a capiatur, hoc modo reſultabit figura, quam chorda ipſo initio habuerit, tum vero etiam ipſe motus, qui ſingulis chordae elementis inerat, facile innoteſcet, quum enim in genere habeamus,

$$y = \Phi(it+v) - \Phi(it-v)$$

erit

erit celeritas puncti chordae reſpondentis

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\,\Phi' : (it + v) - i\,\Phi' : (it - v),$$

ideoque pro ſtatu initiali

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\,\Phi : (v) - i\,\Phi' : (-v)$$

atque hinc viciſſim, ſi ſtatus chordae initialis fuerit cognitus, tam ratione figurae, quam ratione motus, inueniri poterit ſcala conſtructionis conueniens, id quod aliquanto clarius expoſuiſſe iuuabit.

8. Scilicet ſi in ſtatu initiali, vbi $t = 0$, abſciſſae x a termino fixo A ſumtae, cui reſpondeat abſciſſa ficta $= v$, adplicata ſit $= \Gamma : v$, quoniam ſpectari poteſt, vt certa functio ipſius v, celeritas autem in eodem loco ſit $= i\,\Delta' : v$, vbi $\Delta' : v$ in $d\,v$ ductum exprimit differentiale $\Delta : v$, comparentur hi valores cum ſcala relationis, atque habebimus has aequationes:

$$\Phi : v - \Phi(-v) = \Gamma : v \text{ et } \Delta' : v = \Phi'(v) - \Phi'(-v)$$

quae poſterior aequatio in $d\,v$ ducta et integrata dat

$$\Phi(v) + \Phi(-v) = \Delta : v + F$$

ex qua aequatione cum priore deducitur

$$\Phi : v = \frac{\Delta : v + \Gamma : v}{2} + \tfrac{1}{2}F \text{ et } \Phi(-v) = \tfrac{1}{2}\Delta : v - \tfrac{1}{2}\Gamma : v + \tfrac{1}{2}F$$

ex quibus formulis ſcala relationis tam dextrorſum, quam ſiniſtrorſum a termino $v = 0$, vſque ad terminum

$$v = i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

 facile

facile conſtruetur et ſuper axe interuallum duplo maius

$$=2i\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$

complebitur, quam figuram deinceps tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum replicari oportet, caeterum notari conuenit, ſi ſcala celeritatum initialium ſuper abſciſſis fictis v exſtructa detur, ita vt eius applicata ſit $i\,\Delta' : v$, tum aream huius ſcalae fore

$$=i\,\Delta : v\text{, ideoque } \Delta : v = \frac{Areae}{i},$$

ſicque valor huius functionis $\Delta : v$ facillime innoteſcit. Euidens eſt hanc conſtructionem prorſus conuenire cum illa, quae circa chordas vniformis craſſitiei eſt tradita.

9. Caeterum diffiteri non poſſumus, quoniam in qualibet iunctura B, C lex continuitatis quodammodo interrumpitur, etiam aberrationem quampiam calculi a veritate admitti debere, quae autem quum tantum circa elementa chordae quam minima locum habeat, pro nihilo haberi poterit; quam ob cauſſam hae formulae adhiberi non poterunt, quando chorda prorſus habuerit craſſitiem per totam longitudinem variabilem, quia tum aberratio in omnibus punctis vſu veniret, atque idcirco valorem finitum adquireret. Huiusmodi autem aberratio tantum in figura chordae cerneretur, dum tempus cuiusque vibrationis idem eſſet proditurum, vti regula hic inventa poſtulat, quoniam ex aliis phaenomenis iam ſumus certi, tempora vibrationum non a figura chordarum pendere.

10.

10. Quare ſi chorda craſſitie vtcunque variabili fuerit praedita, pro abſciſſa quacunque $= x$, craſſities ita ſe habeat, vt ſi corda longitudinis $= k$ fuerit aeque craſſa, eius pondus futurum ſit $= V$, quoniam ergo huius elementi longitudo eſt $= dx$, ſi ponamus

$$2bk.\frac{K}{V} = uu,$$

pro formulis illis

$$= \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma} \text{ etc.}$$

hic indefinite habebimus $\frac{dx}{u}$, huius ergo formulae integrale, per totam cordae longitudinem ſumtum, dabit tempus ſingularum vibrationum, ita vt hoc tempus ſit

$$\int \frac{dx \surd V}{\surd (2bk.K)},$$

dum ſcilicet hoc integrale $\int dx \surd V$ per totam chordae longitudinem extenditur, quum igitur praecipua quaeſtio ſuper chordis vibrantibus in hoc verſetur, vt tempora vibrationum definiamus, ipſas autem figuras, quas chorda inter vibrandum induit, parum morari ſoleamus, quaeſtio de motu vibratorio chordarum, ex quotcunque partibus diuerſae craſſitiei eae fuerint compoſitae, ſiue adeo craſſitiem habeant vtcunque variabilem, nunc quidem pro perfecte ſoluta erit habenda.

DE

DE MOTV VIBRATORIO CHORDARVM CRASSITIE VTCVNQVE VARIABILI PRAEDITARVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Tab. VI. Fig. 4. Sit huiusmodi chorda in terminis A et B fixa et tenſa a vi ſeu pondere K, ponatur eius longitudo $AB = a$ et abſciſſa portione quacunque $AX = x$, craſſities in x ita ſit comparata, vt ſi haberetur chorda vniformis eiusdem craſſitiei, cuius longitudo $= k$, eius pondus futurum eſſet $= X$ denotante X functionem quamcunque ipſius x, quippe qua ratio craſſitiei variabilis continetur, hinc ergo elementi chordae dx maſſula ſeu ponduſculum erit $= \frac{X dx}{k}$, ideoque pondus portionis $AX = \frac{1}{k} \int X dx$ in quo integrali ſi fiat $x = a$, prodibit pondus totius chordae A B.

II. Ponamus nunc elapſo t min. ſec. punctum chordae X perueniſſe in Y, vbi quidem ſemper aſſumimus hoc interuallum $XY = y$ eſſe quaſi infinite paruum, ita vt omnes tangentes in his punctis Y infinite parum ab axe declinent, ac pro puncto Y haec declinatio aequetur angulo minimo $= u$. Haec

Haec igitur applicata X Y $= y$ erit ſunctio binarum variabilium t et x, vnde celeritas puncti Y a X digredientis erit $(\frac{dy}{dt})$ eiusque incrementum ſeu acceleratio $= \frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$, denotante b altitudinem lapſus pro vno minuto ſecundo, quae ducta in maſſam elementi dx dabit ipſam vim, qua elementum in Y ſecundum directionem X Y ſollicitatur $= \frac{X\,dx}{2bk}(\frac{ddy}{dt^2})$ quia enim excurſiones ſunt infinite paruae, punctum y aliter moueri nequit niſi in directione X Y.

III. Nunc igitur etiam vires, quibus punctum y reuera ſollicitatur, expendi oportet, quae aliae non ſunt niſi tenſiones, quibus punctum Y cum verſus A, tum in plagam oppoſitam verſus B vrgetur; ſit igitur Θ tenſio punctum Y verſus A trahens, hincque orietur vis in directione

abſciſſae X A $= \Theta \cos. \omega$

at in directione

applicatae Y X $= \Theta \sin. \omega$;

at pro elemento ſequente, quum ſit eius inclinatio ad axem $= \omega + d\omega$ et tenſio $= \Theta + d\Theta$; hinc naſcetur vis

ſecundum X B $= (\Theta + d.\Theta) \cos. (\omega + d\omega)$

et vis

in directione X Y $= (\Theta + d.\Theta) \sin. (\omega + d.\omega)$.

Iam vero vires in directione axis agentes ſe mutuo deſtruere debent, quia alioquin punctum Y non ſecundum applicatam moueretur, neceſſe igitur eſt, fiat

$\Theta \cos. \omega = (\Theta + d\Theta) \cos. (\omega + d\omega)$

 ideoque

ideoque

$$d\,\Theta\ \text{coſ.}\ \omega - \Theta.\, d\,\omega\ \text{ſin.}\ \omega = 0,$$

ideoque

$$d\,\Theta = \Theta\, d\,\omega.\ \frac{\text{ſin.}\ \omega}{\text{coſ.}\ \omega},$$

quia autem angulus ω eſt infinite paruus, vtique hinc ſequitur $d\,\Theta = 0$, ita vt tenſio Θ ſit conſtans ſeu per totam cordae longitudinem eadem; quare quum in termino A tenſio manifeſto aequetur ponderi K, quo chorda tenditur, erit vtique $\Theta = K$.

IV. Contemplemur nunc vires in directione X Y agentes, et quia ob

$$\text{ſin.}\ \omega = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)\ \text{prior vis in directione YX eſt}\ K\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)$$

altera autem huic contraria ipſo ſui differentiali augetur eritque idcirco

$$= K\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) + K\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

ſicque punctum Y reuera in directione X Y ſollicitabitur

$$\text{vi} = K\,d\,x\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

quae ergo neceſſario aequalis eſſe debet vi illi acceleratrici ſupra inuentae, vnde exoritur iſta aequatio:

$$\frac{X\,d\,x}{2\,b\,k}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = K\,d\,x\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right);$$

quae per $K\,d\,x$ diuiſa producit hanc aequationem finalem:

$$\frac{X}{2\,b\,k.\,K}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = \left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right).$$

Ponamus breuitatis gratia

$$\frac{K}{2\,b\,k.\,K} = w,$$

quae

quae ergo littera deſignat functionem ipſius x, a tempore t immunem, ita vt habeamus

$$w\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

quam autem aequationem adhuc nullo modo in genere reſoluere licuit, interim tamen per ſeriem infinitam eius integrale adeo completum exhiberi poteſt. Denotante enim Θ functionem quamcunque temporis t, litteris vero P, Q, R, S etc. functiones tantum alterius variabilis x; fingatur

$$y=P\Theta+Q\left(\frac{dd\Theta}{dt^2}\right)+R\left(\frac{d^4\Theta}{dt^4}\right)+S\left(\frac{d^6\Theta}{dt^6}\right)\text{ etc.}$$

et habebimus

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=P\left(\frac{dd\Theta}{dt^2}\right)+Q\left(\frac{d^4\Theta}{dt^4}\right)+R\left(\frac{d^6\Theta}{dt^6}\right)+S\left(\frac{d^8\Theta}{dt^8}\right)$$

et $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\Theta\left(\frac{ddP}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\Theta}{dx^2}\right)\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^4\Theta}{dt^4}\right)\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)$ etc.

quae ſeries vt praecedenti in w ductae aequetur, conſequimur has determinationes:

I°. $\left(\frac{ddP}{dx^2}\right)=0$ ideoque $P=\alpha x+\beta$

II°. $\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)=wP$; ſiue $Q=\int dx\int wPdx$

III°. $\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)=wQ$; ſiue $R=\int dx\int wQdx$

IV°. $\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)=wR$; ſiue $S=\int dx\int wRdx$ etc.

Verum hinc parum lucri impetramus, atque hanc ob rem conueniet caſus aliquot particulares euoluere, id quod in Problematibus ſequentibus expediemus.

Problema I.

Inuenire caſus, quibus aequationi differentiali inventae:

$$w\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

 ſatis-

ſatisfacit haec forma integralis:

$$y = p\,\Phi(t + \int z\,d\,x),$$

vbi p, z ſint functiones tantum ipſius x.

Solutio.

V. Character Φ hic denotat functionem quamcunque quantitatis ſuffixae $t + \int z\,d\,x$, nequidem functionibus discontinuis exceptis, cuius differentialia more ſolito, per Φ', Φ'', Φ''' etc. deſignabimus, ex hac autem forma ſtatim colligimus:

$(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = p\,\Phi''(t + \int z\,d\,x)$, tum vero reperimus

$(\frac{d\,y}{d\,x}) = (\frac{d\,p}{d\,x})\,\Phi(t + \int z\,d\,x) + p\,z\,\Phi'(t + \int z\,d\,x)$, hincque

$$(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}) = \frac{d\,d\,p}{d\,x^2}\,\Phi(t + \int z\,d\,x) + \frac{2\,z\,d\,p + p\,d\,z}{d\,x}\,\Phi'(t + \int z\,d\,x)$$
$$+ p\,z\,z.\,\Phi''(t + \int z\,d\,x),$$

cui illa forma in w ducta aequari debet, vnde ſequitur:

I°. $\frac{d\,d\,p}{d\,x^2} = 0$; ideoque $p = \alpha\,x + \beta$

II°. $2zdp + pdz = 0$; ſiue $zp^2 = C$ ideoque $z = \frac{C}{pp} = \frac{C}{(\alpha x + \beta)^2}$

III°. tandem eſſe debet $w = z\,z = \frac{C^2}{(\alpha\,x + \beta)^4}$.

Conſequenter ſi craſſities chordae ita fuerit comparata, vt fiat

$$w = \frac{X}{2\,b\,k.\,K} = \frac{C\,C}{(\alpha\,x + \beta)^4},$$

tum motum chordae actu definire licebit.

Euolutio caſus quo craſſities chordae ita variatur, vt fiat:

$$\frac{X}{2\,b\,k.\,K} = \frac{c\,c}{(n\,x + f)^4}.$$

VI.

VI. In hac expreſſione litterae c, et f perinde ac h, k et x denotant quantitates lineares, dum litterae t, n aeque ac pondera K, X in meris numeris dantur, ita vt conditio praeſcripta homogeneitate gaudeat. Hac forma cum ſupra inuenta collata erit primo $C = c$; $\alpha = w$; et $\beta = f$ ideoque

$$p = nx + f \text{ et } z = \frac{c}{(nx+f)^2}$$

hincque

$$\int z\,dx = \int \frac{c\,dx}{(nx+f)^2} = \frac{c}{n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{nx+f}\right) = \frac{cx}{f(nx+f)}.$$

Quum igitur pro eadem chorda, cuius craſſitiem quadratum cc inuoluit, loco c etiam $-c$ ſcribere liceat; haec quoque forma integralis locum habebit:

$$y = (nx+f)\,\psi\left(t - \frac{cx}{f(nx+f)}\right),$$

quocirca introducendo binas functiones arbitrarias Φ et ψ nanciſcimur verum integrale completum pro noſtro caſu, ſcilicet:

$$y = (nx+f)\Phi\left(t + \frac{cx}{f(nx+f)}\right) + (nx+f)\psi\left(t - \frac{cx}{f(nx+f)}\right).$$

VII. Nihil igitur aliud ſupereſt, niſi vt hoc integrale completum ad ſtatum noſtrae quaeſtionis adcommodemus. Ac primo quidem quum poſito $x = 0$, eſſe debeat $y = 0$; euidens eſt, functionem ψ alteri Φ ſub ſigno contrario aequari debere, ita vt iam habeamus

$$y = (nx+f)\Phi\left(t + \frac{cx}{f(nx+f)}\right) - (nx+f)\Phi\left(t - \frac{cx}{f(nx+f)}\right).$$

Quo igitur etiam in altero termino ſumto $x = a$ denuo fiat $y = 0$, neceſſe eſt vt ſit

$$\Phi\left(t + \frac{ca}{f(na+f)}\right) = \Phi\left(t - \frac{ca}{f(na+f)}\right),$$

 vnde

vnde intelligimus, functionem Φ ſiue lineam curuam hac functione deſignatam ita comparatam eſſe debere, vt dum abſciſſae interuallo $= \frac{2ca}{f(na+f)}$ augentur, applicatae continuo eaedem recurrant, quemadmodum hanc conditionem in Diſſertatione ſuperiori de chordis vniformibus fuſe explicauimus. Hinc porro ſequitur, quum initio fuiſſet $t = 0$; elapſo tempore $t = \frac{2ca}{f(na+f)}$ min. ſec., chordam perfecte in priſtinum ſtatum reſtitui, duplici vibratione peracta, ita vt tempus vnius vibrationis futurum ſit $= \frac{ca}{f(na+f)}$ ſec. ſiue quod eodem redit haec chorda ſingulis minutis ſecundis $\frac{f(na+f)}{ca}$ abſoluet vibrationes. Hocque adeo caſu coniectura, quam in ſuperiore diſſertatione innuimus, egregie confirmatur, quod enim hic vocauimus X, ibi erat V, tempus vibrationis autem aſſeruimus ibi eſſe $= \int \frac{dx \sqrt{V}}{\sqrt{2bk.K}}$, dum integrale per totam chordae longitudinem $x = a$ extenditur, hic autem tempus vibrationis prodiit $= \int z\,dx$, integrali etiam per totam chordae longitudinem extenſo exiſtente

$$z = \sqrt{w} = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{2bk.K}},$$

quae eſt prorſus eadem forma.

Problema II.

Inuenire caſus, quibus aequationi noſtrae differentiali talis ſatisfacit forma integralis:

$$y = p\,\Phi\,(t + \int z\,dx) + q\,\Phi'\,(t + \int z\,dx).$$

Solutio.

Solutio.

VIII. Euolutione huius formae facta, reperiemus vt ſequitur:

	$\Phi(t+\int z\,dx)$	$\Phi'(t+\int z\,dx$	$\Phi''(t+\int z\,dx)$	$\Phi'''(t+\int z\,dx)$
$\left(\frac{ddy}{dx^3}\right)=$	$+\frac{ddp}{dx^2}$	$+\frac{2z\,dp+p\,dz}{dx}$ $+\frac{ddq}{dx^2}$	pzz $+\frac{2z\,dq+q\,dz}{dx}$	$+qzz$
$w\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=$			pw	$+qw$

quocirca ſequentes conditiones adimpleri oportet

I°. $\frac{ddp}{dx}=0$; ſiue $p=\alpha x+\beta$;

II°. $2z\,dp+p\,dz+\frac{ddq}{dx}=0$; ſiue $\frac{ddq}{dx}=-(2z\,dp+p\,dz)$

III°. $\frac{2z\,dq+q\,dz}{dx}+pzz=pw$;

IV°. $qzz=qw$, ideoque $zz=w$.

Qui poſtremus valor $w=zz$ in penultima ſubſtitutus praebet

$$2z\,dq+q\,dz=0,$$

quae in q ducta et integrata praebet $zqq=C$. Hinc igitur habemus

$$z=\frac{C}{qq} \text{ et } dz=-\frac{2C\,dq}{q^3},$$

vnde noſtra ſecunda aequatio fit

$$\frac{ddq}{dx}+\frac{2C\,dp}{qq}-\frac{2Cp\,dq}{q^3}=0:$$

verum ob

$$p=\alpha x+\beta \text{ erit } dx=\frac{dp}{\alpha};$$

et per $2C$ diuidendo fiet

$$\frac{\alpha\,ddq}{2C\,dp}+\frac{q\,dp-p\,dq}{q^3}=0,$$

vbi

vbi elementum dp ſumtum eſt conſtans. Verum ſecunda aequatio ſponte fit integrabilis multiplicata per p, quum enim ſit $dp = \frac{dx}{\alpha}$, ea transformatur in hanc:

$$\frac{\alpha p\, ddq}{dp} + 2zp\, dp + pp\, dz = 0,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{\alpha(p\, dq - q\, dp)}{dp} + 2zpp = D.$$

Modo ante autem habebamus $z = \frac{C}{qq}$, ita vt nunc habeamus

$$\frac{\alpha(p\, dq - q\, dp)}{dp} + \frac{Cpp}{qq} = D$$

quae poſito $q = up$ abit in hanc:

$$\alpha pp\, du + \frac{C\, dp}{uu} = D\, dp$$

vnde colligitur

$$\frac{dp}{pp} = \frac{\alpha uu\, du}{Duu - C} = \frac{\alpha}{D} \cdot du + \frac{\alpha C}{D} \cdot \frac{du}{Duu - C}$$

vnde u per p vel viciſſim facile definitur. Quo invento erit

$$q = pu \text{ et } z = \frac{C}{qq} \text{ et } w = zz = \frac{CC}{q^4}.$$

IX. Quia autem hinc quantitas u non per p, ſed viciſſim p per u definitur, excepto ſolo caſu $D = 0$, quandoquidem quantitatem C nihilo aequare non licet; caſus $D = 0$ vtique ſingularem euolutionem meretur, pro quo ſtatim habemus

$$-\frac{\alpha uu\, du}{C} = \frac{dp}{pp},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{1}{p} + E = \frac{\alpha u^3}{3C}$$

ideo-

ideoque

$$u = \sqrt[3]{\left(\frac{3\,C}{\alpha\,p}.(1 + E\,p)\right)};\ \text{hincque porro}$$

$$q = p\sqrt[3]{\frac{3\,C}{\alpha\,p}(1 + E\,p)} = \sqrt[3]{\frac{3\,C\,p\,p}{\alpha}(1 + E\,p)}$$

$$z = \frac{C}{p\,p\sqrt[3]{\frac{q\,C\,C}{\alpha^2\,p^2}(1+Ep)^2}} = \frac{C}{p\sqrt[3]{\frac{q\,C\,C\,p}{\alpha\,\alpha}(1+Ep)^2}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{\alpha\,\alpha\,C}{q}}}{p\sqrt[3]{p(1+Ep)^2}}$$

$$w = \frac{C\,C}{p\,p\sqrt[3]{\frac{81.\,C^4\,p\,p}{\alpha}(1+Ep)^4}} = \frac{C\,C}{\frac{3\,C}{\alpha}p\,p(1+Ep)\sqrt[3]{\frac{3\,C\,p\,p}{\alpha}(1+Ep)}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\alpha^4\,C\,C}}{\sqrt[3]{81.\,p^8\,(1 + E\,p)^4}}.$$

Hinc autem conſequitur formula integralis

$$\int z\,d\,x = -\sqrt[3]{\frac{3\,C(1 + E\,p)}{\alpha\,p}}.$$

X. Quo has formulas concinniores reddamus et ſimul homogeneitati conſulamus, ſtatuamus

$$p = n\,x + f;\ \text{vt ſit}\ \alpha = n,$$

tum vero ſumamus

$$C = \tfrac{1}{3}c\ \text{ et }\ 1 + E\,p = \frac{n\,x + f + g}{g}$$

et habebimus

$$\int z\,d\,x = -\sqrt[3]{\frac{c\,(n\,x + f + g)}{n\,g\,(n\,x + f)}}$$

hinc

$$z = \frac{\sqrt[3]{n\,n\,g\,g\,c}}{3\sqrt[3]{(nx+f)^4(nx+f+g)^2}};\ w = \frac{\sqrt[3]{n^4\,g^4\,c\,c}}{9\sqrt[3]{(nx+f)^8(nx+f+g)^4}}$$

ac denique

$$q = \sqrt[3]{\frac{c(nx+f)^2(nx+f+g)}{ng}}.$$

Caeterum quia integrale $\int z\,dx$ ita capi conuenit, vt euaneſcat poſito $x = 0$, hoc obſeruato erit

$$\int z\,dx = \sqrt[3]{\frac{c(f+g)}{nfg}} - \sqrt[3]{\frac{c(nx+f+g)}{ng(nx+f)}}.$$

XI. Quoniam $w = zz$, patet, pro eodem valore ipſius w litteram z tam poſitiue, quam negatiue accipi poſſe, at ſi eam negatiue capiamus, quod fit, dum loco c ſcribimus $-c$, etiam littera q valorem ſortitur negatiuum, vnde pro eadem aequatione differentiali etiam ſequens forma integralis valebit

$$y = p\,\psi(t - \int z\,dx) - q\,\psi'(t - \int z\,dx)$$

quae forma ſi ad ante inuentam addatur, habebitur integrale completum noſtrae aequationis, quippe quod erit

$$y = p\,\Phi(t + \int z\,dx) + p\,\psi(t - \int z\,dx)$$
$$+ q\,\Phi'(t + \int z\,dx) - q\,\psi'(t - \int z\,dx).$$

Haec autem forma difficulter ad motum chordarum adcommodari poteſt, quandoquidem etiamſi ſumamus $\psi = -\Phi$ pro caſu $x = 0$, non fit $y = 0$, multo minus pro caſu $x = a$ quaeſtioni ſatisfieri poterit.

Problema III.

Propoſita aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$zz\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right);$$ vbi

vbi z denotet quamcunque functionem ipſius x tantum; eius integrale per huiusmodi ſeriem infinitam exprimere:

$$y = p\Phi(t+\int z\,dx) + q\Phi'(t+\int z\,dx) + r\Phi''(t+\int z\,dx) + s\Phi'''(t+\int z\,dx) \text{ etc.}$$

Solutio.

XII. Si ſinguli iſti termini per differentiationem, vt ante, euoluantur, vbi iam vidimus eſſe $w = zz$, ſequentes conditiones erunt adimplendae:

I. $ddp = 0$; II. $\frac{ddq}{dx} + 2z\,dp + p\,dz = 0$

III°. $\frac{ddr}{dx} + 2z\,dq + q\,dz = 0$; IV°. $\frac{dds}{dx} + 2z\,dr + r\,dz = 0$ etc.

Ex prima ſtatim colligitur $p = nx + f$, ſecunda ad hanc formam reducta

$$\frac{ddq}{dx} + \frac{1}{p}d.ppz = 0,$$

ſtatim praebet

$$\frac{dq}{dx} = -\int \frac{1}{p}d.ppz \text{ ideoque } q = -\int dx \int \frac{1}{p}d.ppz,$$

quemadmodum autem hic q exprimitur per z et p, ita quoque r exprimetur per z et q ita, vt ſit

$$r = -\int dx \int \frac{1}{q}d.qqz,$$

eodemque modo porro

$$s = -\int dx \int \frac{1}{r}d.rrz \text{ etc.}$$

Alia Solutio.

Solutio adhuc concinnior reddi poteſt, ſumendo $z = \frac{1}{2}vv$, vt aequatio propoſita ſit

$$\frac{1}{4}v^4\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

 tum

tum enim manente $p = nx + f$, ſecunda conditio hanc induet formam

$$\frac{ddq}{dx^2} + vvdp + pvdv = 0; \text{ ſiue}$$

$$\frac{ddq}{dx} = -v(vdp + pdv) = -vd.pv,$$

vnde fit

$$q = -\int dx \int v.d.pv,$$

eodemque modo reperitur

$$r = -\int dx \int vd.qv \text{ et } s = -\int dx \int vd.rv \text{ etc.}$$

XIII. Haec ergo forma in infinitum eſt continuanda, niſi forte eueniat, vt quaepiam litterarum q, r, s etc. euaneſcat tum enim totum integrale forma finita exprimetur; et quia pro eodem valore $zz = \frac{1}{4}v^4$, quantitatem z ſiue uu etiam negatiue ſumere licet, gemina huiusmodi forma obtinebitur, quae coniunctim integrale completum referet, id quod caſibus, quibus omnes hae quantitates euadunt ſimplices poteſtates ipſius x, clarius elucebit. Quodſi autem ſumto $v = \alpha x^\lambda$ quaecunque litterarum p, q, r, s etc. fuerit $= Ax^n$, ſequens erit

$$-\frac{A\alpha^2(n+\lambda)}{(n+2\lambda)(n+2\lambda+1)} \cdot x^{n+2\lambda+1}.$$

Quam ob rem quum pro his caſibus ſit vel $p = 1$, vel $p = x$, ſequentes valores ſequenti modo ſe habebunt:

Pro primo caſu, quo $p = 1$, habebimus

$$q = -\frac{\alpha\alpha\lambda}{2\lambda(2\lambda+1)} \cdot x^{2\lambda+1}; \; r = +\frac{\alpha^4\lambda(3\lambda+1) \cdot x^{4\lambda+2}}{2\lambda(2\lambda+1)(4\lambda+1)(4\lambda+2)}$$

$$s = -\frac{\alpha^6\lambda(3\lambda+1)(5\lambda+2) \cdot x^{6\lambda+3}}{2\lambda(2\lambda+1)(4\lambda+1)(4\lambda+2)(6\lambda+2)(6\lambda+3)} \text{ etc.}$$

haec

haec progreſſio igitur abrumpitur, quoties fuerit vel $\lambda = 0$, vel $3\lambda + 1 = 0$ ſeu $\lambda = -\frac{1}{3}$, vel $\lambda = -\frac{2}{5}$, vel $\lambda = -\frac{3}{7}$ ideoque in genere ſi $\lambda = -\frac{i}{2i+1}$, quo caſu fit $v = a\, x^{\frac{-i}{2i+1}}$ hincque $z = \frac{1}{2}\alpha\alpha\, x^{\frac{-2i}{2i+1}}$ ergo $zz = \frac{1}{4}\alpha^4 .\, x^{\frac{-4i}{2i+1}}$.

Pro poſteriore caſu, quo $p = x$, habebimus:

$$q = -\frac{\alpha\alpha(\lambda+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)}x^{2\lambda+2};\ r = +\frac{\alpha^4(\lambda+1)(3\lambda+2) .\, x^{4\lambda+3}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(4\lambda+2)(4\lambda+3)}$$

$$s = -\frac{\alpha^6(\lambda+1)(3\lambda+2)(5\lambda+3) .\, x^{6\lambda+4}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(4\lambda+2)(4\lambda+3)(6\lambda+3)(6\lambda+4)}\ \text{etc.}$$

quae progreſſio abrumpitur, quoties fuerit vel $\lambda = -1$ vel $\lambda = -\frac{2}{3}$; vel $= -\frac{3}{5}$ et in genere ſi fuerit $\lambda = -\frac{i}{2i-1}$, vnde fit $v = \alpha x^{\frac{-i}{2i-1}}$; $z = \frac{1}{2}\alpha\alpha\, x^{\frac{-2i}{2i-1}}$ et $zz = \frac{1}{4}\alpha^4\, x^{\frac{-4i}{2i-1}}$. Hique caſus manifeſto conueniunt cum iis, qui in famoſa aequatione Riccatiana locum habent.

XIV. At ſuper ſolutione generali §. 12. id imprimis memoratu dignum vſu venit, quod omnes litterae p, q, r, s etc. per geminam integrationem definiantur, ideoque binas conſtantes arbitrarias recipiant, quum tamen iam character Φ omnes poſſibiles functiones in ſe inuoluat. Verum hoc nequaquam mirum videri debet, ſi enim haec forma

$$p\Phi(t+\int z dx) + q\Phi' \ldots + r\Phi'' \ldots + s\Phi''' \ldots \text{ etc.}$$

aequationi noſtrae differentiali ſatisfaciat, euidens eſt, etiam ſequentes formas eſſe ſatisfacturas:

$$p\Phi' \ldots + q\Phi'' \ldots + r\Phi''' \ldots \text{ etc. item } p\Phi'' \ldots + q\Phi''' \ldots \text{ etc.}$$

atque hinc huiusmodi formae coniunctae pariter ſatisfacient, veluti

$$p\Phi \ldots + (q+\alpha p)\Phi' \ldots + (r+\alpha q+\beta p)\Phi'' \ldots + (s+\alpha r+\beta q+\gamma p)\Phi''' \ldots \text{etc.}$$

hicque adeo prima quantitas p, quum ſit $= nx+f$, in poſterioribus formis adiectis diuerſos valores induere poterit, vnde ratio huius multiplicitatis in oculos incurrit.

XV. Quum igitur litterae p, q, r, s etc. duplicem determinationem ab arbitrio noſtro pendentem recipere queant, ſingulas ita conſtituere licebit, vt pro vtroque chordae termino, ſcilicet tam ſi $x = 0$, quam ſi $x = a$, euaneſcant, quod adeo in prima p fieri poſſet ſumendo $f = 0$ et $n = 0$, quo quidem caſu chorda in quiete perſiſteret, at quomodocunque litteram p accipere lubuerit, omnes litterae ſequentes q, r, s etc. ſemper ita definiri poſſunt, vt euaneſcant poſito tam $x = 0$ quam $x = a$, quae circumſtantia nobis facilem ſuppeditat ſolutionem ſequentis Problematis, quod generaliſſime motum omnium plane chordarum in ſe complectitur, quo omnia quae de hoc argumento deſiderari ſolent, referri poſſunt.

Problema Generaliſſimum.

Si chorda craſſitiei vtcunque variabilis, in duobus terminis fixa, a vi quacunque fuerit tenſa, definire tempus ſingularum vibrationum, quas edet impulſa.

Solutio.

Solutio.

Chordae craſſities ſe habeat eo modo, vti ſupra §. 1. et vocetur eius longitudo $AB = a$ et vis chordam tendens aequetur ponderi K, tum vero ponatur

$$zz = \frac{X}{2bk.K},$$

et quum motus chordae definiatur hac aequatione generali

$$zz\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

modo ante vidimus huic aequationi tali forma:

$$y = p\Phi(t + \int z\,dx) + q\Phi' \ldots r\Phi'' \ldots + s\Phi''' \ldots \text{etc.}$$

ita ſatisfieri poſſe, vt poſt primum ſinguli coefficientes q, r, s etc. pro vtroque chordae termino euaneſcant tam poſito $x = 0$, quam $x = a$. His iam coefficientibus ita determinatis et ſumto $p = 1$, aequatio integralis completa ita exhiberi poterit, vt ſit

$$\begin{aligned} y = \Phi(t + \int z\,dx) & \quad - \psi(t - \int z\,dx) \\ + q\,\Phi'(t + \int z\,dx) & \quad - q\,\psi'(t - \int z\,dx) \\ + r\,\Phi''(t + \int z\,dx) & \quad + r\,(\psi''(t - \int z\,dx) \\ + s\,\Phi'''(t + \int z\,dx) & \quad + s\,(\psi'''(t - \int z\,dx). \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Quum enim aequatio inuoluat quadratum zz, eius radicem z tam poſitiue quam negatiue capere licet, et ex ſuperioribus facile colligitur, ſumto z negatiue, coefficientium alternos ſignum contrarium recipere debere; nihil aliud igitur ſupereſt, niſi vt hoc integrale completum ad ſtatum quaeſtionis accommode-

modetur, quo requiritur, vt poſito ſiue $x = 0$ ſiue $x = a$, valor ipſius y in nihilum abeat. Ponamus igitur $x = 0$ et formulam $\int z\,dx$ ita captum aſſumamus, vt euaneſcat poſito $x = 0$ atque ob euaneſcentes q, r, s, t etc. habebimus $y = 0$, vnde manifeſto ſequitur, functionem ψ conuenire debere cum functione Φ ita, vt ſit $\psi = \Phi$. Nunc ergo pro caſu $x = a$, quo litterae q, r, s, t etc. itidem annihilantur, ſumamus formulam $\int z\,dx$ accipere valorem $= A$, et nunc habebitur

$$y = \Phi(t + A) - \Phi(t - A) = 0,$$

vnde diſcimus, indolem iſtius functionis Φ ita comparatam eſſe debere, vt ſemper fiat

$$\Phi(t + 2U) = \Phi t$$

quicquid fuerit U, id quod etiam in functionibus Φ', ψ' locum habebit. Quocirca in quocunque ſtatu chorda fuerit pro ſtatu praeſenti, poſt elapſum tempus $\frac{t}{2A}$ in eundem ſtatum reuertetur, hocque temporis interuallo binas abſoluiſſe vibrationes cenſeri ſolet, ita vt tempus vnius vibrationis ſit $= A$. Ecce ergo ſolutionem noſtri Problematis, quae ita ſe habebit: ob $zz = \frac{X}{2bk.K}$ ſumatur integrale formulae $\int dx\sqrt{X}$ per totam longitudinem chordae extenſum ac tempus ſingularum vibrationum in minutis ſecundis expreſſum erit $\int\frac{dx\sqrt{X}}{\sqrt{2bk.K}}$, ex quo vibrationum vno minuto ſecundo editarum numerus erit $\frac{\sqrt{2bk.K}}{\int dx\sqrt{X}}$, omnino vti hactenus coniectura inducti ſtatuimus.

DE MOTV VIBRATORIO LAMINARVM ELASTICARVM, VBI PLVRES NOVAE VIBRATIONVM SPECIES HACTENVS NON PERTRACTATAE EVOLVVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Quamquam hoc argumentum iam olim fuſius pertractaui, tamen quoniam ab eo tempore vera methodus huiusmodi quaeſtiones ſoluendi demum excoli eſt coepta, non inutile erit idem problema denuo tractare.

I. Laminam igitur elaſticam hic ſum conſideraturus per totam longitudinem eiusdem craſſitiei atque eodem elateris gradu praeditam, cuius maſſam ſeu pondus ita in calculum introduco, vt pro longitudine laminae $=k$, maſſam ſeu pondus ponam $=K$, tum vero hanc laminam in ſtatu ſuo naturali in directum extenſam aſſumo, quae ob elaſticitatem omni incuruationi ita reſiſtat, vt momentum virium ipſi datam curuaturam inducentium radio oſculi eius curuaturae ſit reciproce proportionale, ſcilicet ſi alicubi radius curuaturae fuerit $=r$, ad laminam in hoc ſtatu curuato conſeruandam requiretur momentum virium $=\frac{Ccc}{r}$.

Tab. VII. Fig. 1. II. Sit igitur A B huiusmodi lamina elaſtica, altero termino A a muro ſeu parieti immobili infixa, quae deinde a viribus quotcunque incuruata ſit in ſtatum A Y F, quam minime a ſtatu naturali A B diſcrepantem, quoniam enim hic de vibrationibus minimis quaeſtio inſtituitur, curua A Y F tam parum a recta A B ceu axe recedere eſt ſumenda, vt omnes applicatae X Y ſint quaſi infinite paruae, et dum lamina motu vibratorio agitatur, ſingula eius puncta Y ſecundum ipſas applicatas X Y, ſiue accedendo ad axem, ſiue inde recedendo moueantur. Hinc ſi abſciſſa a termino B computata vocetur $BX = x$ et applicata $XY = y$, quoniam haec vt infinite parua ſpectatur, ipſe arcus F Y abſciſſae $BX = x$ aequalis cenſeri poterit, quemadmodum etiam arcus A Y rectae A X aequalis cenſetur. Hinc portionis laminae F Y maſſa ſeu pondus erit $= \frac{Kx}{k}$, eiusque elementi pondusculum $\frac{Kdx}{k}$, ac ſi longitudinem huius laminae vocemus $BA = a$, eius maſſa ſeu pondus erit $\frac{Ka}{k}$. Praeterea ex formulis notiſſimis radii oſculi Y R in puncto Y surſum vergentis valor eſt $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, denotante ds elementum curuae, quod quum ſit aequale elemento abſciſſae dx, radius iſte oſculi $YR = r$ erit $= \frac{dx^2}{ddy}$, hincque momentum huic curuaturae debitum erit $= \frac{Kcc.\,ddy}{dx^2}$. Scilicet ſi in F applicata concipiatur vis quaepiam Ff, ea tanta eſſe debet, vt eius momentum reſpectu puncti Y fiat $= \frac{Kccddy}{dx^2}$, tum enim iſta vis hanc curuaturam conſeruare valebit.

III.

III. Contemplemur iam ipſum motum vibrationum, ac tempore quodam ab initio elapſo $= t$, quod in minutis ſecundis dari ſumimus, lamina acceperit figuram A Y F, ac ſi motum quaſi ab axe recedentem ſpectemus, celeritas puncti Y in directione Y V referatur formula $\frac{dy}{dt}$ quatenus ſcilicet hic y a ſolo tempore t pendere concipitur, ita vt dy hic denotet augmentum, quod diſtantia X Y $= y$, tempuſculo dt accipit, hincque acceleratio huius puncti exprimetur formula $\frac{ddy}{dt^2}$, quae vt etiam ad menſuras abſolutas reuocetur, exhibebit ipſam vim acceleratricem ſi diuidatur per $2h$, denotante h altitudinem, per quam grauia vno minuto ſecundo delabuntur, ſicque vis acceleratrix ſecundum directionem X V erit $= \frac{ddy}{2h\,dt^2}$, dum ſcilicet vis acceleratrix grauitatis naturalis vnitate repraeſentatur.

IV. Quum autem hic in motum totius laminae A Y F inquiramus; perſpicuum eſt, applicatam X Y $= y$, functionem eſſe duarum variabilium abſciſſae ſcilicet B X $= x$ et temporis $= t$, ita vt in ea duplex variabilitas ineſſe poſſit; ad has igitur variationes diſtinguendas, more ſolito vtemur formulis vncinulis incluſis ſicque formula radium oſculi in Y exhibens, quoniam ibi ſola x variabilis ſtatuitur, ita referetur $(\frac{dx^2}{ddy})$, vnde momentum elaſticitatis in hoc loco $= Kcc(\frac{ddy}{dx^2})$, breuitatis ſcilicet gratia hic momentum elaſticitatis voco illud virium momentum, quod ad illam curuaturam retinendam poſtulatur, ſimilique modo vis illa acceleratrix in

 dire-

directione X V, vbi ſolum tempus t variari aſſumitur, ita exhiberi debet, vt ſit $\frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$, ex quo manifeſtum eſt, hanc inueſtigationem ad illam partem calculi integralis pertinere, quae circa functiones duarum variabilium verſatur, atque hoc ipſo iſta quaeſtio ab aliis, vbi vnius tantum variabilis functiones quaeruntur, maxime diſcrepat ac prorſus ſingularem ſoluendi methodum poſtulat, ſiquidem ſolutionem perfectam et latiſſime patentem deſideremus, quemadmodum occaſione Problematis de chordis vibrantibus ſaepius iam eſt inculcatum.

V. Vt ergo talis motus, qualem laminae noſtrae illis formulis Analyticis tribuimus, reuera producatur, ſingulis elementis $Xy = dx$, quorum maſſula ſeu ponduſculum eſt $\frac{K\,dx}{k}$, vis acceleratrix ſecundum directionem Y V $= \frac{1}{2b}(\frac{ddy}{dt^2})$, hincque vis motrix $= \frac{K\,dx}{2kb}(\frac{ddy}{dt^2})$ applicata eſt intelligenda, ſcilicet ſi ſingulis laminae elementis huiusmodi vires Y V $= \frac{K\,dx}{2bk}(\frac{ddy}{dt^2})$ eſſent applicatae, illae praeciſe illum ipſum motum laminae eſſent inducturae, quem formulae noſtrae Analyticae inuoluunt, quare vt hic motus cum veritate conueniat, neceſſe eſt, vt omnes iſtae vires elementares aequiualeant illis viribus, quibus lamina reuera ſollicitatur, laminae autem nullae aliae vires ſunt applicatae, niſi quibus muro infixa retinetur.

VI. In hoc ipſo autem cardo quaeſtionis praecipue verſatur, quales vires intra murum exſeri debe-

debeant, vt lamina inflexioni reſiſtere poſſit, hicque ſtatim facile perſpicitur, vnicam vim verbi gratia in puncto A applicatam, quantumuis fuerit magna, nequaquam inflexioni reſiſtere poſſe, verum ſi praeterea alia vis veluti in puncto *a* in directione contraria applicetur, quilibet facile intelliget, huiusmodi duabus viribus ſimul agentibus, deſideratum effectum vtique produci poſſe, hoc autem loco nobis ſufficit noſſe, omnes vires, quibus lamina noſtra actu ſollicitatur, ſemper reduci poſſe ad binas vires in punctis A et *a* applicatas, de quarum quantitate nondum ſumus ſolliciti, quandoquidem pro quouis laminae ſtatu vehementer variari poſſunt, verum ipſa demum ſolutio nobis has vires declarabit, atque tum manifeſtum fiet quantas vires murus ſeu paries a portione infixa A *a* quouis momento ſuſtineat.

VII. Tota ergo quaeſtio huc redit, quomodo vires illae elementares $Y\,V = \frac{K\,dx}{2\,bk}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right)$ comparatae eſſe debeant, vt binis illis viribus in A et *a* applicandis etiamſi ignotis aequiualeant, tum autem iſtae vires elementares illis, quae in punctis A et *a* applicatae concipiuntur, aequiualebunt, ſi eaedem vires Y V laminae in directione contraria applicatae cum binis iſtis poſtremis in aequilibrio fuerint conſtitutae, ſicque hoc modo tota quaeſtio ad inueſtigationem ſtatus aequilibrii reducitur, ita vt nunc non amplius ipſe motus in conſiderationem veniat. Hanc ob rem ſingulis punctis laminae Y in plagam contrariam applicentur vires illae elementares Tab. VII. Fig. 2.

$$Y\,V = \frac{K\,dx}{2\,bk}\left(\frac{d\,dy}{dt^2}\right),$$

 quas

quas formulam breuitatis gratia per $p\,d\,x$ deſignemus, vt ſit vis

$$Y\,V = p\,d\,x = \frac{K\,d\,x}{2\,b\,k}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

atque has vires ita comparatas eſſe oportet, vt cum binis illis viribus laminae in punctis A et *a* applicatis in aequilibrio conſiſtant, hoc modo ſi punctum laminae Y conſideremus, atque ambas laminae portiones F Y et A Y vtrinque circa Y ſitas ſpectemus, illa portio F Y nullas alias vires ſuſtinet niſi quas hic elementares nominamus, dum altera portio A Y duas inſuper vires ignotas in A et *a* gerit, quae ergo duplices vires reſpectu Y vtrinque in aequilibrio eſſe debent, ſufficiet igitur vires portioni B Y applicatas ſpectaſſe, quae quum laminae curuaturam in ipſo puncto Y ſuſtentare debeant, quandoquidem illis remotis portio Y F ſtatim in directum extenderetur, momentum iſtarum virium aequari debet ipſi illi momento elaſticitatis ſupra definito, quod erat

$$= K\,c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

vnde ſtatim principalem aequationem conſequemur; quae totam Problematis ſolutionem continebit.

VIII. Quo igitur commodius momentum omnium iſtarum virium elementarium reſpectu puncti Y eruamus, hoc ipſum punctum tantiſper quaſi fixum ſpectemus, ita vt coordinatae *x* et *y* pro conſtantibus habeantur, atque ab F verſus Y progre-

progrediendo, ſumamus punctum y variabile, pro quo idcirco coordinatae

$$Bx = X \text{ et } xy = Y$$

nunc noſtrae erunt variabiles, huicque puncto y in directione yx applicata ſit vis $= P\,dX$ cuius momentum reſpectu puncti Y erit

$$Px\,X.\,Xx = P\,dX\,(x - X),$$

ſumto ergo huius formulae integrali, momentum ab omnibus viribus arcui Fy applicatis oriundum erit ob x conſtans

$$= x \int P\,dX - \int P\,X\,dX,$$

quod quidem ita ſumi debet, vt euaneſcente abſciſſa $Bx = X$ ſimul euaneſcat. Transferamus iam punctum y vsque in Y fietque $X = x$ et $P = p$, conſequenter momentum omnium virium elementarium per portionem F Y reſpectu puncti Y erit

$$= x \int p\,dx - \int p\,x\,dx = \int dx \int p\,dx$$
$$= \int dx \int \tfrac{K\,dx}{2\,bk} \left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right) = \tfrac{K}{2\,bk} \int dx \int dx \left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right),$$

quae duplex integratio ita eſt inſtituenda, vt ſumto $x = 0$ tam integrale

$$\int dx \left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right), \text{ quam } \int dx \int dx \left(\tfrac{ddy}{dt^2}\right)$$

euaneſcat, quandoquidem puncto Y in ipſo termino F ſumto, nullae plane vires adſunt vltra F agentes.

IX. Momentum ergo hoc modo inuentum aequari debet ipſi momento elaſticitatis in puncto Y, quatenus autem in figura hae vires elementares deor-

deorſum tendunt, non ſolum curuaturam in Y non ſuſtinerent, ſed adeo ad extenſionem in directum deducerent, ex quo manifeſtum eſt, accelerationem illam $(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$ neceſſario valorem negatiuum habere debere, quod etiam ipſa rei natura manifeſto declarat, nam dum lamina A F a ſtatu naturali digreditur, eius motus certe non accelerabitur, ſed potius retardabitur, quo obſeruato ſequentem aequationem nanciſcimur:

$$-\frac{K}{2\,b\,k}\int d\,x \int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = K\,c\,c\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2});\ \text{ſiue}$$

$$-\int d\,x \int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = 2\,b\,k\,c\,c\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}),$$

qui coefficiens poſtremus quum neceſſario ſit poſitiuus, ponamus breuitatis gratia $2\,b\,k\,c\,c = b^4$, vt habeamus hanc aequationem:

$$-\int d\,x \int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2})$$

et quia in illa integratione ſola x vt variabilis ſpectatur, ſumtis vtrinque differentialibus, habebimus

$$-\int d\,x\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d^3\,y}{d\,x^3})\ \text{ac denuo differentiando}$$

$$-(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = b^4\,(\frac{d^4\,y}{d\,x^4}),$$ a cuius formulae ſatis concinnae integratione tota ſolutio noſtri Problematis pendet.

X. Hic igitur quaeritur, cuiusmodi functio applicata y debeat eſſe binarum variabilium x et t, vt aequationi differentiali quarti ordinis, quam modo elicuimus, ſatisfiat. Ante autem quam hoc negotium ſuſcipiamus, omnes conditiones perpendiſſe iuuabit, quibus quadruplex integratio iſtius aequationis

tionis, determinari atque ad noſtrum caſum accommodari debebit. Ac primo quidem iam vidimus, ſumta abſciſſa $x = o$, hoc eſt pro ipſo termino extremo F, tam $\int p\,d\,x$ quam $\int d\,x \int p\,d\,x$ euaneſcere debere, quare quum fuerit

$$\int p\,d\,x = -\,K\,c\,c\left(\frac{d^3 y}{d\,x^3}\right) \text{ et } \int d\,x \int p\,d\,x = -\,K\,c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right)$$

ante omnia his conditionibus ſatisfieri debet

I°. vt ſumto $x = o$ fiat $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = o$

II°. vt ſumto $x = o$ fiat $\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right) = o$.

Duae reliquae conditiones ex ſtatu laminae in ipſo puncto A ſunt petendae, ad quem peruenimus ſtatuendo $x = a$, quandoquidem longitudinem laminae vibrantis iam ſupra poſuimus $A\,B = a$, vnde per ſe patet applicatam y ſemper euaneſcere debere. Altera conditio aeque eſt euidens, quod tangens in puncto A debeat incidere in axem A B, ex quo tertia et quarta conditio poſtulant, vt fiat ſumto $x = a$

III^{io} $y = o$ et IV°. $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) = o$

haeque quatuor conditiones ſemper adimpleri debent, quicunque valor tempori t tribuatur.

XI. Quod autem ad ipſam integrationem inventae aequationis

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -\,b^4\left(\frac{d^4\,y}{d\,x^4}\right),$$

attinet; ſtatim fateri cogor, me nullo adhuc modo eius integrale completum, quod quidem quatuor functiones arbitrarias inuoluere deberet, inuenire potuiſſe; quam ob cauſſam etiam completa ſolutio hu-

 ius

ius problematis, quae ſcilicet ad ſtatum quemcunque initialem laminae accommodari poſſet, prouti hoc negotium in chordis vibrantibus ſucceſſit, nullo adhuc modo exſpectari poteſt, interim per ſeries infinitas quodammodo hunc defectum ſupplere licet. Denotent enim hae quatuor litterae P, Q, R, S functiones quascunque temporis t, ac ſtatuatur per ſeriem infinitam:

$$y = P + \frac{Qx}{b} + \frac{Rx^2}{b^2} + \frac{Sx^3}{b^3} + \frac{P'x^4}{b^4} + \frac{Q'x^5}{b^5} + \frac{R'x^6}{b^6} + \frac{S'x^7}{b^7} + \frac{P''x^8}{b^8} + \frac{Q''x^9}{b^9} + \frac{R''x^{10}}{b^{10}} + \frac{S''x^{11}}{b^{11}} \text{ etc.}$$

hinc colligimus

$$-\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{ddP}{dt^2} - \frac{x}{b}\cdot\frac{ddQ}{dt^2} - \frac{x^2}{b^2}\frac{ddR}{dt^2} - \frac{x^3}{b^3}\frac{ddS}{dt^2} - \frac{x^4}{b^4}\frac{ddP'}{dt^2} - \frac{x^5}{b^5}\frac{ddQ'}{dt^2} - \frac{x^6}{b^6}\frac{ddR'}{dt^2} - \frac{x^7}{b^7}\frac{ddS'}{dt^2} - \frac{x^8}{b^8}\frac{ddP''}{dt^2} - \frac{x^9}{b^9}\frac{ddQ''}{dt^2} - \frac{x^{10}}{b^{10}}\frac{ddR''}{dt^2} \text{ etc.}$$

ſimilique modo ſumto tantum x variabili

$$b^4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = +1.2.3.4\,P' + 2.3.4.5\,Q'\frac{x}{b} + 3.4.5.6\,R'\frac{x^2}{b^2} + 4.5.6.7\,S'\frac{x^3}{b^3} + 5.6.7.8\,P''\frac{x^4}{b^4} + 6.7.8.9\,Q''\frac{x^5}{b^5} + 7.8.9.10\,R''\frac{b^6}{x^6} + 8.9.10.11\,S''\frac{x^7}{b^7} \text{ etc.}$$

quae ſeries quum illi aequalis eſſe debeat, ſequentes ſponte ſe produnt determinationes

$$P' = -\frac{ddP}{1.2.3.4\,dt^2};\quad Q' = -\frac{ddQ}{2.3.4.5\,dt^2};\quad R' = -\frac{ddR}{3.4.5.6\,dt^2}$$

$$S' = -\frac{ddS}{4.5.6.7\,dt^2};\quad P'' = -\frac{ddP'}{5.6.7.8\,dt^2}; = +\frac{d^4P}{1.2.3.4.5.6.7.8\,dt^2}$$

$$Q'' = +\frac{d^4Q}{2.\ldots.9.\,dt^2};\quad R'' = +\frac{d^4R}{3.4\ldots10\,dt^2};\quad S'' = \frac{d^4S}{4.5\ldots11\,dt^2} \text{ etc.}$$

XII. His determinationibus inuentis, valor applicatae y ex quatuor ſequentibus ſeriebus infinitis reperietur compoſitus;

$y = +$

$$y = +P - \frac{x^4\, ddP}{1.2\ldots4\, b^4\, dt^2} + \frac{x^8\, d^4P}{1.2\ldots8\, b^8\, dt^2} - \frac{x^{12}\, d^6P}{1.2\ldots12\, b^{12}\, dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ Qx - \frac{x^5\, ddQ}{2\ldots5\, b^5\, dt^2} + \frac{x^9\, d^4Q}{2\ldots9\, b^9\, dt^2} - \frac{x^{13}\, d^6Q}{2\ldots13\, b^{13}\, dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ Rx^2 - \frac{x^6\, ddR}{3\ldots6\, b^6\, dt^2} + \frac{x^{10}\, d^4R}{3\ldots10\, b^{10}\, dt^2} - \frac{x^{14}\, d^6R}{3\ldots14\, b^{14}\, dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ Sx^3 - \frac{x^7\, ddS}{4\ldots7\, b^7\, dt^2} + \frac{x^{11}\, d^4S}{4\ldots11\, b^{11}\, dt^2} + \frac{x^{15}\, d^6S}{4\ldots15\, b^{15}\, dt^2} + \text{etc.}$$

quae quatuor ſeries non ſolum coniunctim, ſed etiam vnaquaeque ſeorſim aequationi noſtrae differentiali quarti ordinis ſatisfaciunt. Interim tamen hinc parum lucri ad ipſam ſolutionem noſtri problematis redundat.

XIII. Quocirca coactus ſum, in integrali particulari noſtrae aequationis acquieſcere; ſtatim autem talis forma non parum generalis ſeſe offert, in quam quidem iam prima mea inueſtigatione incideram, nunc autem clarius et diſtinctius ſum expoſiturus. Satisfacit ſcilicet ſequens forma:

$$y = \text{coſ.}\, \theta\theta t \left(A\, \text{coſ.} \tfrac{\theta x}{b} + B\, \text{ſin.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

vbi notandum coefficientes A, B, C, D eſſe quantitates lineares; quam formam aequationi differentiali ſatisfacere, tentanti patebit, fit enim

$$-\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = +\theta^4\, \text{coſ.}\, \theta\theta t \left(A\, \text{coſ.} \tfrac{\theta x}{b} + B\, \text{ſin.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

et

$$\left(\frac{d^4 y}{d x^4}\right) = +\frac{\theta^4}{b^4}\, \text{coſ.}\, \theta\theta t \left(A\, \text{coſ.} \tfrac{\theta x}{b} + B\, \text{ſin.} \tfrac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right).$$

XIV. Accommodemus nunc hunc valorem ad quatuor illas conditiones ſupra memoratas, ac primo

 mo

mo quidem valor $(\frac{ddy}{dx^2})$ poſito $x = 0$, hanc praebet aequationem:

I°. $-A + C + D = 0$; ſiue $A = C + D$

ſecunda autem conditio $(\frac{d^3 y}{dx^3})$ facto $x = 0$ praebet

II°. $-B + C - D = 0$ ſiue $B = C - D$.

Tertia vero conditio poſtulans $y = 0$, ſumto $x = a$ ſuppeditat hanc aequationem

III^{tio} $A\,\text{coſ.}\frac{\theta a}{b} + B\,\text{ſin.}\frac{\theta a}{b} + Ce^{\frac{\theta a}{b}} + De^{-\frac{\theta a}{b}}) = 0$.

Quarta denique conditio, qua eſſe oportet $(\frac{dy}{dx}) = 0$ poſito $x = a$ dat

IV°. $-A\,\text{ſin.}\frac{\theta a}{b} + B\,\text{coſ.}\frac{\theta a}{b} + Ce^{\frac{\theta a}{b}} - De^{-\frac{\theta a}{b}} = 0$.

XV. Ad has aequationes reſoluendas, ponamus breuitatis gratia $\frac{\theta a}{b} = \Phi$, atque ob valores inventos $A = C + D$ et $B = C - D$, binae vltimae aequationes fient

III. $(C+D)\,\text{coſ.}\Phi + (C-D)\,\text{ſin.}\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi} = 0$

IV. $-(C+D)\,\text{ſin.}\Phi + (C-D)\,\text{coſ.}\Phi + Ce^{\Phi} - De^{-\Phi} = 0$

vnde duplici modo elicitur

$$\frac{C}{D} = \frac{\text{ſin.}\Phi - \text{coſ.}\Phi - e^{-\Phi}}{\text{coſ.}\Phi + \text{ſin.}\Phi + e^{\Phi}} = \frac{\text{coſ.}\Phi + \text{ſin.}\Phi + e^{-\Phi}}{\text{coſ.}\Phi - \text{ſin.}\Phi + e^{\Phi}}$$

quorum valorum aequalitas producit hanc aequationem

$$2 = -\text{coſ.}\Phi\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi})$$

ex qua aequatione numerum ſeu angulum θ elici oportet, quo inuento ſtatim erit $\theta = \frac{b\Phi}{a}$, et quum

initio

initio fuiſſet $t = 0$, ſi faciamus $\theta\theta t = \pi$, lamina interea vnam vibrationem abſoluiſſe cenſetur, ita vt tempus vnius vibrationis ſit $\frac{\pi}{\theta\theta}$.

XVI. Proponitur igitur haec aequatio:

$$2 = -\operatorname{coſ.}\Phi\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi}),$$

vnde valores ipſius Φ eruere oportet, cuiusmodi ſine dubio dantur infiniti, tam poſitiui, quam negatiui. In poſitiuos igitur primum inquiramus ac ſtatim quidem obſeruo, angulum Φ neceſſario recto maiorem eſſe debere, vt eius coſinus fiat negatiuus, hunc in finem ſit ϱ nota anguli recti, ſiue

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\pi = 1,570796326,$$

et ſtatuamus $\Phi = \varrho + \omega$, vt noſtra aequatio fiat

$$2 = +\operatorname{ſin.}\omega\,(e^{\varrho}e^{\omega} + e^{-\varrho}e^{-\omega})$$

vbi manifeſtum eſt, dari valorem ipſius ω, eumque ſatis exiguum, qui quaeſito ſatisfaciat, quem deinceps accurate ſumus definituri. Deinde vero etiam valor Φ aliquanto dari poterit minor, quam 3ϱ, poſito enim $\Phi = 3\varrho - \omega$, prodit iſta aequatio

$$2 = +\operatorname{ſin.}\omega\,(e^{3\varrho}e^{-\omega} + e^{-3\varrho}e^{\omega}).$$

Simili modo intelligimus, dari valores alternatim minores et maiores quam 5ϱ, 7ϱ, 11ϱ etc. quos ex ſequentibus aequalitatibus eruere debemus, quas cum praecedentibus ſimul conſpectui exponamus:

I.	$\Phi = \varrho + \omega$	$2 = \operatorname{ſin.}\omega(e^{\varrho}e^{\omega} + e^{-\varrho}e^{-\omega})$
II.	$\Phi = 3\varrho - \omega$	$2 = \operatorname{ſin}\omega(e^{3\varrho}e^{-\omega} + e^{-3\varrho}e^{+\omega})$
III.	$\Phi = 5\varrho + \omega$	$2 = \operatorname{ſin.}\omega(e^{5\varrho}e^{\omega} + e^{-5\varrho}e^{-\omega})$
IV.	$\Phi = 7\varrho - \omega$	$2 = \operatorname{ſin.}\omega(e^{7\varrho}e^{-\omega} + e^{-7\varrho}e^{+\omega})$
V.	$\Phi = 9\varrho + \omega$	$2 = \operatorname{ſin.}\omega(e^{9\varrho}e^{+\omega} + e^{-9\varrho}e^{-\omega})$

 vbi

vbi manifeſtum eſt, valores ipſius ω continue fieri minores. Pro valoribus negatiuis faciamus ſtatim $\Phi = -\psi$, vt habeamus:

$$2 = -\text{coſ.}\,\psi\,(e^{-\psi} + e^{+\psi})$$

vnde eaedem prorſus reperiuntur ſolutiones ac ſupra.

XVII. Quo facilius has formulas euoluere queamus, ante omnia indagare debemus valorem e^{π}, vbi Logarithmus hyperbolicus ipſius e eſt vnitas, quare Logarithmos vulgares adhibendo erit

$$\text{Log.}\,e = 0,43429,44819,$$

vnde colligimus

$$\text{L.}\,e^{\pi} = 0,4342944819 \cdot 3,1415926535 \text{ ſiue}$$
$$= 1,3643763,$$

hincque porro

$$\text{L.}\,e^{\Phi} = 0,6821881$$

hincque reliqui termini, quibus indigemus, facile colliguntur, quare quum exiſtente ω fractione ſatis parua, ſit proxime

$$e^{\omega} = 1 + \omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{24}\omega^4 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$
$$e^{-\omega} = 1 - \omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{24}\omega^4 - \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$
$$\text{coſ.}\,\omega = 1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{24}\omega^4 \text{ etc. et ſin.}\,\omega = \omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{120}\omega^5 \text{ etc.}$$

prima ſuperiorum formularum producit

$$2 = 5,01836.\omega + 4,60260.\omega^2 + 1,67275.\omega^3 - 0,37638.\omega^5$$

vnde ſatis exacte concluditur

$$\omega = 0,30432, \text{ ideoque } \Phi = 1,87511$$

neque

neque opus eſt ad maiorem praeciſionis gradum progredi. Secunda autem formula ſuppeditat ſequentem aequationem

$$2 = 111,32669.\omega - 111,30871.\omega^2 + 37,10890.\omega^3$$

pro qua fit

$$\omega = 0,01829,$$

ita vt hinc ſit

$$\Phi = 4,69408,$$

vnde liquet in reliquis formulis valorem ω penitus negligi poſſe ita vt ſit

$$\Phi = 5\varrho,\ 7\varrho,\ 9\varrho \text{ etc.}$$

XVIII. Omnes iſtos valores ipſius Φ ordine magnitudinis, ſequens Tabella ſiſtit, vna cum temporibus vibrationum his valoribus congruentibus:

Φ	Tempora vibrat.	Soni editi
1, 87514	0, 89347. $\frac{aa}{bb}$	1, 1192 $\frac{bb}{aa}$
4, 69408	0, 14258	6, 9977
7, 85473	0, 05092	19, 6388
10, 99553	0, 02493	40, 1107
14, 13711	0, 01573	63, 5439

XIX. Inprimis autem ad tempora iſta vibrationum et ſonos iis editos perfecte cognoſcendos, praeter longitudinem laminae vibrantis $AB = a$ noſſe oportet valorem litterae b, erat autem $b^4 = 2hkcc$, vbi h denotat altitudinem lapſus grauium tempore vnius minuti ſecundi, ita vt ſit $h = 15,\frac{5}{8}$ ped. Rhen. ideoque $2h = 31,\frac{1}{4}$ ped., tum vero k erat longi-

longitudo laminae pro arbitrio ſumta, cuius pondus experientia definitum ſumſimus $= K$, at vero cc eam denotat quantitatem, qua elaſticitas noſtrae laminae determinatur, ita ſcilicet vt ſi alicubi fuerit radius curuaturae $= r$, momentum elaſticitatis futurum ſit $= \frac{Kcc}{r}$, vnde valorem huius quantitatis per experimenta explorari oportet, id quod commodiſſime ſequenti modo praeſtari poterit. Infigatur ea
Tab. VII. Fig. 3. lamina longitudinis k, cuius pondus exploratum fuit K, termino ſuo A a muro ſeu parieti immobili, vt ſit $AK = k$, eique in termino K appendatur aliquod pondus I, quo terminus K normaliter ad A K ſollicitetur, et vsque in k detorqueatur, ita tamen, vt hoc ſpatium K k vehementer ſit exiguum reſpectu totius longitudinis A K, atque facile patet, ſi per experimentum exploratum fuerit iſtud ſpatiolum K k quod ſit $= i$, ex eo ipſam quantitatem cc determinari poſſe. Hic ergo ſola vis ſeu pondus I in laminam noſtram agit, vnde ſi ponatur abſciſſa $KX = x$ et applicata $XY = y$, momentum huius vis in punctum y eſt $= Ix$ cui aequale eſſe debet momentum elaſticitatis in puncto Y, quod vti ante vidimus eſt

$$= \frac{Kcc}{r} = Kcc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

ſicque pro figura huius laminae habebitur iſta aequatio,

$$Ix = Kcc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right), \text{ vnde } \frac{Kcc}{I}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = x,$$

quae bis complete integrata praebet

$$\frac{Kcc}{I} y = \tfrac{1}{6} x^3 + \alpha x + \beta. \qquad \text{XX.}$$

XX. Quum nunc in ipſo puncto K, vbi $x = 0$, applicata y per hypotheſin aequetur interuallo $Kk = i$, euidens eſt fore:

$$\frac{Kcc.i}{I} = \beta.$$

Praeterea poſito $x = k$ fieri debet $y = 0$, vnde colligimus

$$\frac{1}{6}k^3 + \alpha + \frac{cc.i}{I} = 0, \text{ ideoque } \alpha = -\frac{1}{6}k^2 - \frac{Kcc.i}{kI},$$

denique in eodem puncto A fieri debet $\frac{dy}{dx} = 0$, ex quo colligitur

$$0 = \frac{1}{2}x^2 + \alpha = \frac{1}{2}k^2 + \alpha \text{ ſeu } \alpha = -\frac{1}{2}k^2,$$

qui valor praecedenti aequatus ſuppeditat:

$$cc = \frac{1}{3}\frac{Ik^3}{Ki}.$$

Sicque pro qualibet lamina valor huius conſtantis cc per vnicum experimentum facile exploratur, hincque pro noſtris formulis fit

$$b^4 = \frac{2}{3}.\frac{Ihk^4}{Ki},$$

quo cognito, numeri illi vibrationum vno minuto ſecundo editarum perfecte innoteſcunt.

XXI. Eadem igitur lamina elaſtica diuerſas vibrationum ſpecies recipere poteſt, prouti ſine dubio initio aliam atque aliam impulſionem acceperit, prima ſcilicet ſpecies dat ſonum grauiſſimum, ſequentes continuo magis intenduntur fiuntque acutiores, ipſi autem vibrationum numeri mox poſt primam ſpeciem ſecundum quadrata numerorum naturalium increſcunt, praecipuum autem diſcrimen harum

rum ſpecierum in eo eſt ſitum, quod quum in prima ſpecie lamina A F axem A B nusquam ſecet, ſiquidem in A tantum tangit, ita ſecunda ſpecies axem A B ſemel, tertia vero bis, quarta ter etc. interſecet, quemadmodum iam olim fuit oſtenſum; interim tamen tota haec ſolutio maxime eſt particularis, quia tantum ad certas curuarum ſpecies reſtringitur, atque a ſolutione generali, qualem de chordis dare licuit, longiſſime adhuc ſumus remoti. Reſtat igitur vt vires ſupra memoratas, quae ad laminam in muro continendam requiruntur, inueſtigemus. Hunc in finem conſideremus laminae punctum Y, quod a parte dextra viribus tantum elementaribus vrgetur, quarum effectum duplici modo ſpectari oportet, altero ſcilicet reſpectu ſummae virium elementarium a puncto Y vsque ad punctum F applicatarum, quae, vti ſupra vidimus, eſt $\int p\,d\,x$, altero vero modo reſpectu momenti harum virium, quod eſt $\int d\,x \int p\,d\,x$. Hoc momentum autem inuenimus eſſe

Tab. VII. Fig. 1.

$$= -K\,c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right),$$

hic ſcilicet iſtae vires tamquam deorſum trahentes ſpectantur, vnde ipſa virium illarum ſumma colligitur

$$\int p\,d\,x = -K\,c\,c\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right),$$

vbi notetur breuitatis gratia ſupra poſitum eſſe

$$b^4 = 2\,b\,k\,c\,c.$$

Contemplemur nunc ipſam aequationem integralem, ad quam ſupra peruenimus; inuenimus autem poſito

ſito breuitatis gratia $\frac{\theta a}{b} = \Phi$ cuius valorem pro ſingulis ſpeciebus modo ante elicuimus, ſequentes valores pro litteris A, B, C, D;

$$C = \text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi - e^{-\Phi};\; D = \text{coſ.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi + e^{\Phi}$$

$$A = 2\,\text{ſin.}\,\Phi + e^{\Phi} - e^{-\Phi};\; B = -2\,\text{coſ.}\,\Phi - e^{\Phi} - e^{-\Phi}$$

quibus definitis prodierat:

$$y = \text{coſ.}\,\theta\theta t\left(A\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} + De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

vnde concludimus

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = +\frac{\theta\theta}{bb}.\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\left(-A\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} - B\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} + De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{\theta^3}{b^3}.\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\left(+A\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} - B\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} - De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quibus formulis tam ſumma, quam momentum virium elementarium a parte dextra pro puncto laminae Y exprimitur.

Promoueamus nunc punctum Y vsque ad terminum A, vbi $x = a$ et $\frac{\theta x}{b} = \Phi$ et ſumma omnium virium arcui A F applicatarum erit:

$$\int p\,dx = \frac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(+A\,\text{ſin.}\,\Phi - B\,\text{coſ.}\,\Phi + Ce^{\Phi} - De^{-\Phi})$$
$$= \frac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(2\,\text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi}).$$

Similique modo earundem virium momentum reſpectu puncti A erit:

$$\int dx \int p\,dx = \frac{\theta\theta}{bb}.\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{coſ.}\,\Phi - B\,\text{ſin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$
$$= \frac{\theta\theta}{bb}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(2\,\text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) - 2\,\text{coſ.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi})).$$

Hoc duplici virium effectu inuento, manifeſtum eſt, portiunculam laminae muro infixam A a in puncto

 a tan-

a tanta vi vrgeri debere, vt eius momentum pro puncto A itidem fiat $= \int dx \int p\, dx$ ſicque ex longitudine iſtius portionis A *a* innoteſcit ipſa vis puncto *a* applicanda, quam vocemus $= V$ et nunc facile vis, quam ipſum A ſuſtinet, definietur, quandoquidem ea aequalis et contraria eſſe debet ſummae virium vtrinque applicatarum, ſcilicet iſta vis erit $= V + \int p\, dx$, hocque modo omnia ſunt determinata, quae quidem ſuper hac ſolutione particulari deſiderari poſſunt.

XXII. Haec ſunt fere, quae iam olim de eodem hoc Problemate ſum commentatus, niſi quod hic ſint aliquanto clarius et vberius expoſita; verum eadem lamina pluribus adhuc aliis modis tractata motum tremulum recipere poteſt, dum enim hic lamina A B altero termino B prorſus libera eſt aſſumta, altero vero termino A muro infixa, pluribus aliis modis lamina ſiue in alterutro termino, ſiue in vtroque defigi poteſt, non enim abſolute opus eſt, vt lamina in termino A muro infigatur, ſed motus quoque tremulus oriri debet, etiamſi in puncto A tantum ſtilo ita defigatur, vt libere circa eum gyrari poſſit atque adeo vterque terminus A et B plane liber relinqui poſſet; tum vero defixio ope ſtyli in vtroque termino atque adeo etiam in locis intermediis admitti poſſet, quod etiam de altero modo, quo lamina muro infigitur, eſt intelligendum. Hinc igitur plura genera contremiſcendi in lamina locum habere poſſunt, quorum praecipua in ſequentibus Problematibus ſum euoluturus.

Pro-

Problema I.

XXIII. Si lamina prorſus fuerit libera ſeu incumbat plano horizontali; definire motum vibratorium, cuius eſt capax. Tab. VII. Fig. 4.

Solutio.

Sit longitudo laminae A B $= a$, quae elapſo tempore t figuram ceperit A Y B, quam minime ab axe A B diſcrepantem, ipſa autem lamina ita ſit comparata, quemadmodum ſupra deſcripſimus, ſcilicet longitudini k reſpondeat pondus K et pro curvatura, cuius radius oſculi $= r$, ſit momentum elaſticitatis $= \frac{Kcc}{r}$, vnde ponatur $b^4 = 2hkcc$, quadratum autem cc per experimentum ſupra allegatum inuentum ſit

$$cc = \frac{1}{3}\frac{I.k^3}{iK} \text{ hincque } b^4 = \frac{2}{3}\frac{Ih.k^4}{iK},$$

quibus poſitis ſi abſciſſae cuicunque A X $= x$ reſpondeat applicata X Y $= y$; manifeſtum eſt, iterum perveniri ad hanc aequationem differentialem

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = b^4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

eique idcirco ſatisfacere hanc integralem

$$y = \text{coſ.}\, \theta\theta t\left(A \text{ coſ.} \frac{\theta x}{b} + B \text{ ſin.} \frac{\theta x}{b} + C e^{\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quare quum extremitas F nullam ſuſtineat vim, hoc loco tam $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ quam $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ euaneſcet, vnde iam hae duae determinationes prodeunt

$$A = C + D; \quad \text{et } B = C - D.$$

Deinde omnium virium elementarium per arcum F Y ſumma erat $\int p\,dx = -b^4\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) =$

$$-\frac{\theta^3}{b^3}\operatorname{coſ}.\theta\theta t\left(A\operatorname{ſin}.\frac{\theta x}{b} - B\operatorname{coſ}.\frac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} - De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

harum autem virium momentum pro puncto Y $= \int dx \int p\,dx =$

$$-\frac{\theta^2}{bb}\operatorname{coſ}.\theta\theta t\left(-A\operatorname{coſ}.\frac{\theta x}{b} - B\operatorname{ſin}.\frac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} + De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quae duae quantitates a puncto Y ad alterum terminum G vsque translatae vbi $x = a$, denuo euaneſcere debent; et ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{\theta a}{b} = \zeta$, has duas conditiones praebent:

$$A.\operatorname{ſin}.\zeta - B.\operatorname{coſ}.\zeta + C.e^{\zeta} - D.e^{-\zeta} = 0;$$

$$-A.\operatorname{coſ}.\zeta - B.\operatorname{ſin}.\zeta + C.e^{\zeta} + D.e^{-\zeta} = 0$$

ſupra autem iam inuenimus

$$A = C + D \text{ et } B = C - D,$$

vnde duplicem ſequentem valorem elicimus:

$$\frac{C}{D} = \frac{\operatorname{coſ}.\zeta + \operatorname{ſin}.\zeta - e^{-\zeta}}{\operatorname{coſ}.\zeta - \operatorname{ſin}.\zeta - e^{\zeta}} = \frac{\operatorname{ſin}.\zeta - \operatorname{coſ}.\zeta + e^{-\zeta}}{\operatorname{ſin}.\zeta + \operatorname{coſ}.\zeta - e^{\zeta}}$$

vnde elicitur

$$2 = \operatorname{coſ}.\zeta\,(e^{\zeta} + e^{-\zeta})$$

cui ſtatim ſatisfacit $\zeta = 0$, ideoque et $\theta = 0$, quo ipſo ſtatus quietis continetur; pro aliis valoribus primum obſeruo, ſiue angulus ζ poſitiue ſiue negatiue capiatur, perinde eſſe; deinde facile perſpicitur, hunc angulum ζ recto maiorem eſſe debere, quare ne

coſinus

coſinus ζ fiat negatiuus, tribus adeo rectis maior eſſe debet, ſtatuamus ergo $\zeta = 3\varrho + \omega$, et eſſe oportebit

$$2 = \text{ſin.}\, \omega\, (e^{3\rho} e^{\omega} + e^{-3\rho} e^{-\omega}),$$

ſupra autem inuenimus eſſe,

$$e^{3\rho} = 111,31770; \text{ et } e^{-3\rho} = 0,00899$$

ita vt ω ſit fractio vehementer parua, hincque tuto poni poſſit

$$\text{ſin.}\, \omega = \omega \text{ et } e^{\omega} = 1 + \omega \text{ et } e^{-\omega} = 1 - \omega,$$

quocirca aequatio noſtra dabit:

$$2 = 111,32669.\omega + 111,30871.\omega^2 \text{ ſicque } \omega = 0,01765,$$

quia igitur

$$3\varrho = 4,71237 \text{ erit } \zeta = 4,73002 = \frac{\theta a}{b},$$

ex quo valore concludimus tempus vnius vibrationis

$$\frac{\pi}{\theta\theta} = \frac{\pi}{\zeta\zeta}.\frac{aa}{bb} = 0,14042\,\frac{aa}{bb}$$

et ſonus ſiue vibrationum vno minuto ſecundo editarum numerus

$$= 7,12146.\frac{bb}{aa},$$

haecque eſt ſimpliciſſima vibrationum ſpecies, quas lamina noſtra edere poteſt, qui ſonus binis octauis cum vna quinta ſuperat illum, quem eadem chorda editura eſſet, ſi in A muro eſſet infixa, praeterea vero innumeros alios valores pro ζ inuenire licet, ponendo

$$\zeta = 5\varrho - \omega; \text{ vel } 7\varrho + \omega, \text{ vel } 9\varrho - \omega \text{ etc.}$$

vbi manifeſto angulus ω pro euaneſcente haberi poterit, atque hinc eaedem vibrationes reſultabunt, quae

ſupra

ſupra ſpeciem tertiam, quartam, quintam etc. conſtituebant.

Problema II.

XXIV. Si eadem lamina elaſtica in termino A fuerit libera, in altero vero B ita ſtylo defixa, vt circa eum libere verti poſſit; inuenire motum vibratorium, cuius erit capax.

Solutio.

Pro hoc ergo caſu eaedem aequationes locum habent, quas modo ante euoluimus, ſcilicet poſita abſciſſa A X $= x$ et applicata X Y $= y$ habebimus

$$y = \text{coſ.}\,\theta\theta t\left(A.\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B.\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} + De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

et quia extremitas E vbi $x = 0$, nullas vires ſuſtinet, habebimus vt ante

$$A = C + D \quad \text{et} \quad B = C - D$$

tum vero etiam pro arcu E Y erit ſumma virium elementarium

$$\int p\,dx = -Kcc.\tfrac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\left(A\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} - B\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + Ce^{\frac{\theta x}{b}} - De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

et momentum harum virium reſpectu Y

$$= +\tfrac{Kcc.\theta\theta}{bb}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\left(A\,\text{coſ.}\tfrac{\theta x}{b} + B\,\text{ſin.}\tfrac{\theta x}{b} - Ce^{\frac{\theta x}{b}} - De^{-\frac{\theta x}{b}}\right)$$

quae formulae ad alterum terminum vsque B extendantur faciendo $x = a$, ac prior quidem cum vi, quam ipſe ſtylus in B ſuſtinet, in aequilibrio exiſtere debet, quare ſi ſumamus ſtylum in puncto B ſuſti-

ſuſtinere vim $B\beta = G$, poſitoque vt ante $\frac{\theta a}{b} = \zeta$, fieri oportet

$$-\frac{Kcc\theta^3}{b^3}(A\,\text{ſin.}\,\zeta - B\,\text{coſ.}\,\zeta + C.e^{\zeta} - D.e^{-\zeta}) + G = 0,$$

ita vt iam cognoſcamus hanc vim $B\beta$ quae erit

$$G = Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\,\theta\,t\,(A\,\text{ſin.}\,\zeta - B\,\text{coſ.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta}),$$

deinde autem momentum harum virium, neceſſario hic debet euaneſcere, quia enim lamina circa B libere mobilis eſt, nullum momentum incuruans hic ſtatui poteſt, erit ergo:

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta - Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = 0$$

denique hic manifeſto eſſe debet $y = 0$, vnde fit

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0$$

ex quibus duabus poſtremis aequationibus ſtatim fluit

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta = 0 \text{ et } Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0,$$

ex qua poſtrema fit

$$C = e^{-\zeta} \text{ et } D = -e^{\zeta},$$

qui valores inſuper in lineolam paruam ſunt ducendi, vt applicatae y fiant lineares et ſimul infinite paruae, hinc ergo colligitur

$$A = e^{-\zeta} - e^{\zeta};\ B = e^{-\zeta} + e^{\zeta},$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit ſequens aequatio

$$0 = e^{-\zeta}(\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta) - e^{\zeta}(\text{coſ.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\zeta) \text{ ſiue}$$

$$\text{Tang.}\,\zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{e^{\zeta} + e^{-\zeta}};\ \text{vel}\ e^{2\zeta} = \frac{\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta}{\text{coſ.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\zeta},$$

formula per reductiones notiſſimas redit ad hanc

$$e^{2\zeta} = \text{Tang.}\,(\tfrac{1}{2}\varrho + \zeta).$$

Hinc ſtatim patet ſatisfacere $\zeta = 0$, quo ipſe ſtatus aequilibrii continetur. Deinde vero valores idonei pro ζ continuo propius accedent ad hos angulos

$$\tfrac{5}{2}\varrho;\ \tfrac{9}{2}\varrho;\ \tfrac{13}{2}\varrho;\ \tfrac{17}{2}\varrho \text{ etc.}$$

ſi enim ponamus $\zeta = \frac{5}{2}\varrho - \omega$ erit Tangens $\zeta = \frac{1-\omega}{1+\omega}$ proxime, cui aequalis eſſe debet formula

$$\frac{1 - e^{-5\varrho + 2\omega}}{1 + e^{-5\varrho + 2\omega}}, \text{ ita vt ſit } \omega = \frac{e^{2\omega}}{e^{5\varrho}}$$

ſicque propemodum

$$\omega = \frac{1}{e^{5\varrho}} = 0,0003882$$

atque propius

$$\omega = 0,0003885,$$

pro ſequentibus caſibus autem hanc correctionem ω penitus negligere licebit, ita vt iſti valores pro ζ ſint

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \zeta = \tfrac{5}{2}\varrho - \omega = 3,92666 \\ \text{II.} & \zeta = \tfrac{9}{2}\varrho = 7,06858 \\ \text{III.} & \zeta = \tfrac{13}{2}\varrho = 10,21017 \\ \text{IV.} & \zeta = \tfrac{17}{2}\varrho = 13,35176 \\ & \text{etc.} \end{array}$$

videamus autem an etiam dentur valores negatiui, quem in finem ponamus $\zeta = -\eta$ eſſeque oportebit

$$-\text{Tang.}\,\eta = \frac{e^{-\eta} - e^{+\eta}}{e^{-\eta} + e^{+\eta}};\ \text{ſiue Tang.}\,\eta = \frac{e^{+\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}},$$

quae aequatio cum praecedente conuenit, ita vt illi inuenti valores etiam pro η valeant, ſicque valores ipſius

ipſius ζ tam poſitiue quam negatiue capi queant. Quia autem vtrinque pro $\theta\theta$ idem valores prodeunt, variae ſpecies vibrationum, quas haec lamina recipere poteſt, erunt ſequentes:

	Temp. vibrat.	Soni editi
I.	$0,20375\,\frac{aa}{bb}$	$4,9079\,\frac{bb}{aa}$
II.	0,06288 . .	15,9044
III.	0,03013 . .	33,1832
IV.	0,01762 . .	56,7452.

Coroll.

XXV. Quum ſoni ab eadem lamina vtrinque libera editi, rationem horum numerorum ſequantur

7,1215; 19,6388; 40,1107

euidens eſt hos ſonos acutiores eſſe illis, quos hic inuenimus, ita vt ſtylus in termino B defixus ſonum laminae grauiorem reddat, quemadmodum etiam vidimus ſi lamina altero termino plane muro ſit infixa, ſonos adhuc multo grauiores prodire.

Problema III.

XXVI. Si lamina in vtroque termino A et B ope ſtylorum fuerit defixa, definire motus vibratorios, quos recipere poteſt. Tab. VII. Fig. 7.

Solutio.

Pro curuatura laminae habemus ſtatim eandem aequationem vt ante, quae poſito $\frac{\theta x}{b} = \Phi$, ſuccinctius ita exprimitur:

 $y =$ coſ.

$$y = \text{coſ.}\, \theta \theta t\, (A\, \text{coſ.}\, \Phi + B\, \text{ſin.}\, \Phi + C e^{\Phi} + D e^{-\Phi})$$

quia nunc lamina in termino A eſt fixa, ſtatim habemus $y = 0$ ſi $x = 0$, vnde haec emergit determinatio:

$$A + C + D = 0;$$

deinde in hoc puncto A nulla datur vis incuruans, vnde formula $\left(\frac{d\, d\, y}{d\, x^2}\right)$ euaneſcere debet, ex quo naſcitur haec ſecunda determinatio

$$-A + C + D = 0,$$

ſicque habebimus has ſimpliciſſimas relationes

$$A = 0 \quad \text{et} \quad C + D = 0.$$

Conſideremus nunc etiam vim, quam ſtylus in A a ſuſtinet, quae ſit $A e = E$ et normalis ad axem A B, quae quum ſola in terminum A agat, aequalis erit vi illi ſupra definitae $\int p\, d\, x$ poſito $x = 0$, ſicque erit

$$-K c\, c. \frac{\theta^3}{b^3}\, \text{coſ.}\, \theta\, \theta\, t\, (-B + C - D) = E.$$

Nunc autem pro portione laminae A Y, maiori cura imprimis tam ſummam virium elementarium quam earum momentum reſpectu puncti Y aſſignare debemus. Hunc in finem integrale $\int p\, d\, x$ ita eſt ſumendum, vt euaneſcat poſito $x = 0$, ex quo habebimus

$$\int p\, d\, x = -K c c. \frac{\theta^3}{b^3}\, \text{coſ.}\, \theta\, \theta\, t\, (A\, \text{ſin.}\, \Phi - B\, \text{coſ.}\, \Phi + C e^{\Phi} - D e^{-\Phi})$$
$$+ K c c. \frac{\theta^3}{b^3}\, \text{coſ.}\, \theta\, \theta\, t \quad (-B + C - D)$$

quae formula per $d\, x$ multiplicata et eadem lege integrata praebet momentum virium elementarium

$$\int dx \int p\,dx = -Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{coſ.}\,\Phi - B\,\text{ſin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$
$$+ Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A + C + D)$$
$$+ Kcc.\tfrac{\theta^3}{b^3}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-B + C - D)\,x$$

quibus formulis in ſequentibus plurimum vtemur. Interim hic notaſſe iuuabit, ſi ad illud momentum addatur momentum vis E quod eſt

$= Ex = -Kcc.\tfrac{\theta^3}{b^3}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-B+C-D)x$, tum ob

$-A + C + D = 0$

totum momentum fore

$$= -Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{coſ.}\,\Phi - B\,\text{ſin.}\,\Phi + Ce^{\Phi} + De^{-\Phi})$$

cui momentum elaſticitatis negatiue ſumtum praeciſe eſt aequale, vti rei natura poſtulat. Promoueamus nunc punctum Y vsque ad alterum terminum B, faciendo $x = a$ ſeu $\frac{\theta a}{b} = \zeta$ vti ſupra et ſumma omnium virium elementarium vna cum vi ſtyli E erit

$$= -Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{coſ.}\,\zeta - B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta})$$

quae cum vi quam ſtylus Bβ ſuſtinet, quae ſit $Bf = F$ euaneſcere debet, propterea quod omnes has vires in aequilibrio conſiſtere oportet, vnde etiam vis iſta Bf innoteſcit, erit enim

$$F = +Kcc.\tfrac{\theta\theta}{bb}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{coſ.}\,\zeta - B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta}).$$

Porro quum terminus B a ſola hac vi retineatur, cuius momentum pro puncto B eſt nullum, hic etiam nulla curuatura locum habere poteſt, vnde totum iſtud momentum ad terminum B translatum,

ſaciendo $\Phi = \zeta$ nihilo aequale eſſe debet, ex quo fiet

$$-A \operatorname{coſ.} \zeta - B \operatorname{ſin.} \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta} = 0.$$

Denique quum hoc loco etiam ſit $y = 0$, habebimus inſuper

$$A \operatorname{coſ.} \zeta + B \operatorname{ſin.} \zeta + C e^{\zeta} + D e^{-\zeta} = 0$$

quae duae poſtremae aequationes cum binis illis initio inuentis problema noſtrum penitus reſoluent. Quare quum ſupra inueniſſemus $A = 0$ et $D = -C$, hae duae poſteriores aequationes dabunt

$$-B \operatorname{ſin.} \zeta + C e^{\zeta} - C e^{-\zeta} = 0 \text{ et } B \operatorname{ſin.} \zeta + C e^{\zeta} - C e^{-\zeta} = 0$$

vnde manifeſto ſequitur, fore $B \operatorname{ſin.} \zeta = 0$, ſiue $\operatorname{ſin.} \zeta = 0$, ideoque ζ vel π vel 2π vel 3π vel 4π etc. ſiue in genere $\zeta = i\pi = \frac{\theta a}{b}$ ita vt habeamus $\theta = \frac{ib\pi}{a}$, quare quum pro tempore vnius vibrationis ſit $\theta\theta t = \pi$ erit hoc tempus $= \frac{aa}{iibb.\pi}$, vnde diuerſas vibrationum ſpecies ſequenti Tabella exhibemus:

	Tempus vnius vibrat.	Sonus ſeu num. vibrat.
$i = 1$	$0,3183 \frac{aa}{bb}$	$3,1416 \frac{bb}{aa}$
$i = 2$	$0,0796$	$12,5664 \frac{bb}{aa}$
$i = 3$	$0,0354$	$28,2744 \frac{bb}{aa}$
$i = 4$	$0,0199$	$50,2656 \frac{bb}{aa}$
	etc.	etc.

ſicque hi diuerſi ſoni ſecundum ipſos numeros quadratos intenduntur.

Coroll.

Coroll.

Quando ergo lamina vtroque termino A et B ſtylo eſt defixa ſoni diuerſi plane erunt regulares et inter ſe harmonici, ac ſi cum ſonis praecedentis problematis conſerantur, aliquanto reperientur graviores, quam ſi lamina in vnico tantum termino ſtilo figeretur.

Problema IV.

Si lamina elaſtica priori termino A, vt ante fuerit ſtylo A α defixa, ſed altero termino B b muro infixa, definire motus vibratorios, quos haec lamina recipere poteſt.

Solutio.

XXVII. Hic omnia perinde ſe habebunt vti in problemate praecedente donec ad terminum B vsque perueniatur, erit igitur quoque $A=0$; et $D=-C$ et vis quam ſtylus A α ſuſtinet

$$Ae=E=-Kcc.\frac{\theta^3}{b^3}\text{coſ.}\,\theta\theta t(-B+C-D),$$

tum vero in ipſo puncto B vbi $x=a$ et $\Phi=\zeta$ erit 1°. $y=0$ vnde fit

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta+B\,\text{ſin.}\,\zeta+Ce^{\zeta}+De^{-\zeta}=0,$$

deinde vero quia lamina hic muro eſt infixa erit $(\frac{dy}{dx})=0$ ſiue

$$-A\,\text{ſin.}\,\zeta+B\,\text{coſ.}\,\zeta+Ce^{\zeta}-De^{-\zeta}=0$$

vnde quum ſit $A=0$ et $D=-C$, erit

$$B\,\text{ſin.}\,\zeta+C(e^{\zeta}-e^{-\zeta})=0 \text{ et } B\,\text{coſ.}\,\zeta+C(e^{\zeta}+e^{-\zeta})=0$$

et

$$\text{et Tang. } \zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{e^{\zeta} + e^{-\zeta}} = \frac{e^{2\zeta} - 1}{e^{2\zeta} + 1},$$

quae aequatio quum plane conueniat cum ſolutione Problematis tertii manifeſtum eſt etiam easdem vibrationum ſpecies hic locum eſſe habituras, quas ergo in ſequente Tabella ſiſtimus:

Temp. vibrat.	Soni editi
I. $0,20375 \frac{aa}{bb}$	$4,9079 \frac{bb}{aa}$
II. $0,06288 \frac{aa}{bb}$	$15,9044$
III. $0,03013 \frac{aa}{bb}$	$33,1832$
IV. $0,01762 \frac{aa}{bb}$	$56,7451.$

Quod autem ad vires ſpectat, quas ipſe murus ſuſtinet, conſideremus primo totum momentum virium ab A vsque ad B laminae applicatarum, quod erat

$$-Kcc.\frac{\theta\theta}{bb}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\,(-A\,\text{coſ.}\,\zeta - B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta})$$

cui aequale eſſe debet momentum a muro ſuſtentatum, vnde ſi in b concipiatur vis tantum momentum producens, quae ſit $= G$, tum in puncto B ſuſtinebit tantam vim $Bf = F$ quae cum reliquis nimirum E, et $\int p\,dx$ in nihilum redigatur.

Coroll.

Omnino hic notatu dignum eſt, quod lamina altero termino ſtylo, altero vero muro infixa, eosdem plane ſonos edat, ac ſi altero termino eſſet libera, altero tantum ſtylo defixa, ex quo ſequitur terminum liberum perinde ſe habere ad terminum

ſtylo

ſtylo defixum, vti terminus ſtylo defixus, ſe habet ad terminum muro infixum.

Problema V.

Si lamina vtroque termino A a et B b fuerit muro immobili infixa, definire motus vibratorios quos recipere poterit. Tab. VII. Fig. 8.

Solutio.

Poſita vt ante longitudine laminae $AB = a$, pro eius curuatura ſemper eadem aequatio valebit, qua hactenus ſumus vſi, ac pro hoc caſu ſolutio ſatis expedite euolui poteſt, propterea quod pro vtroque termino A et B, eſt tam $y = 0$, quam $(\frac{dy}{dx}) = 0$ hincque ſequentes quatuor aequationes obtinentur:

$$\text{I.}\quad A + C + D = 0$$
$$\text{II.}\quad B + C - D = 0$$
$$\text{III.}\quad A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = 0$$
$$\text{IV.}\quad -A\,\text{ſin.}\,\zeta + B\,\text{coſ.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = 0$$

quarum III. coſ. ζ − IV. ſin. ζ praebet

$$A = Ce^{\zeta}(\text{ſin}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta) - De^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\zeta)$$

$$= -C - D, \text{ vnde } \frac{C}{D} = \frac{e^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\zeta) - 1}{e^{\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta) + 1};$$ ſimili modo

III. ſin. ζ + IV. coſ. ζ dat

$$B = -Ce^{\zeta}(\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta) - De^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta)$$

$$= -C + D, \text{ vnde } \frac{C}{D} = \frac{e^{-\zeta}(\text{ſin.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\zeta) + 1}{-e^{\zeta}(\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\zeta) + 1}$$

 qui

qui valores inter ſe aequati producunt ſequentem aequationem:

$$2 = \cos.\,\zeta\,(e^{\zeta} + e^{-\zeta}),$$

quae eſt eadem ſolutio ac ea ad quam Problema I^mum^ perduxerat, ita vt ſequens Tabella iterum ſit habitura locum:

Temp. vibrat.	Soni editi
I. 0, 14042 $\frac{aa}{bb}$	7, 1214 $\frac{bb}{aa}$
II. 0, 05092	19, 6388
III. 0, 02493	40, 1107
IV. 0, 01573	63, 5438
etc.	etc.

Coroll.

Maxime hic memoratu dignum occurrit, quod lamina vtrinque eosdem ſonos edat, atque lamina vtrinque libera, idque eo magis quod modo ante vidimus, ſi alter terminus ſtylo ſit defixus, eundem ſonum oriri, ſiue alter terminus fuerit liber, ſiue muro infixus, ita vt hi duo ſtatus, quibus lamina vel eſt libera, vel muro infixa, quaſi inter ſe conveuire videantur, interim tamen aliquod eſſentiale diſcrimen intercedit, quum caſus principalis, quem initio tractauimus, vbi alter terminus liber, alter muro erat infixus, alias dederit vibrationes, quam caſus vbi vterque terminus erat liber, affinitas certe inſignis intercedit ratione formularum ex quibus angulum ζ elici oportet, quippe quae pro his caſibus tantum ſigno differant.

Proble-

Problema VI.

Si lamina vtroque termino A et B fuerit libera ſed circa medium alicubi in C ſtylo defixa, motus vibratorios definire, quos recipere poteſt.

Solutio.

Antequam ſolutionem huius problematis ſuſcipiamus, ſequentia praenotari oportet: 1°. in ipſo puncto C vbi applicata perpetuo euaneſcere debet, euidens eſt vtrinque angulos A C E et B C F aequales eſſe debere propterea quod lamina nusquam inflexionem ad angulum finitum admittit, quum ergo hi duo anguli ſimul euaneſcant et ſimul maxime ab axe declinent perſpicuum eſt, ambas portiones C E et C F paribus temporibus oſcillationes ſuas eſſe abſoluturas, interim tamen ſtylus in C defixus neceſſario ſaltum in lege continuitatis producere debet, quum portio C F certe alium motum ſit receptura, quam ſi ſtylus abeſſet, tempore tamen vibrationis eodem manente, ita vt pro vtraque portione littera noſtra θ, eundem habeat valorem. His igitur notatis, ponamus portionem $AC = \alpha$ et alteram $BC = \beta$, ita vt $\alpha + \beta$ aequetur toti longitudini a vocetur pro priori parte $AX = x$ et $XY = y$, pro altera vero parte $Bx' = x'$ et $Y'x' = y'$, et ſtatuentur aequationes ponendo breuitatis gratia $\frac{\theta x}{b} = \Phi$ et $\frac{\theta x'}{b} = \Phi'$. Tab. VII. Fig. 9.

Pro portione E C

$$y = \text{coſ.}\, \theta\, \vartheta t\, (A\, \text{coſ.}\, \Phi + B\, \text{ſin.}\, \Phi + C e^{\Phi} + D e^{-\Phi}$$

 Pro

Pro altera portione F C

$$y' = \text{coſ.}\,\theta\theta t(A'\,\text{coſ.}\,\Phi' + B'\,\text{ſin.}\,\Phi' + C'e^{\Phi'} + D'e^{-\Phi}).$$

Conſideremus priorem portionem E C pro qua ſi $x = o$, debet eſſe tam $(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}) = o$ quam $(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}) = o$, vnde ſequuntur hae duae determinationes:

$$-A + C + D = o \quad \text{et} \quad -B + C - D = o,$$

quod ſi nunc a termino E vsque ad C progrediamur ſumendo $x = \alpha$ et ponendo $\frac{\theta\alpha}{b} = \zeta$, pro hoc puncto C habemus 1°. $y = o$ vnde fit

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta + B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} = o,$$

praeterea notentur tres ſequentes valores

$$(\frac{d\,y}{d\,x}) = +\frac{\theta}{b}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A\,\text{ſin.}\,\zeta + B\,\text{coſ.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta})$$

$$(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}) = \frac{\theta\theta}{b\,b}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\,(-A\,\text{coſ.}\,\zeta - B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta})$$

$$(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}) = \frac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(+A\,\text{ſin.}\,\zeta - B\,\text{coſ.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta})$$

quibus formulis indoles curuae circa punctum C determinatur. Simili modo ex altera parte, ſi ſumamus $x' = \beta$ et ponamus $\frac{\theta\beta}{b} = \zeta'$ obtinebimus ſequentes formulas:

$$-A' + C' + D' = o, \quad -B' + C' - D' = o;$$

$$A'\,\text{coſ.}\,\zeta' + B'\,\text{ſin.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} + D'e^{-\zeta'} = o$$

$$(\frac{d\,y'}{d\,x'}) = \frac{\theta}{b}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A'\text{ſin.}\,\zeta' + B\,\text{coſ.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} - D'e^{-\zeta'})$$

$$(\frac{d\,d\,y}{d\,x'^2}) = \frac{\theta\theta}{b\,b}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t(-A'\text{coſ}\,\zeta' - B'\text{ſin.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} + D'e^{-\zeta'})$$

$$(\frac{d^3\,y'}{d\,x'^3}) = \frac{\theta^3}{b^3}\,\text{coſ.}\,\theta\theta t\,(+A'\text{ſin.}\,\zeta' - B'\text{coſ.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} - D'e^{-\zeta'}).$$

Hic igitur habemus ſex aequationes determinatas pro determinandis noſtris octo coefficientibus A, B, C, D et

et A', B', C', D'. Deinde quia vti iam notauimus debet eſſe $(\frac{dy}{dx}) = (\frac{dy'}{dx'})$; hinc naſcitur ſeptima aequatio

$$-A\,\text{ſin.}\,\zeta + B\,\text{coſ.}\,\zeta + Ce^{\zeta} - De^{-\zeta} = -A'\,\text{ſin.}\,\zeta' + B'\,\text{coſ.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} - D'e^{-\zeta'}.$$

Octaua autem aequatio inde eſt petenda, quod ambae portiones in puncto C communi curuatura debent eſſe praeditae, vnde ſi formula $(\frac{ddy}{dx^2})$ fuerit poſitiua, curuatura in C ſurſum verget, at ſi formula $(\frac{ddy'}{dx'^2})$ quoque eſſet poſitiua, curuatura deorſum vergeret, ideoque priori eſſet contraria, quare vt curuatura vtrinque fiat communis neceſſe eſt, vt ſumma iſtarum formularum euaneſcat, ex quo octava noſtra aequatio ita ſe habebit:

$$-A\,\text{coſ.}\,\zeta - B\,\text{ſin.}\,\zeta + Ce^{\zeta} + De^{-\zeta} - A'\,\text{coſ.}\,\zeta' - B'\,\text{ſin.}\,\zeta' + C'e^{\zeta'} + D'e^{-\zeta'} = 0.$$

Reliquae autem formulae $(\frac{d^3y}{dx^3})$; $(\frac{d^3y'}{dx'^3})$ inſeruiunt inveſtigandae vi Cg quam ſtylus in C ſuſtinet, quam inueſtigationem, quum parui ſit momenti, hic non reſpicimus. Ex octo autem illis aequationibus non ſolum relatio inter octo noſtras incognitas A, B, C, D et A', B', C', D definietur; ſed inſuper ad aequationem peruenietur ab his litteris immunem, ex qua angulos ζ et ζ' erui oportebit, ad quod vtique vna aequatio ſufficit, quum ratio iſtorum angulorum ζ et ζ' detur, quippe quae eſt vt α ad β. Eliſis autem litteris A, B et A', B' ſex priores aequationes reducuntur ad has relationes:

 $\frac{C}{D} =$

$$\frac{C}{D} = \frac{-\cos\zeta + \sin\zeta - e^{-\zeta}}{\cos\zeta + \sin\zeta + e^{\zeta}}; \quad \frac{C'}{D'} = \frac{-\cos\zeta' + \sin\zeta' - e^{-\zeta'}}{\cos\zeta + \sin\zeta' + e^{\zeta'}}$$

Quoniam autem hic indefinita ratio angulorum ζ et ζ' calculi euolutionem difficillimam reddere debet, caſum quo $\beta = \alpha$ ideoque angulus $\zeta = \zeta'$ accuratius expediamus:

Caſus quo ſtylus C per ipſum punctum medium laminae tranſit, ita vt ſit $\beta = \alpha$.

Quum igitur hic ſit $\zeta = \zeta' = \frac{\theta\alpha}{b} = \frac{\theta a}{2b}$

$\frac{C}{D}$ et $\frac{C'}{D'}$ inter ſe fient aequales fractioni ſcilicet

$$\frac{-\cos\zeta + \sin\zeta - e^{-\zeta}}{\cos\zeta + \sin\zeta + e^{\zeta}},$$

ita vt iam ſit

$$C = DV \text{ et } C' = D'V$$

hincque

$$A = D(1+V) \text{ et } B = D(V-1);\ A' = D'(V+1)$$

et $B' = D'(V-1)$,

qui valores in ſeptima et octaua ſubſtituti praebent:

$$(D-D')(V+1)\sin\zeta - (D-D')(V-1)\cos\zeta - (D-D')Ve^{\zeta} + (D-D')e^{-\zeta} = 0$$

$$(D+D')(V+1)\cos\zeta + (D+D')(V-1)\sin\zeta - (D+D')Ve^{\zeta} - (D+D')e^{-\zeta} = 0$$

vnde patet eſſe vel $D' = -D$ vel $D' = +D$ ideoque geminam ſolutionem prodire

I. Sit igitur 1°. $D' = -D$ eritque

$$V+1.\sin\zeta - (V-1)\cos\zeta - Ve^{\zeta} + e^{-\zeta} = 0$$

et

et ſi loco V eius valor ſubſtituatur, reperietur

$$2 = -\cos.\zeta\,(e^{\zeta} + e^{-\zeta})$$

II. Sin autem ſumamus $D' = D$ debebit eſſe

$$(V+1)\cos.\zeta + (V-1)\sin.\zeta - Ve^{\zeta} - e^{-\zeta} = 0,$$

ex quo pro V ſubſtituto valore habebitur

$$e^{2\zeta} = \frac{\cos.\zeta + \sin.\zeta}{\cos.\zeta - \sin.\zeta}.$$

Vnde patet priori caſu laminam perinde contremiſcere, atque in noſtra euolutione principali, ſi longitudo laminae tantum ad ſemiſſin reduceretur, poſteriori vero caſu tremores conuenient cum Problemate ſecundo, ſi ibi etiam longitudo laminae duplo ſumatur minor, ſiue aequalis ſemiſſi noſtrae laminae A B. Atque hinc facile intelligere licet, quomodo calculus inſtitui deberet, ſi lamina adeo in pluribus punctis ſtylo figeretur.

DE

DE
MOTV GRAVIVM CITISSIMO
SVPER CVRVIS SPECIE DATIS.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

I.

Tab. VI. Fig. 5. Datis in plano horizontali punctis A et B, inuenire eum arcum circularem APB ſuper quo corpus ex A deſcendendo citiſſime in B perueniat.

Solutio.

Biſecta diſtantia AB in C ſit $AC = BC = a$, ac per C ducta verticali PO ſit O centrum arcus quaeſiti, eiusque radius

$OA = OP = r$ erit $PC = r - \sqrt{(rr - aa)} = p$,

vt fiat $r = \frac{aa + pp}{2p}$, ſumantur coordinatae orthogonales $PX = x$, $XY = y$, erit $y = \sqrt{(2rx - xx)} = \sqrt{(\frac{aa + pp}{p} x - xx)}$, et elementum curuae $= \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx + xx)}}$, quare cum celeritas in Y ſit $= \sqrt{(p - x)}$ erit elementum temporis

$$dt = \frac{r\,dx}{\sqrt{(p - x)(2rx - xx)}},$$

ita repraeſentandum

$$dt = \frac{r\,dx}{\sqrt{(px - xx)(2r - x)}},$$

cuius

cuius integrale ita ſumtum vt euaneſcat poſito $x=0$, ſi ſtatuatur $x=p$, dabit tempus deſcenſus per arcum A P, cuius duplum erit tempus motus ab A ad B, quod minimum eſſe oportet. Cum igitur ſit

$dt = \frac{dx \surd \frac{1}{2} r}{\surd (px - xx)} (1 - \frac{x}{2r})^{-\frac{1}{2}}$ erit per ſeriem infinitam

$$dt = \frac{dx \surd \frac{1}{2} r}{\surd (px - xx)} (1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{r} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{xx}{rr} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{x^3}{r^3} + \text{etc.}).$$

At poſito poſt integrationem $x=p$, fit $\int \frac{dx}{\surd (px - xx)} = \pi$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter $= 1$; tum vero eſt in genere

$$\int \frac{x^n dx}{\surd (px - xx)} = \frac{2n-1}{2n} p \int \frac{x^{n-1} dx}{\surd (px - xx)} - \frac{1}{n} x^{n-1} \surd (px - xx)$$

quod poſtremum membrum facto $x=p$ euaneſcit. Quare cum ſit $\int \frac{dx}{\surd (px - xx)} = \pi$

erit
$$\int \frac{x\,dx}{\surd (px - xx)} = \frac{1}{2} \pi p$$
$$\int \frac{x^2\,dx}{\surd (px - xx)} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \pi p^2$$
$$\int \frac{x^3\,dx}{\surd (px - xx)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \pi p^3$$
$$\int \frac{x^4\,dx}{\surd (px - xx)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \pi p^4$$
etc.

Quibus valoribus ſubſtitutis obtinebimus tempus per A P

$$= \frac{\pi \surd r}{\surd 2} (1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{p}{r} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8} \frac{pp}{rr} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 12} \cdot \frac{p^3}{r^3} + \text{etc.}$$
$$= \frac{\pi \surd r}{\surd 2} (1 + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{p}{2r} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot (\frac{p}{2r})^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} (\frac{p}{2r})^3 + \text{etc.}$$

 Cum

Cum igitur ſit

$$\frac{p}{2r} = \frac{pp}{aa+pp}, \text{ ob } r = \frac{aa+pp}{2p},$$

ſi ſtatuamus

$$\frac{p}{2r} = nn; \text{ erit } pp = \frac{nnaa}{1-nn}, \text{ et } 2r = \frac{a}{n\sqrt{(1-nn)}};$$

hincque

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{n}\sqrt{(1-nn)}}.$$

Vel poſito potius $n = \frac{1}{m}$, vt ſit

$$p = \frac{a}{\sqrt{(mm-1)}} \text{ et } r = \frac{mma}{2\sqrt{(mm-1)}},$$

erit tempus per

$$AP = \frac{\pi m \sqrt{a}}{2\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{1}{m^6} + \text{etc.}\right)$$

vbi m ita definiri debet, vt haec expreſſio minimum valorem conſequatur. Quare ob

$$d.\frac{m}{\sqrt[4]{(mm-1)}} = \frac{dm(\frac{1}{2}mm-1)}{(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}}$$

habebitur per $\frac{\pi\sqrt{a}}{2}$ diuidendo

$$\frac{\frac{1}{2}mm-1}{(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{1}{m^6} + \text{etc.}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{(mm-1)}}\left(\frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4}\cdot\frac{1}{m^4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6}\cdot\frac{1}{m^6} + \text{etc.}\right) = 0$$

quae multiplicata per $(mm-1)\sqrt[4]{(mm-1)}$ praebet.

$$\frac{1}{2}mm + \frac{1^2}{2^3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m^6}$$

$$- 1 - \frac{1^2}{2^3} \cdot \frac{1}{m^2} \quad - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{1}{m^4} \quad - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{m^6}$$

$$- \frac{1^2}{2} - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{m^2} \quad - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \cdot \frac{1}{m^4} \quad - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} \cdot \frac{1}{m^6}$$

$$- \frac{1^2}{2} \cdot \frac{1}{m^2} \quad + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{m^4} \quad + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \cdot \frac{1}{m^6}$$

nihilo aequandum; vnde ſinguli termini collecti dabunt:

$$\frac{1}{3}mm - \frac{11}{2^3 \cdot 2} - \frac{1^2 \cdot 31}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{m^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 59}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 95}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{m^6} - \text{etc.} = 0$$

quae ad hanc reducitur:

$$1 - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{11}{m^2} - \frac{1^2 \cdot 31}{2^2 \cdot 4^2 \cdot m^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 59}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot m^6} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 95}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot m^8} - \text{etc.} = 0$$

vbi numeri 11, 31, 59, 95 ſunt quadrati pares quinario minuti. Quo hinc valorem ipſius m eruamus, hanc aequationem ita repraeſentemus:

$$1 = \frac{A}{m^2} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^6} + \frac{D}{m^8} + \frac{E}{m^{10}} + \text{etc.}$$

eruntque harum litterarum valores tam ipſi quam eorum logarithmi:

A = 2,7500000	l A = 0,4393327
B = 0,4843750	l B = 9,6851817
C = 0,2304687	l C = 9,3626120
D = 0,1449584	l D = 9,1612436
E = 0,1039755	l E = 9,0169309
F = 0,0803659	l F = 8,9050720
G = 0,0651991	l G = 8,8142416
H = 0,0547023	l H = 8,7380053
I = 0,0470380	l I = 8,6724492
K = 0,0412122	l K = 8,6150254.

Ex primo termino ſtatim patet, eſſe $mm > 2\frac{3}{4}$, verum tamen valor $mm = 3$ nimis magnus deprehenditur; ex quo mm intra limites 2, 75 et 3, 00 continetur.

Tribuamus ergo ipſi mm quosdam valores a veritate parum diſcrepantes, et omnes terminos ſeriei colligamus, vti hinc videre licet:

	$mm = 2,94$	$mm = 2,95$
	0, 9353742	0, 9322034
	560386	556593
	90692	89773
	19402	19140
	4734	4654
	1245	1219
	343	335
	98	96
	29	28
	8	8
ſumma	1, 0030682	0, 9993883
error	+ 0, 0030682	− 0, 0006117

ex quibus binis erroribus concluditur valor vero proximus

$mm = 2,94833$, hinc $\sqrt{(mm - 1)} = 1,39581$, et

$CP = p = \frac{a}{1,39581} = 0,71643\, a$, atque

$PO = r = \frac{2,94833}{2 \cdot 1,39581} a = 1,056136, a$

vnde arcus A P continebit $71^\circ, 14', 7\frac{3}{13}''$.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Arcus ergo quaeſitus A P C ita commodiſſime deſcribitur vt per rectae A B punctum medium C ducta verticali, capiatur C P $=$ 0, 71643, A C ſeu C O $=$ 0, 33970. A C, eritque O centrum circuli deſcribendi eiusque radius O A $=$ 1,056136. AC.

Coroll. 2.

3. Cum angulus B O P ſit $71^\circ, 14', 7\frac{3}{13}''$, ſi ducatur corda B P erit angulus C B P $= 35^\circ, 37', 3\frac{8}{13}''$ vnde colligitur ipſa corda B P $=$ 1, 2301315. A C. Nulla autem harum rationum rationalis eſſe videtur.

Scholion.

4. Tabulae logarithmorum, quibus in ſuperiori calculo ſum vſus, vix ſufficiunt, vt valorem ipſius mm accuratius definiamus. Interim tamen, cum is intra limites 2, 948 et 2, 949 contineatur, faciamus pro vtroque calculos qui ita ſe habent:

$mm = 2,948$	$mm = 2,949$
0, 9328358	0, 9325194
557249	556971
89956	89864
19193	19167
4670	4662
1224	1222
337	336
96	96
28	28
8	8
3	3
1, 0001222	0, 9997551
Err. $= +$ 1222	$-$ 2449

vnde colligitur $mm = 2,94833288$, ita vt valor ſupra inuentus tam prope ad veritatem accedat, vt hic vix certior aeſtimari queat; diſcrimen enim facile ab errore vltimarum notarum oriri potuit. Hinc foret $mm = \frac{1769}{600}$ cuius quippe valor eſt $2,948\frac{1}{3}$ neque propius veritatem aſſequi licet, niſi quis velit maioribus logarithmorum tabulis vti.

Scholion 2.

5. Forſitan iuuabit ex inuento hoc valore mm ipſum tempus deſcenſus per arcum AP definiuiſſe. Quia igitur erat

$$\frac{mma}{\sqrt{(mm-1)}} = 2r = 2,112272\,a, \text{ erit}$$

$$\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{(mm-1)}} = 1,453365\sqrt{a};$$

et ob tempus per

$$AP = \frac{\pi m\sqrt{a}}{\sqrt{(mm-1)}}\left(1 + \frac{\alpha}{m^2} + \frac{\beta}{m^4} + \frac{\gamma}{m^6} + \frac{\delta}{m^8} + \text{etc.}\right)$$

ſingulos terminos per logarithmos euoluendo habebimus:

$l\alpha =$

	$1 = 1,00000000$
$l\alpha = 9,3979400$	$\frac{\alpha}{m^2} = 0,08479368$
$l\beta = 9,1480625$	$\frac{\beta}{m^4} = 0,01617743$
$l\gamma = 8,9897000$	$\frac{\gamma}{m^6} = 0,00381040$
$l\delta = 8,8737161$	$\frac{\delta}{m^8} = 0,00098949$
$l\varepsilon = 8,7824011$	$\frac{\varepsilon}{m^{10}} = 0,00027197$
$l\zeta = 8,7068240$	$\frac{\zeta}{m^{12}} = 0,00007751$
$l\eta = 8,6424546$	$\frac{\eta}{m^{14}} = 0,00002267$
$l\theta = 8,5863971$	$\frac{\theta}{m^{16}} = 0,00000676$
$l\iota = 8,5367499$	$\frac{\iota}{m^{18}} = 0,00000205$
$l\varkappa = 8,4921971$	$\frac{\varkappa}{m^{20}} = 0,00000063$
	reliquae 26
	ſumma $= 1,10615285$

vnde colligitur tempus per A P $= 0,803822.\pi\sqrt{a}$
et pro π ſubſtito valore eſt $= 2,525280.\sqrt{a}$
ideoque tempus per A P B $= 5,050560.\sqrt{a}$.

Scholion 3.

6. Problema hoc ideo notatu dignum videtur, quod ſolutio ex aequatione infinita, cuius radix inveſtigari debet, ſit petenda. Cum enim quaeſtio, in genere qua inter omnes omnino curuas ab A ad B ducendas ea quaeritur, ſuper qua motus citiſſime abſoluatur, methodo maximorum et minimorum expedite conficiatur, videri poterat, ſi eadem quaeſtio tantum ad arcus circulares reſtringatur, ſolutionem vix difficiliorem eſſe futuram; quod tamen multo ſecus euenit. Quamobrem in doctrina maximorum

et

et minimorum etiamnum methodus deſideratur, inter omnes tantum curuas, quae ad certam quandam ſpeciem referantur, eam determinandi, quae certa quapiam maximi minimiue proprietate ſit praedita. In hoc quidem genere alia methodus adhuc non patet, niſi qua hic ſum vſus, qua ea quantitas, quae maxima minimaue fieri debet, per ſeriem exprimitur, indeque more ſolito valor maximo minimoue conueniens eruitur. Quodſi ſolutio problematis propoſiti ad eiusmodi numeros perduxiſſet, quorum certa quaedam proprietas agnoſci potuiſſet, inde fortaſſe aliam methodum magis directam coniectura aſſequi licuiſſet; verum numeri inuenti ita ab omni proportione cognita abhorrent, vt nullum veſtigium aliter eo perueniendi pateat.

Problema 2.

7. Datis in recta horizontali binis punctis A et B inter omnes ſemi-ellipſes ſuper axe AB deſcribendas eam definire APB, ſuper qua graue in A deſcendens citiſſime ad B perueniat.

Solutio.

Biſecta AB in C ponatur $CA = CB = a$, qui erit alter ſemi-axis ellipſis datus, quaeſitus autem ponatur $CP = p$. Vocatis coordinatis $CX = x$, $XY = y$, erit $aayy + ppxx = aapp$; vnde

$$x = \frac{a}{p}\sqrt{(pp - yy)}, \text{ et } dx = -\frac{aydy}{p\sqrt{(pp-yy)}}.$$

Ergo

Ergo elementum curuae in

$$Y = \frac{dy\sqrt{(p^4 + (aa - pp)yy)}}{p\sqrt{(pp - yy)}}.$$

Quare cum celeritas in Y ſit $= \sqrt{y}$, erit temporis quo arcus A Y conficitur, elementum

$$\frac{dy\sqrt{(p^4 + (aa - pp)yy)}}{p\sqrt{y(pp - yy)}}$$

quod ita integrari debet, vt euaneſcat facto $y = 0$ tum vero poſito $y = p$, habebitur tempus deſcenſus per A P, quod minimum eſſe oportet.

Cum autem hinc ſeries concinna elici nequeat, alteram variabilem x in calculum introducamus; et quia

$$y = \frac{p}{a}\sqrt{(aa - xx)}; \quad dy = -\frac{pxdx}{a\sqrt{(aa - xx)}};$$

hincque elementum curuae

$$= \frac{dx\sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}}{a\sqrt{(aa - xx)}},$$

erit temporis elementum

$$= \frac{1}{\sqrt{ap}} \cdot \frac{dx\sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}}{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}};$$

quod ita integratum vt poſito $x = 0$ euaneſcat, facto $x = a$ dabit tempus deſcenſus per A P. Hoc autem integrale haud difficulter in ſeriem infinitam convertimus, poſito enim breuitatis gratia

$$\frac{aa - pp}{aa} = n; \text{ erit } \sqrt{(a^4 - (aa - pp)xx)}$$

$$= aa\left(1 - \frac{nxx}{aa}\right)^{\frac{1}{2}} = aa\left(1 - \frac{1 \cdot nxx}{2aa} - \frac{1 \cdot 1 \cdot n^2 x^4}{2 \cdot 4 a^4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3\, n^3 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6\, a^6} - \text{etc.}\right)$$

vnde fit elementum temporis

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{p}}\cdot\frac{dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}\left(1-\frac{1\cdot nxx}{2aa}-\frac{1\cdot 1\cdot n^2x^4}{2\cdot 4\, a^4}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\, n^3x^6}{2\cdot 4\cdot 6\, a^6}-\text{etc.}\right).$$

Spectemus integrale $\int\frac{dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}$ vt datum, ſitque eius valor $=\frac{\alpha}{\sqrt{a}}$ caſu $x=a$, et cum in genere ſit

$$\int\frac{x^{\lambda+2}dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}=\frac{2(\lambda+1)}{2\lambda+3}a^2\int\frac{x^\lambda dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}-\frac{2}{2\lambda+3}x^{\lambda+1}\sqrt[4]{(aa-xx)}$$

erit caſu $x=a$ vt ſequitur

$$\int\frac{dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}=\frac{\alpha}{\sqrt{a}}$$

$$\int\frac{xx\,dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}=\tfrac{2}{3}\,\alpha\, a\sqrt{a}$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 7}\,\alpha\, a^3\sqrt{a}$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}=\frac{2\cdot 6\cdot 10}{3\cdot 7\cdot 11}\,\alpha\, a^5\sqrt{a}$$

Hisque ſubſtitutis colligitur tempus per A P

$$=\frac{\alpha a}{\sqrt{p}}\left(1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}n-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6}{3\cdot 7}nn-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10}{3\cdot 7\cdot 11}n^3-\text{etc.}\right)$$

$$=\frac{\alpha a}{\sqrt{p}}\left(1-\tfrac{1}{1}\cdot\tfrac{1}{3}n-\frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 3}{3\cdot 7}nn-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 11}n^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15}n^4\right)\text{etc.}$$

vbi ob $\frac{aa-pp}{aa}=n$, eſt $p=a\sqrt{(1-n)}$ et $-2p\,dp=aa\,dn$.

Quare

Quare ſi ponamus breuitatis gratia hoc tempus:

$$\frac{\alpha\alpha}{\sqrt{p}}(1 - An - Bnn - Cn^3 - Dn^4 - En^5 - \text{etc.})$$

differentiatio praebet hanc aequationem

$$\begin{array}{l} 0 = 1 - An - Bn^2 - Cn^3 - Dn^4 - En^5 \\ \quad - 4A - 8B - 12C - 16D - 20E - 24F \\ \qquad\quad + 4A + 8B + 12C + 16D + 20E \end{array}$$

quae reducitur ad

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{9}{7}An + \tfrac{17}{11}Bnn + \tfrac{25}{15}Cn^3 + \tfrac{33}{19}Dn^4 + \tfrac{41}{23}En^5 \text{ etc.}$$

ſeu $\frac{1}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot n + \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 7} \cdot \frac{17}{11} nn + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 11} \cdot \frac{25}{15} n^3$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15} \cdot \frac{33}{19} n^4 + \text{etc.}$$

vnde valor numeri n elici debet, quo inuento eſt $p = a\sqrt{(1 - n)}$, in hunc finem, cum ſit

$$A = \tfrac{1}{3};\ B = \tfrac{3}{14}A;\ C = \tfrac{15}{33}B;\ D = \tfrac{35}{60}C;\ E = \tfrac{63}{95}D;\ F = \tfrac{99}{138}E$$

$$G = \tfrac{143}{189}F;\ H = \tfrac{195}{248}G;\ I = \tfrac{255}{315}H;\ K = \tfrac{323}{390}I;\ \text{etc.}$$

habentur hi valores in logarithmis:

$lA = 9,5228787$;	$l\frac{9}{7}A = 9,6320232$
$lB = 8,85387 20$;	$l\frac{17}{11}B = 9,0429282$
$lC = 8,5114494$;	$l\frac{25}{15}C = 8,7332981$
$lD = 8,2773661$;	$l\frac{33}{19}D = 8,5171264$
$lE = 8,0989830$;	$l\frac{41}{23}E = 8,3500391$
$lF = 7,9547391$;	$l\frac{49}{27}F = 8,2135714$
$lG = 7,8336133$;	$l\frac{57}{31}G = 8,0981265$
$lH = 7,7291962$;	$l\frac{65}{35}H = 7,9980416$
$lI = 7,6374258$;	$l\frac{73}{39}I = 7,9096841$
$lK = 7,5555637$;	$l\frac{81}{43}K = 7,8305802.$

Primum autem ſtatim apparet eſſe $n < \frac{7}{9}$, quin etiam binis ſumtis terminis primis $n < \frac{2}{3}$; quare conſiderentur limites $n = 0,6$ et $n = 0,7$ quibus fit:

	$n = 0,6$	$n = 0,7$
1.	0, 25714290	0, 30000000
2.	3974026	5409089
3.	1168832	1856060
4.	426316	789802
5.	174099	376295
6.	76292	192379
7.	35090	103232
8.	16720	57389
9.	8185	32777
10.	4094	19123
	0, 31597944	0, 38836146
cum ſeq.	4180	38246
ſumma	0, 31602124	0, 38874392
	0, 33333333	0, 33333333
Error =	− 0, 01731209	+ 0, 05541059

ex quibus erroribus proxime colligitur $n = 0,6238$ Fiant ergo duae nouae hypotheſes:

$n = 0,$

$n = 0,620$	$n = 0,625$
0,26571430	0,26785720
4243377	4312093
1292627	1321107
486064	501934
205115	213520
92880	97466
44143	46697
21736	23178
10995	11820
5682	6157
0,32974150	0,33319692
8523	9250
0,32982673	0,33328942
0,33333333	0,33333333
Error − 0,00350660	− 0,00004391

vnde patet numerum n adeo maiorem eſſe quam 0,625 foretque ſatis exacte $n = 0,625063$, hinc $1 - n = 0,374937$ et $p = a\sqrt{(1-n)} = 0,61232.\,a$ ita vt pro ellipſi quaeſita ſit

$$AC : CP = 1 : 0,61232$$

quae ratio cum nulla cognita conuenire videtur.

Scholion.

8. Operae pretium videtur valorem ipſius n accuratius inueſtigare, quoniam vidimus primis limitibus tantopere eſſe aberratum; conueniet igitur

praeter valorem $n = 0,625$, alium aſſumi, qui praebeat errorem fere aequalem at diuerſi ſigni vnde hae duae hypotheſes conſiderentur:

	$n = 0,625$	$n = 0,6252$
	0, 26785720	0, 26794292
	4312093	4314855
	1321107	1322376
	501934	502579
	213520	213862
	97466	97653
	46697	46801
	23178	23237
	11820	11853
	6157	6177
	0, 33319692	0, 33333685
Term. ſeqq.	7453	7474
	0, 33327145	0, 33341159
	0, 33333333	0, 33333333
Error	− 0, 00006188	+ 0, 00007826

Hic etiam neceſſe eſt ſummam ſequentium terminorum accuratius colligi, quae fere vti eſt notata, reperitur. Ex deprehenſis ergo erroribus colligitur verus valor $n = 0,6250883$, parum a praecedente diſcrepans; hincque $p = 0,6123001 . a = CP$.

Corollarium I.

9. Ea ergo ellipſis, quae hac minimi proprietate eſt praedita ita definitur, vt ſi ſemiaxis hori- zonta-

zontalis C A $=$ B C ponatur $= a$, ſit ſemiaxis coniugatus verticalis

$$C P = 0,6123001 . a.$$

Tum vero diſtantia foci F a centro erit

$$C F = \sqrt{(a a - p p)} = a \sqrt{n} = 0,79062\, a,$$

et ſemiparameter

$$= \frac{p p}{a} = (1 - n)\, a = 0,3749117\, a.$$

Coroll. 2.

10. Haec ellipſis ſpecies nullis rationibus cognitis continetur, neque enim ratio elementorum eius rationaliter, neque per indolem circuli exprimi poſſe videtur; ita vt iſta ſpecies omnino ſit ſingularis, neque aliis praeterea proprietatibus praedita exiſtimanda.

Scholion.

11. Ex his exemplis intelligitur, quam inſignis adhuc pars methodi maximorum et minimorum iaceat inculta cum ſi ſpecies curuarum ex quibus electio maximi minimiue fieri debet, proponatur alia via haud pateat, niſi vt radix ex aequatione infinita extrahatur. Atque in his quidem exemplis commode vſu venit, vt termini iſtius aequationis infinitae ſatis promte conuergant, quod ſi in aliis quaeſtionibus ſecus eueniat, multo maiori labore erit opus, quin etiam ſi aequatio plures vel adeo infinitas inuoluat radices reales, reſolutio completa ne expectanda quidem videtur. Quod eo magis mirum

rum videri debet, cum methodus maximorum et minimorum iam ita ſit exculta, vt non ſolum inter omnes omnino curuas ſed etiam inter infinitas tantum certa quadam indole praeditas, veluti quae ſint eiusdem longitudinis, vel eandem aream includant, ea aſſignari poſſit, cui maximi minimiue proprietas quaecam conueniat. Nunc igitur intelligimus plurimum intereſſe, vtrum curuae infinitae propoſitae communi quaedam proprietate, veluti eadem longitudine ſint praedita, an vero omnes certa quadam curuarum ſpecie contineantur; hoc enim poſteriori caſu fateri cogimur methodum huiusmodi quaeſtiones reſoluendi etiamnunc penitus latere; quae reſolutio enim in caſibus hic euolutis ſucceſſit, in aliis magis complicatis locum omnino non inuenit. Plurimum autem intereſſe arbitror, quaecunque adhuc in Analyſi deſiderantur, ſollicite annotari.

PHYSI-

PHYSICA.

CYPRINVS CAPOETA
ET
CYPRINVS MVRSA.

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Incolis *maris Caſpii* nantibus, in commentatione nupera de *Salmone Leucichthyde* et *Cyprino Chalcoide* enumeratis, adſociandum eſt par fratrum nobile ex eadem numeroſiſſima *Chalcoidis* familia, qui nobis, ad ripas *Cyri Teflifii*, quod *Georgiae* metropolis eſt, per hyemem hiſtoriae naturalis gratia, annuente RVSSIAE AVGVSTISSIMA et fauente GEORGIAE SERENISSIMO commorantibus, innotuerunt. Alter horum: *Capoëta*; alter *Murſa* et *Georgianis* et adfinibus *Perſis* ac *Turcis* audit; atque hanc ob cauſſam etiam a nobis vterque eodem nomine triuiali imbuitur, cum ſynonyma idonea ad piſces hoſce, qui nobis omnino noui videntur, denominandos deficiant, in quae attamen inquirant ichthyologi, qui otii et librorum copia fruuntur, quibus nos peregrinatores caremus. Ex regulis ſyſtematicis *Summorum Virorum*, ARTEDIVM volumus atque LINNAEVM, et *Capoëtam* et *Murſam* ad *Cyprini* genus, pertinere affirmauimus; quod vt pateat, cum reliquis attributis, vtriusque ſuccifas tradamus deſcriptiones.

DESCRIPTIO CYPRINI CAPOETAE.

Habitus analogus *Cyprino Orfo*; *magnitudo* pedalis, indiuiduis maximis vix vnquam 14 pollices anglicanos excedentibus; *ſtatura* compreſſo-oblonga, latitudine quinquies, craſſitie ſepties a longitudine ſuperata.

Caput breue, ſed latiſſimum, glabrum, vertice conuexo, fuſco; *roſtrum* obtuſiſſime conicum, ante mandibulam ſuperiorem prominens; *mandibula* ſuperior vaginata, ſemilunata, inferior conuexe arcuata, *labiis* ſtrictiſſimis, cartilagineis, inferiore praeſertim margine acutiſſimo; verbo: *os* ſimillimum ori *Cyprini Naſi*, ſed latiora omnia.

Cirrus vtrinque ad angulos oris ſolitarius, paruus, ore transuerſo triplo breuior.

Nares duplices, inter roſtrum et oculos medium occupantes, valuula intermedia diſtinctae.

Oculi ſat magni, laterales; iride argentea, ſuperne fuſco-aurata; pupilla circulari.

Opercula branchiarum laeuia, fuſca, punctata, aperturas branchiarum vtrinque ſolitarias obtegentia; *membrana branchio-ſtega* vtrinque triradiata, alba.

Dorſum ante pinnam dorſi acutiuſculum, parum adſcendens; pone pinnam rotundatum, horizontale; *latera* conuexiuſcula; *linea lateralis* initio inter pinnas pectorales et ventrales nonnihil deorſum curvata, abdomini propior, quam dorſo; *abdomen* latum, vbique planum.

Squa-

Squamae totum corpus obtegentes, imbricatae, rotundatae, mediocres, laeucs, ſtriatae, argenteae; in dorſo et lateribus fuſco adumbratae et punctis fuſcis circa marginem irroratae; in ventre minores et albae.

Pinna dorſalis ſolitaria, medium dorſi occupans, trapezoidea; *radiis* 13. ſaepius tantum 12. primo breuiſſimo; ſecundo duplo longiori; tertio omnium longiſſimo, retrorſum vtrinque a baſi vltra medium denticulis deorſim ſpectantibus ſerrato.

Pinnae pectorales oblongo-acuminatae; *radiis* 19. rarius 17 vel 18. decreſcentibus.

Pinnae ventrales dorſali oppoſitae, in medio ventre ſitae, obtuſe trapezoideae, ſupra ad baſim apophyſi lanceolata et ſquamoſa munitae, *radiis* 10. rarius 9. decreſcentibus.

Pinna analis in medio inter pinnas ventrales et caudam, proxime pone anum obuia, figura ventralibus analoga, ſed longior; *radiis* conſtanter 9. primo minima et difficilius detegendo; ſecundo longiori; tertio longiſſimo; reliquis decreſcentibus.

Cauda verticalis, bifurca, cruribus aequalibus; *radiis* 19 exceptis vtrinque 3 vel 4. breuioribus extimis; omnibus pariter cum reliquis pinnarum radiis ramoſis; ſed tribus primis pinnae dorſalis et analis atque primis pinnarum pectoralium et ventralium indiuiſis; omnibus inermibus.

Color pinnarum omnium fuſcus, punctulis obſcurioribus irroratus, ſed in pinnis ventralibus ſuper-

ne albidus. In iunioribus digitalibus et ſpithameis color hic dilutior atque pinnae ventrales et analis rubenti-albae, immaculatae, quos *Georgiani* peculiari nomine *Pitſchkul* ab adultis diſtinguunt.

Dimenſiones partium externarum ſecundum pedem duodecimalem *Londinenſem* ita:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	12.	6.
— — — — — ad initium P. dorſalis	4.	9.
— — — — — ad extremum P. dorſ.	6.	3.
— — — — — ad caudae radicem	10.	6.
— — — — — ad maxillam inferior.	—	6.
— — — — — ad radicem P. pector.	2.	4.
— — — — — ad radicem P. ventral.	5.	4.
— — — — — ad initium P. ani —	7.	10
— — — — — ad extremum P. ani	8.	7.
Diameter oculorum — — — —	—	4.
——— inter nares — — — —	—	8.
——— inter oculos — — — —	1.	3.
——— perpendicularis ad oculos — —	1.	3.
—— —— ad P. pectoralium radicem —	1.	10
—— —— maximus ad P. dorſalis initium	2.	9.
—— —— ad anum — — — — —	1.	10
—— —— ad caudae radicem — — —	1.	2.
——— inter caudae crura — — —	4.	5.
——— transuerſalis ad angulos oris — —	—	11
—— —— ad aperturas branchiarum —	1.	7.
—— —— maximus ad P. dorſalem —	1.	9.
—— —— ad anum — — — —	1.	—
—— —— ad caudae radicem — — —	—	4.

Lon-

	poll	lin.
Longitudo cirrorum – – – – –	–	$3\frac{1}{2}$.
Longitudo ſquamarum maximarum – –	–	$1\frac{3}{4}$.
Latitudo earum – – – – – – –	–	$3\frac{1}{2}$.

Haec de externis ſufficiant, nunc quaedam de internis addamus.

Cauitas oris alba, glabra, edentula, ipſis faucium oſſiculis inferioribus, congeneribus propriis, vix ac ne vix exaſperatis; oſſiculo ouali plano, ſuperne in faucibus ſito etiam glabro; *lingua* immobilis adnata.

Branchiae vtrinque quatuor, in parte concaua tuberculis obſoletis, glabris, vtrinque pectinatae; accedit fauces verſus radius quintus impennis et antrorſum tantum obſoletius pectinatus.

Cor depreſſum, ambitu rotundatum criſtae galli figuram ſiſtens, pericardio tenuiſſimo inuolutum.

Diaphragma totum tendineum, anguſtum.

Hepatis corpus latum, lacero-quadragonum, ſub diaphragmate ſpinam verſus ſitum, ex quo deſcendit deorſum ad latus ventriculi dextrum *proceſſus*, penna anſerina non craſſior, qui in medio ventriculo retrorſum dilatatus in lobulum cordatum, pollicem latum, atque ab hinc vlterius ſecundum ventriculum procedit et vix pollicem ante anum amplificatus iterum in lobulum cordatum, ſemipollicem latum, antrorſum in ipſa ventriculi curuatura repoſitum.

Veſi-

Veſicula fellea ampliſſima, pyriformis, fundo anum verſus ſpectans, ſub ventriculo in medio abdomine ſita, ab hepate ſeparata, inter inteſtini gyros abſcondita, bile tenui, vireſcente repleta.

Lien linearis, medio et apice amplificatus, ſpinam verſus et ſiniſtrorſum inter inteſtini flexuras latens.

Ventriculus ab inteſtino reliquo non diſtinctus, niſi quod aliquantum amplior ſit, et recta a gula vsque ad anum fere procedat. *Tractus inteſtinalis* longior, quam vix in vllo piſce, decies, duodecies et vltra corporis longitudinem exſuperans in individuo antea dimenſo, 12½ pollices longo, 132. pollices, in altero, 14 fere pollices longo, 180. pollices a gula ad anum adaequans, varie ſpiraliter tortus retortusque, ſpiris breui celluloſa arcte inter ſe connexis, interſtitiis pinguedinem oleoſam fouentibus. Tunicae inteſtinalis tractus tenuiſſimae, ita vt difficillime integre reuolui poſſit; fibris in ventriculo longitudinaliter ſerpentinis, in reliquo tractu rectis. Cauitas inteſtini glabra, muco albido ſcatens.

Veſiculae ſpermaticae et *ouaria* alba, linearia, anguſta, vtrinque a ſphinctere veſicae aëreae ad anum procedentia.

Peritonaeum argenteum, epidermide aterrima veſtitum.

Veſica aërea per totum abdomen ad ſpinam dorſi decurrens, argentea, medio conſtricta; ductu pneumatico e gula procedente et parti inferiori ſub ſphinctere inſerto.

Renes

Renes ad ſpinam dorſi, ſupra veſicam aëream ſiti, confluentes, ſanguinolenti, in veſiculam vrinariam, ad anum obuiam, ſeſe exonerantes.

Caro alba, ſapida, oſſiculis plurimis bifurcis ſtipata. Coſtae vtrinque 19. vertebrae 43.

Habitat in *mari Caſpio*, ex quo per menſes hyemales ad prolificationis negotia celebranda *Cyrum* et fluuios hunc petentes adſcendit, ſed vix vltra *Teſtiſium* procedit.

DESCRIPTIO CYPRINI MVRSAE.

Habitus analogus *Lucio Eſoci*; *magnitudo* pedalis, indiuiduis maximis vix 16. pollices anglicanos exſuperantibus. *Statura* tetragono-oblonga, latitudine ſepties, craſſitie nonies a longitudine ſuperata.

Caput elongatum, conicum, compreſſiuſculum, glabrum, vertice conuexo, anguſto, parum adſcendente, fuſco; *roſtrum* rotundatum, tumidum, ante mandibulam ſuperiorem prominens; *mandibula* ſuperior profunde vaginata, parabolica; inferior mento breuior, ſemicircularis; *labia* laxa, tumidiſſima; ſuperius integrum, inferius trilobum; *os* clauſum transuerſale, capitis diametro aequale, apertum tubuloſum.

Cirri quatuor; duo ad latera roſtri; duo ad angulos oris, longitudine inter ſe et diametro transverſo oris aequales.

Nares oculis propiores quam roſtro, vtrinque duplices, valuula intermedia aperturam poſticam obtegente.

 Oculi

Oculi ad latera capitis ſiti, mediocres, convexi; iride flauicante, ſuperne fuſco maculata, pupilla circulari.

Opercula branchiarum laeuia, fuſca, aperturas branchiarum vtrinque obtegentia; *membrana branchioſtega* vtrinque triradiata, alba.

Dorſum rectum, vix a vertice adſcendens, latum, planum fere ſine vlla conuexitate, a vertice ad pinnam dorſi pariter ac ab ea ad caudam; *latera* conuexa; *linea lateralis* recta, medium corporis occupans; *abdomen* latum, vbique planum.

Squamae totum corpus obtegentes, denſe imbricatae, tetragono-rotundatae, paruae, muco obductae, auratae, ſupra fuſco adumbratae, ſubtus albidae.

Pinna dorſalis ſolitaria, in medio dorſi ſita, trapezoidea, *radiis* 12, rarius 11. primo breuiſſimo; ſecundo duplo longiori; tertio omnium longiſſimo, craſſiſſimo, retrorſum vtrinque a baſi vltra medium denticulis deorſum ſpectantibus ſerrato.

Pinnae pectorales oblongae, rotundatae; *radiis* 17. rarius 16. decreſcentibus.

Pinnae ventrales dorſali oppoſitae, in medio ventre ſitae, obtuſae trapezoideae; *radiis* 8. decreſcentibus.

Pinna analis in medio inter pinnas ventrales et caudam, proxime pone anum obuia, figura ventralibus analoga, vix longior; *radiis* conſtanter 7, primo longiſſimo, et reliquis decreſcentibus.

Cauda

Cauda verticalis, bifurca, cruribus aequalibus; radiis 19. neglectis vtrinque tribus quatuorue breuioribus; omnibus pariter cum reliquis pinnarum radiis ramoſis, exceptis tribus primis pinnae dorſalis et primis ſolitariis pinnarum pectoralium, ventralium atque analis indiuiſis; omnibus inermibus.

Color pinnarum pectoralium, dorſi et caudae fuſcus; ventralium albus, fuſco ſupra maculatus; analis autem pinna tota alba.

Dimenſiones partium externarum ita ſecundum anglicanos pollices et lineas.

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	12.	2.
– – – – ad initium P. dorſalis	5.	6.
– – – – ad extremum eiusdem	6.	10.
– – – – ad caudae radicem –	10.	1.
– – – – ad maxillam inferiorem	—	6.
– – – – ad radicem P. pectoralis	2.	10.
– – – – ad radicem P. ventralis	5.	8.
– – – – ad initium P. ani –	8.	3.
– – – – ad extremum P. ani –	9.	3.
Diameter oculorum - - - - -	—	3.
—— inter nares – – – – –	—	7.
—— inter oculos – – – – –	—	10.
—— perpendicularis ad oculos – – –	1.	1.
—— —— ad pectoralium radicem –	1.	8.
—— —— maximus ad P. dorſalem –	2.	—
—— —— ad anum – – – –	1.	6.
—— —— ad caudae radicem – – –	1.	1.
—— —— inter caudae crura – – –	3	9.

	poll.	lin.
Diameter tranſuerſalis ad angulos oris - -	—	7.
—— —— ad aperturas branchiarum -	1.	2.
—— —— maximus corporis ad P. dorſi	1.	4.
—— —— ad anum - - - -	—	9.
—— —— ad caudae radicem - - -	—	3.
Longitudo cirrorum anticorum - - -	—	7.
—— —— —— poſticorum - - -	—	9.
Longitudo ſquamarum maximarum - -	—	1.
Latitudo earum - - - - - -	—	1.

Reſtat, vt agatur de internis *Cyprinae Murſae.*

Cauitas oris alba, edentula, oſſiculorum faucium ſupremo ouato, glabro, duobus inferioribus vix exaſperatis; *Lingua* immobilis, adnata et obſoleta.

Branchiae vtrinque quatuor, in parte concaua ſerie duplici tuberculorum acutorum, breuium ac glabrorum obſitae; accedit fauces verſus radius quintus absque branchia, antrorſum tantum ſerie vnica tuberculorum munitus.

Cor oblongum, obſolete triquetrum, pericardio tenuiſſimo inuolutum.

Diaphragma tendineum, anguſtum.

Hepar corpore lato ſub diaphragmate et pone ventriculum omnem abdominis latitudinem occupat, et dextrorſum dimittit a medio ventriculo ad anum fere vsque *proceſſum* linearem, pennae anſerinae craſſitie, qui in medio ſub fundo veſiculae felleae bifurcatur in lobulum ſiniſtrum, breuiorem, anguſtum

et

et dextrum longiorem, in fine ante anum in figuram triquetram dilatatum.

Veſicula fellea magna, pyriformis, in medio abdomine inter inteſtini gyros ſita, fundo obtuſſiſſimo ouario dextro impreſſa, atra bile ſcatens.

Lien linearis, ſiniſtrorſum ſitus, a diaphragmate vsque ad medium abdomen excurrens, obſcure rubens, ventriculo poſtice adhaerens.

Ventriculus non niſi diametro aliquantum ampliori a *tractu inteſtinali* diſtinguendus, qui ipſo piſce fere duplo longior, in dimenſo nimirum indiuiduo 18. pollices, ſed in alio pariter pedali 23. pollices adaequat; a gula ad anum fere vsque recte deſcendit; dein ſiniſtrorſum reflectitur et adſcendit paralleliter vltra medium abdomen; exinde dextrorſum et deorſum tendit per ſemipollicem; tunc ſurſum et ſiniſtrorſum per ſesquipollicem procedit; iterum per pollicem deorſum et dextrorſum abit; ab hinc per ſemipollicem ſiniſtrorſum adſcendit, tandemque ſupra ſecundam flexuram deorſum recta ad anum procedit. Tunicae inteſtini ſat craſſae, fibris rectis, cavitas glabra mucum plurimum in initio albidum, in progreſſu brunneum continens.

Ouaria vtrinque ad veſicam aëream ſita, a diaphragmate ad anum vsque extenſa, oblonga, compreſſa, alba, ouulis magnitudine ſeminis papauerini *Ianuario* foeta.

Veſiculae ſpermaticae lineares, albae.

Peritonaeum argenteum, epidermide atra veſtitum.

Veſica aërea argentea, parua, a diaphragmate ad medium abdomen tantum decurrens, medio conſtricta; parte ſuperiori cylindrica; inferiore triplo longiore, acuminata, penna anſerina anguſtiore, ductum pneumaticum recipiente.

Renes ad ſpinam, ſupra veſicam aëream ſiti, ſanguinolenti, confluentes, in veſiculam vrinariam ante anum ſeſe exonerantes.

Caro alba, ſapida, oſſiculis bifurcis fere carens; *coſtae* vtrinque 20; *vertebrae* 43.

Habitat in *mari Caſpio*, ex quo ad nuptias celebrandas *Cyrum* adſcendit per menſes vernales.

Terek fluuium pariter vt *Wolgam* et *Murſa* et *Capoëta* reſpuit, quamquam alias *Terek* fluuio et *Cyro* piſces fere omnes communes ſint, ſcilicet *Salmo Salar*, *Cyprinus Chalcoides*, *Carpio*, *Vimba*, et *Naſus*, *Silurus Glanis*, quibus accedunt *Acipenſer Huſt*, *Sturio*, atque *Seuruga* et *Schypa Ruſſorum*; ſed *Acipenſer Ruthenus* ſeu *Sterletta Ruſſorum*, *Salmo Leucichthys* et *Cyprinus Cultratus Wolgam* frequentiſſime petentes, *Cyrum* et *Terek* fluuium fugiunt.

Quibus addendi ſunt duo *Cyprini* cirroſi, quorum alter *Terek* fluuium, alter *Cyrum* e mare *Caſpio* adſcendit. *Terekienſis*, ſuadentibus *Artedianis* obſeruationibus, cum *Barbo* Auctorum idem eſt; *Cyrenſis*, huic ſimillimus magnitudine tripedali, figura, ſitu et numero partium externarum, nec non longitudine tractus inteſtinalis, qui corpore duplo et quod excurrit longior atque in vtroque ſpiraliter contortus ita in proportione ac colore partium externa-

ternarum differentia ſat euidens inter piſcem *Terekienſem* ſeu *Barbum* Auctorum, qui *Vſatſch Ruſſorum*, et *Cyrenſem*, qui *Capito* nobis et *Tſchanari Georgianis* audit. *Capito* nimirum differt a *Barbo*: capite longiore, latiore et minus depreſſo; roſtro obtuſiore; cirris longioribus; oculis maioribus; corpore aliquantum magis compreſſo; pinna dorſali a roſtro multo remotiori; tandem colore laterum infra lineam et pinnis inferioribus omnibus luteis; iterum vertebris tribus pluribus, ſcilicet 47. quarum in *Barbo* tantum 44. In poſterum, dum Auctorum obſeruationes atque icones cum noſtris conferre licebit, fuſius de his atque generatim de *Cyprinis* cirroſis, minus rite determinatis, quos omnes ſub diverſo coelo videre contigit, agere conſtituimus. Nunc nomina eorum ſpecifica condere ſufficiat et noua et reformata: ſit igitur.

BARBVS, *Cyprinus* cirris 4. radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato; colore laterum et pinnarum inferiorum albido; dorſo acuto.

CAPITO, *Cyprinus* cirris 4. radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato; colore laterum et pinnarum inferiorum luteo; dorſo acuto.

MVRSA, *Cyprinus* cirris 4. radio tertio pinnae dorſalis vtrinque poſtice ſerrato; colore laterum fuſco-luteſcente, pinnarum inferiorum fuſco-albido; dorſo plano.

CARPIO, *Cyprinus* cirris 3. radio tertio pinnae dorſalis atque analis vtrinque poſtice ſerrato.

CAPOE-

CAPOETA, *Cyprinus* cirris 2. radio tertio pinnae dorſalis poſtice vtrinque ſerrato; cauda bifurca.

GOBIO, *Cyprinus* cirris 2. radiis omnibus inermibus; cauda bifurca.

TINCA, *Cyprinus* cirris 2. radiis omnibus inermibus; cauda integra.

Coronidem imponamus diſſertationi explicatione *iconum* ad hiſtoriam *Cyprini Capoëtae* et *Murſae* pertinentium.

Tab. VIII. Fig. 1. *Cyprinus Capoëta* magnitudine naturali.

Fig. 2. Caput *Cyprini Capoëtae* antecedente aliquantum maioris, a parte inferiori, vt pateat roſtri et oris ſtructura, atque membranae branchioſtegae radiorum numerus ternus.

Tab. IX. Fig. 3. *Cyprinus Murſa* magnitudine naturali.

Fig. 4. Caput *Cyprinae Murſae* antecedente aliquantum maioris, a parte inferiori, vt pateat roſtri et oris ſtructura, nec non radiorum membranae branchioſtegae numerus ternus.

Fig. 5. Tractus inteſtinalis *Cyprinae Murſae*, a gula *a* ad anum *b* longitudine et flexuris naturalibus ex indiuiduo, cuius icon figura 3. eſt.

OBSER-

OBSERVATIONVM SPLANCHNOLOGICARVM, AD ACIPENSERIS RVSSICI ET HVSONIS ANATOMEN, SPECIATIM VERO AD IPSORVM AVDITVS ORGANVM, SPECTANTIVM, CONTINVATIO.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Quae multis abhinc annis circa dubium piſcium auditum in diuerſum traxit Phyſiologos ſententia, nunc curatiori partium, quae auditus organum in hoc animalium, ſpeciatim vero Acipenſeris genere, conſtituere viſae ſunt, inueſtigatione, earundemque intimiori inter ſe nexu, ita a me illuſtrata ac confirmata eſt, vt de vera eius natura et vſu nullum amplius iis затем ſupereſſe poſſe dubium, confidenter ſperem, qui inſequentes figuras, in quibus genuina ac completa huius organi conformatio expoſita eſt, ſtudioſe conſulere, earumque ſuccincta explicatione vti velint.

Tab. X.

Acipenſeris Ruſſici organum auditus, tam in nexu ſuo cum cranio, quam diſtincte expoſitum, magnitudine naturali. Fig. I-XI.

Fig. I.

Eam ſiſtit cranii cartilaginei partem, quae auditus organo ſiniſtri lateris ſedem praebet, et quidem ab interna facie.

Portio haec tota cartilaginea eſt, excepta lamina oſſea, ſtrati baſilaris oſſei parte, cui adnatum eſt firmiter cranium.

a. Corpus veſiculoſum.

b b. b. b. Membranae et fibrillae, illud ſuſtentantes, quibus pro neceſſitate vel tenditur, vel relaxatur organum.

c. Neruus auditorius anticus.

d. Neruus auditorius poſticus.

e et *f.* Canales duo ſemicirculares aperti, vt propagines membranaceae in conſpectum veniant *e.* anticus; *f.* poſticus. Amplior eſt longe horum canalium cauitas, quam mox dictarum propaginum craſſities, ita, vt hae laxae ac liberae penitus in iis haereant.

g g. g. Sectiones ſubſtantiae cranii cartilaginei perpendiculares.

h. Oſſis ſphenoidei ſeu baſilaris pars.

i. k. Nerui alii, huc non ſpectantes.

Fig. II.

Eadem portio ab exteriore facie. Canales tres ſemicirculares aperti, cum ſuis propaginibus. Tam canales ipſi, quam propagines ſemicirculares ad vtramque extremitatem ampliores, in medio autem anguſtiores ſunt.

c. An-

e. Anticus.
f. Poſticus.
g. Exterior ſ. lateralis.
h. Apophyſis ſtrati ſphenoidei oſſei.

Fig. III.

Corpus veſiculoſum eiusdem lateris, cum annexis ſibi propaginibus ſemicircularibus, neruis etc. ab interiore, cerebro obuerſa facie. Reſectae prius ſunt, antequam exemtum fuerit, nonnullae membranae ac fibrillae, quae illud camerae, auditus organa continentis, parietibus affigebant. Totum hoc veſiculoſum corpus vna cum ſuis propaginibus et ſacculo, ipſi annexis, liquore limpido ſuboleoſo tam extus circumfuſum, quam intus repletum eſſe ſolet.

a. Corpus veſiculoſum, crumenam referens, veſtibulo aliorum animalium analogum.
g. Propago ſemicircularis antica.
f. Propago ſemicircularis poſtica.
e. Propago ſemicircularis exterior ſ. lateralis.
c. Extremitas propaginis ſemicircularis anticae inferior, amplicata.
b. Extremitas propaginis ſemicircularis poſticae inferior, ampliata.
d. Extremitas propaginis ſemicircularis exterioris ſ. lateralis anterior, ampliata.
δ. Corpuſculum, veſiculam collapſam referens, eiusdem, cum *b. c. d.* nodoſis quaſi et ampliatis propaginum extremitatibus, formae ac ſubſtantiae.

m. Neruus auditorius anticus.

n. Neruus auditorius poſticus.

σ. Nerui auditorii poſtici ramus craſſior, in *δ.* excurrens.

ϱ. Eiusdem nerui ramus tenuior.

l. Membrana, a corpore veſiculoſo anteriora verſus expanſa.

i. Oſſiculum auditus maius, verſus marginem dentatocrenatum, per ſacculum, illud includentem, transparens.

Fig. IV.

Idem corpus veſiculoſum, cum annexis ſibi propaginibus ſemicircularibus, neruis etc. ab exteriore, cerebro auerſa facie.

a. Corpus veſiculoſum.

g. Propago ſemicircularis antica.

f. Propago ſemicircularis poſtica.

e. Propago ſemicircularis exterior ſ. lateralis.

c. Extremitas propaginis ſemicircularis anticae inferior, ampliata.

b. Extremitas propaginis ſemicircularis poſticae inferior, ampliata.

d. Extremitas propaginis ſemicircularis ſ. lateralis anterior, ampliata.

α. Canalis, vtrique propaginis, ſc. anticae et lateralis extremitati ampliatae communis.

δ. Corpuſculum, veſiculam collapſam referens, eiusdem, cum *b. c. d.* nodoſis quaſi et ampliatis

tis propaginum extremitatibus, formae ac ſubſtantiae.

m. Neruus auditorius anticus.

n. Neruus auditorius poſticus.

p. q. o. Nerui auditorii antici (*m.*) ramuli tres; quorum vnum *p.* propaginis ſemicircularis anticae, alterum vero *q.* ac tertium *o.* exterioris extremitas ampliata excipit.

r. Locus, ad quem nerui auditorii poſtici (*n.*) rami, craſſior ſc. (Fig. III. σ) et tenuior (ibid ϱ.) in vnum iterum coaleſcunt, rurſusque propaginis ſemicircularis poſticae ampliationem verſus, diuiduntur.

l. l. Membrana, a corpore veſiculoſo anteriora verſus expanſa.

i. Oſſiculum maius, transparens.

h. Lamina cartilaginea, oſſiculo maiori contigua, ſacculoque, illud includenti, inſita, a cranio reſciſſa.

Fig. V.

Organi auditus pars, cui latior iſta membrana (Fig. III et IV. *l. l.*), camerae parieti anteriori affixa, demta eſt, vt ea, quae ſub iſta latebant, conſpici poſſint.

a. b. c. Superſtites extremi membranae reſectae margines.

d. Corpuſculum aliud, veſiculae ſimile, extremitati propaginis anticae inferiori ampliatae contiguum.

e. Propago ſemicircularis antica.

f. Prominentia veſiculoſa alia, minor.

g. Neruus auditorius poſticus.

h. Fibrillae, nerui auditorii poſtici ſobolis, ſuper prominentiam veſiculoſam, minorem, reptatus ac inſertio. Fibrilla haec maceratione in quatuor minores ſe facile findit ſuperius.

Fig. VI.

Membrana (Fig. III et IV. *l. l. l.*) ſeparatim expoſita.

a. Faſcia tenax, albicans, tendinoſa forſan, ipſi membranae ſubſtantiae innata.

b. Faſciae extremitas inferior, acutior, omnique nexu ſoluta.

c. Foramen; an naturale aquaeductus oſtiolum; an ex incuria factum?

Fig. VII.

Sacculus oſſiculi maioris cum proxime annexis ſibi partibus, ab exteriore facie.

n. Neruus auditorius poſticus.

i. Sacculus cum ſuo oſſiculo maiore, cochleae forte vicem explens.

Not. Frigidis piſcibus vniuerſis nullam eſſe cochleam, omnes vno ore conſentiunt Anatomici, attamen ego in Clupea Harengo recenti, non ſalito, praeter ſacculum, oſſiculum, maius continentem, machinulam eiusmodi, eamque nitidiſſimam olim inueni, pone poſticum oculi ambitum ſub globuli oſſei albicantis forma prominentem, duobusque intus foraminibus, poſteriorem ipſius faciem verſus, peruiam, quorum vnum, exterius ſitu, in canalem ſemicircularem ducit, alterum, interius, autem corpori veſiculoſo obuerſum eſt.

f. Pro-

f. Prominentia veſiculoſa, minor (Fig. V. *f*.).

δ. Corpuſculum, veſiculam collapſam referens. (Fig. III et IV. δ. δ).

x. Molecula ex albido pallide flaueſcens, dura, transparens; an oſſiculi maioris apophyſis?

y. Reliquiae et veſtigia laminae cranii cartilagineae (Fig. IV. *b*) quae et ſimul locum in ſacculo indigitant, cui iſta adeo firmiter adhaeſit, vt non niſi forfice ſeparari inde potuerit.

ϱ. Ramus nerui auditorii poſtici tenuior (Fig. III. ϱ.) transparens.

σ. Eiusdem nerui ramus craſſior, transparens (Fig. III. σ.).

Fig. VIII.

A. Lamina cartilaginea (Fig. IV. *b*.) a cranio reſciſſa, facie, qua cranio erat adnata.

a. *b*. *c*. Subſtantia albicans, ligamento ſimilis, anulo quaſi oblongo, radiisque, inde emiſſis, diſtincta, qua mediante cranio firmiter adhaeſit lamina.

B. Eadem facie, ſacculo obuerſa.

d. *e*. *f*. *g*. Subſtantiae albicantis, ligamento ſimilis terminos denotant.

Fig. IX.

Extremitates ampliatae propaginum, ſemicircularis anticae et lateralis, adapertae. Vt interiora harum partium eo melius in conſpectum veniant, omnem antea earum cerebro obuerſum parietem reſecare ideo neceſſe erat, quia non minima, extremita-

mitatum praeſertim ampliatarum, elaſticitas, craſſaque et cartilaginea fere ipſarum ſubſtantia pleniorem earum explicationem alias nimium quantum impediuiſſet.

a. Neruus auditorius anticus.

b. Corpuſculum veſiculae ſimile (Fig. V. *d.*), extremitati propaginis anticae inferiori ampliatae contiguum.

c. Propaginis ſemicircularis anticae extremitas inferior (Fig. III et IV. *c c.*).

d. Propaginis ſemicircularis lateralis extremitas anterior (Fig. III et IV. *d. d.*).

e. e. e. Prominentiae tres, duriuſculae, conoideae, vel ob ſinum profundiorem, quo inferior et truncata ipſarum pars exſculpta quaſi eſt, infundibuliformes potius dicendae. Auerſam harum ſ. exteriorem faciem ramuli nerui auditorii antici tres ſubeunt, inque ſubſtantia earundem euaneſcere videntur. Quartam eiusmodi prominentiarum vid. Fig. X. *i.* An in his prominentiis potior ſedes ſenſus auditus ponenda? Certe coniecturae huic neruorum inſitio, elaſtica et cartilaginea fere extremitatum ſubſtantia, liquorisque inteſtini, quacunque vi ſuper eas hinc inde agitati, ineuitabilis ad eas adliſio maximopere fauent.

g. Ramulus primus ſ. maior, transparens.

f. Ramulus ſecundus, minor, transparens.

i. Ramulus tertius, minimus, transparens.

h. Plica valuuloſa, oblique transuerſim ducta.

Obſ. Quae in harum partium cauo inueni, non niſi ſabuli granula erant minutiſſima, nudo tamen oculo viſibilia, variae magnitudinis et viginti circiter numero; an oſſiculi minoris, ſitu corrupti, recrementa? Apparet etiam ex hac figura, quomodo neruus auditorius anticus, poſtquam hanc organi portionem ſubiit, ex interiore in exteriorem eius faciem ſtatim ſe ſubducat, cum e contrario poſticus in illa potiſſimum ſubſiſtat.

Fig. X.

Corpus veſiculoſum cum vtraque propaginum ſemicircularium extremitate (excepta lateralis poſteriore) adapertum, toto organi pariete, cerebro obverſo, ex eadem ratione, quam Fig. IX. attulimus, antea reſecto.

a. Corpus veſiculoſum.

b. Extremitas propaginis ſemicircularis anticae ſuperior.

c. Eiusdem inferior.

d. Extremitas propaginis ſemicircularis poſticae ſuperior.

e. Eiusdem inferior.

f. Extremitas propaginis ſemicircularis lateralis poſterior.

g. Eiusdem anterior.

h. Septum dimidiatum, craſſiuſculum, ad oram crenatum, corpori veſiculoſo tam ſuperius quam inferius et ad poſteriora vndique adnatum. In-

ter angulum huius ſepti inferiorem externumque organi parietem via anguſtior in extremitatem propaginis ſemicircularis lateralis poſteriorem patet.

i. Prominentia alia duriuſcula, cum duplici ſinu, quorum vnus canalem, alter corpus veſiculoſum reſpicit.

k. Oſtium extremitati propaginis anticae inferiori, lateralisque anteriori commune.

l. Neruuli rami tenuioris (Fig. III. *ϱ.*) ſoboles, prominentiam *i.* excurrentes.

m. Plica quaedam exſtans.

Reliqua eadem, quae in Fig. III. ſub lit. *m. n. δ. ϱ. σ.* Fig. IV. *i. δ.* Fig. V. *f. h.* et Fig. IX. lit. *o m n.* videre licet.

Obſ. Aperto corpore veſiculoſo, ſedimentum album, quaſi calcarium, pauca quidem in copia, in eo repertum eſt. Caeterum quoque conſtat ex hac figura, propagines tres ſemicirculares quinque orificiis, vti canales tres ſemicirculares in ipſo homine aliisque quadrupedibus, in corpus veſiculoſum, ceu veſtibulum ipſarum, hiare; primum ſc. propaginis poſticae ſuperius, ac anguſtius oſtium; ſecundum eiusdem inferius, amplum valde; tertium anticae ſuperius ac anguſtius; quartum lateralis poſterius, ſatis anguſtum, et quintum, extremitati propaginis anticae inferiori, lateralisque anteriori commune valdeque amplum.

Fig.

Fig. XI.

Sacculi oſſiculi maioris diſſecti facies interior.

a. Neruus auditorius poſticus.

b. Oſtium largum, e corporis veſiculoſi cauo in ſacculum ducens.

Not. Oſſicula auditus ipſa vide apud *Kleinium*, in Miſc. Piſc. I. Tab. II. f. 34. cui in piſce modo demortuo, vel certe recentiori integriora videre contigit.

Tab. XI.

Acipenſeris Huſonis, Ruſſis Beluga dicti, organum auditus, tam in nexu ſuo cum cranio, quam diſtincte expoſitum, magnitudine naturali. Fig. XII - XVII.

Fig. XII.

Cranii cartilaginei pars cum auditus organo ſiniſtri lateris, ab interna facie.

a. Corpus veſiculoſum.

b. b. b. b. b. Ligamenta varia tendinoſa, quorum ope cranii parietibus hinc inde alligatum ac ſuſtentatum eſt organum.

c. Neruus auditorius anticus.

d. Neruus auditorius poſticus: ab initio inter ſe coniuncti incedentes.

e. e. e. Sectiones ſubſtantiae cranii cartilaginei perpendiculares.

f. f. Strati ſphenoidei oſſei pars.

g. Neruus alius, huc non ſpectans.

h. Seta porcina aquaeductui, in cranii cauum patenti, immiſſa.

Fig. XIII.

Eiusdem lateris organum, velamentis ſuis denudatum.

a. Corpus veſiculoſum, crumenae ſimile.
b. b. Oſtia canalis ſemicircularis antici.
c. c. Oſtia canalis ſemicircularis poſtici.
d. Extremitas propaginis ſemicircularis anticae ſuperior.
e. Extremitas eiusdem propaginis inferior, ampliata.
f. Extremitas propaginis ſemicircularis poſticae ſuperior.
g. Extremitas eiusdem propaginis inferior, ampliata.
h. Sacculus oſſiculorum auditus, e corpore veſiculoſo, crumenae ſimili, ſuſpenſus.
i. Neruus auditorius anticus.
k. Neruus auditorius poſticus.
l. Neruus alius, huc non ſpectans.
m. Seta porcina per aquaeductus oſtiolum in ſacculi cauitatem demiſſa. Vſus huius aquaeductus procul dubio in eo conſiſtit, vt, nimia potiſſimum in organi preſſione vel membranarum, illud ſuſtentantium, tenſione, aquulae, qua omne ſcatet, effugium praebeat.

Fig. XIV.

Organum auditus integrum atque completum dextri lateris, ab interna facie.

a. Cor-

a. Corpus veſiculoſum, crumenae ſimile.
b. Propago ſemicircularis antica.
c. Propago ſemicircularis poſtica.
d. Propago ſemicircularis exterior ſ. lateralis.
b. Vtriusque propaginis, ſc. anticae ac lateralis extremitatum inferiorum confluxio in communem ac fere cylindricum canalem.
e. Sacculus oſſiculorum auditus.
f. Neruus auditorius anticus, auerſam extremitatum propag. ſemicirc. anticae et lateralis ampliatarum faciem quaerens.
g. Neruus auditorius poſticus, in neruulorum faſciculum, ſacculo, oſſicula continenti, inſitorum, maxima ex parte anterius deſinens, alio autem ramo longius protracto in auerſam propaginis ſemicircularis poſticae ampliatae faciem excurrens.

Fig. XV.

Idem organum adapertum, ſacculo integro relicto.

a. Septum dimidiatum, craſſiuſculum.
b. b. b. b. Prominentiae duriuſculae ac ſinuoſae, neruorum ramulos excipientes.
c. d. e. f. Ramuli vtriusque nerui auditorii, per ſubdiaphanam propaginum ſubſtantiam transparentes.
g. Oſtium extremitati propaginis anticae inferiori, lateralisque anteriori commune.

Fig. XVI.

Corpus veſiculoſum, ſiniſtri lateris, horizontaliter diſſectum, cum annexo ſacculo.

a. Oſtium largum, per quod e corpore veſiculoſo in ſacculum aditus patet.

b. Seta porcina per aquaeductus oſtiolum in ſacculi cauum demiſſa.

c. Septi dimidiati pars.

Fig. XVII.

Sacculus ſecundum ſuae baſis longitudinem diſſectus.

a. Oſſiculum auditus maius, incudem, capitello conuexo inſtructam, referens.

b. Oſſiculum aliud minus, in eiusdem ſacculi cavo et haud procul ab iſto repertum. Tertium, ſi modo adfuerit, fruſtra quaeſiui, in piſce, per Wolgae fluuium longo itinere Petropolin congelato aduecto viciſſimque regelato corruptioni forte obnoxium. Ob eandem quoque rationem de nexu horum oſſiculorum cum ſacculis, in quibus ſunt incluſa, nihil certi mihi conſtat. Nullibi annexa ea eſſe, cum recentiorum nonnullis vix crediderim; certe enim in Muſtela vulgari Cyprinisque variis planam oſſiculi maioris faciem, mediantibus tribus circiter fibrillis tenuiſſimis, ac facillime rumpendis, interiori ſacculi vel veſiculae ſuperficiei adhaerere vidi.

Tab. XII.

Meatus, falſo ſic dictus auditorius externus, ex Acipenſere Huſone Fig. XVIII-XXI.

Canalem iſtum, quem Cel. *Kleinius* in Miſſ. Piſc. I. p. 19. Tab. II. fig. A. *b.* pro meatu auditorio Sturionis externo olim habuit, longe alium eſſe, ex ſequentibus ſatis ſuperque conſtabit.

Decurrit ſc. iſte inter ſupremam ac poſticam muſculi omnium maximi, primi operculi branchiarum oſſis eleuatoris portionem (cuius carne totus, et quidem ſtatim ab exteriore ipſius oſtio, obtegitur), et modo memorati oſſis extremitatem ſuperiorem. Fig. XVIII et XIX. *a.* Muſculus vero ille inter oculum et anticum ſ. primum operculi branchiarum os ſatis craſſum leuiterque arcuatum ſitus eſt. Principium eius oculi regio ſupraorbitalis, tota cranii cartilaginei cauitas, velum palatinum omniſque anterior primi operculi branchiarum oſſis margo excipiunt, tendo autem extremitati eiusdem oſſis inferiori inſeritur. In vnius pollicis diſtantia ab oſtio ſuo (Fig. XVIII, XIX et XX. *b.*) canalis alium recipit canaliculum, longe minorem (ibid. *c.*), qui tenuem inter oſſeam lamellam, ipſamque cranii cartilagineam ſubſtantiam (Fig. XVIII et XIX. *d.*) delitescit, vltra tertiam ſuae longitudinis partem, eamque inferiorem, in canalis maioris cauitatem demiſſus, eiusdemque ſuperficiei internae poſtica ſua facie adnatus. Num canaliculi huius extremitas ſuperior (Fig. XIX. *e.*) in ſinum, ſubſtantia, cerebro

non

non abſimili, repletum (ibid. *f.*) hiet, vel ex ea ipſa oriatur, id quod veroſimilius mihi videtur, iam e memoria exceſſit. Alterum vero eius orificium (ibid. *g.*) in canalis maioris cauum patuiſſe, certo mihi conſtat; circa quod valuularum ſpuriarum, ſurſum ſpectantium rudimenta, quibus munitum eſt, forſan miraberis ideo, quod ad liquorem potius effundendum, quam recipiendum compoſitus eſſe videatur canaliculus. Canalis maior, dum ſitum retinet naturalem, incuruatus eſt, ſima facie poſteriora, conuexa anteriora capitis reſpiciens, ſuperiusque paullo amplior, quam inferiora verſus, ac hiatu largo in imas fauces patens. Velum autem palatinum, quod canalem excipit, ſaccum quaſi ibidem efformat, branchias veras verſus patentem, fundoque ſuo contractiore anteriora reſpicientem. Exteriori huius ſacci parieti interius branchiarum, vt ita dicam, ſuccenturiatarum ſeu ſpuriarum vna adnata eſt, cuius lamellae radiatae ac in ſumma tantum ipſarum parte liberae ſunt, ab anterioribus poſteriora verſus magnitudine ſenſim decreſcentes. Canalis hic deſcripti vſus absque dubio in eo conſiſtit, vt iſta branchiarum ſuccenturiatarum ſpecies partesque adiacentes, ope aquae, per interualla eas transfluentis, muco aliisque ſordibus, continuo inde excretis, mediante hoc aquaeductu, liberentur. An ſtructura haec Acipenſerum illaque Balaenarum fiſtulae, veram quandam inter ſe habeant ſimilitudinem, eidemque forte vſui inſeruiant, merito quaeritur? Quid igitur de meatu auditorio externo, quo invento

vento

vento gloriantur nonnulli, ſentiendum ſit, cuius facile intellectu eſt. Nullum omnino omni piſcium genti, cetis forte ſolis exceptis, a natura datum eſſe, curatior nantium perplurium inueſtigatio dudum me docuit, licet de auditu eorum nullus vnquam, inprimis autem poſt integri huius organi in chondropterygiis inuentum, iam ante hos tredecim annos a me abſolutum, ne tantulum quidem dubitauerim. Quis enim hunc ſenſum in tanta huic organo cum aliorum animantium auditus organo communi ſimilitudine, aliarumque circumſtantiarum conuenientia piſcibus impoſterum deneget, niſi praeiudiciis miſere occaecatur, omnique ingenii acumine plane carens? Gaudent itaque, mea quidem ſententia, auditu piſces, ſonique tremores per aquam, ad radios ſonoros excipiendos aptiſſimam, corporis veſiculoſi, propaginum ſemicircularium, oſſiculorumque propriis ſacculis incluſorum ope, ipſis communicatos, aſt materia ſuboleoſa, auditus organo omni extus vndique circumfuſa, forte aliquantum temperatos, percipiunt.

Fig. XVIII.

Canalis maior, ad fauces ducens, ſiniſtri lateris, cum accedente canaliculo minore, in ſitu ſuo naturali.

a. Canalis maior.

b. Oſtium canalis ſuperius ſ. externum, pro meatu auditorio falſo habitum.

c. Canaliculi cum canale coniunctio.

d. d. Cranii cartilaginei pars.

α. Branchiarum ſuccenturiatarum vna, extra reliquarum ordinem, veli palatini ſacco interius adnata, ac transparens.

Fig. XIX.

Idem dextri lateris, inque ſitu pariter naturali.

a. Canalis maior.

b. Oſtium eiusdem externum.

c. Canaliculus.

d. d. Cranii cartilaginei pars.

e. Canaliculi extremitas ſuperior.

f. Subſtantia, cerebro non abſimilis, qua ſinus quidam cranii cartilaginei refertus eſt. An glandulae conglomeratae ſpecies?

g. Locus, ad quem orificium canaliculi inferius in canalis maioris cauum patet.

Fig. XX.

Canalis maior, ſiniſtri lateris, cum velo palatino, ſeparatim expoſitus.

a. Canalis ipſe.

b. Oſtium eius externum.

c. Canaliculi portio.

α. Branchiarum ſuccenturiatarum vna, transparens.

β. β Velum palatinum.

γ. Veli palatini ſaccus.

δ. Apertura veli palatini, branchias veras verſus.

Fig.

Fig. XXI.

Canalis maioris ſiniſtri lateris, velique palatini, diſſectorum facies interior.

a. Canalis.

b. Canaliculus.

c. Branchiarum ſuccenturiatarum vna, exteriori ſacci palatini parieti interius adnata.

DESCRIPTIO VITVLI BICIPITIS CVI ACCEDIT COMMENTATIO DE ORTV MONSTRORVM.

Auctore

C. F. WOLFF.

Vitulus hic, qui in ipſo partu periit, duplici, eoque ſeparato, capite, collo duplici, ſed ad baſin capitis vsque concreto, communibusque integumentis inuoluto, thorace autem, abdomine, pedibus anterioribus et poſterioribus ſimplicibus inſtructus fuit. In columna vertebrali circa ſecundam et tertiam vertebram dorſi duplex eſſe incipiebat. Inde ſurſum duplex, deorſum ſimplex columna vertebrarum continuabatur. Caeterum vitulus nonnihil deformis, pectore et dorſo gibboſus, pedibusque poſterioribus diſtortis erat. Quae igitur proprie monſtroſa fuerint in hoc animali ea nonniſi in parte thoracis ſuperiore et in collo duplici concreto quaerenda fuiſſe, facile praeuidetur.

Tab. XIII. Fig. 1. Aperto thorace cor vnicum et ſimplex in omnibus ſuis partibus inueni, (fig. 1 et 2.) quod tamen ſolito maius et ventriculis maioribus inſtructum erat. Ex ventriculo ſiniſtro aorta nata, poſtquam duas coronarias arterias ſolito loco edidit, et retro

retro arteriam pulmonalem in eius latere dextro prodiit (fig. 1. *g.*) ilico in duos ramos, craſſitiei fere aequalis, poſteriorem (*h.*) et anteriorem (*i.*) diuiditur. Poſterior breuis eſt et conſtituit, quamuis anteriori vix craſſior, truncum aortae continuatum, qui ex latere ſuo ſiniſtro arteriam ſubclauiam ſiniſtram (*x.*) edit et eo ipſo quoque loco cum ductu arterioſo Botalli, itidem ſibi fere aequali, coit in aortam dorſalem, duplo praecedente trunco aortae maiorem. Anterior breuiſſimus, et vix vllus, truncus communis duarum arteriarum innominatarum eſt, in quas ille actutum ſe diuidit. Aorta igitur in duas partes aequales diuiditur, quarum altera capitibus et pedi anteriori dextro proſpicit, altera cum aequali ſibi ductu arterioſo coniuncta, quo integra quaſi aorta reſtituitur, reliquo corpori inferiori pedique anteriori ſiniſtro ramos largitur. Truncus arteriarum innominatarum ilico, vti dictum, in has innominatas, ſibi aequales diuiditur, adeo vt vix truncus diſtinctus conſeri poſſit. Innominata dextra (*k.*) poſt breue ſpatium arteriam vertebralem dextram (*l.*) et ſubclauiam dextram (*m.*) ſeparatim edit; deinde in duas carotides (*n. o.*) pro capite dextro diuiditur, quae porro ſolito modo progrediuntur. Arteria innominata ſiniſtra (*p.*) paulo longior adſcendit; tum primo e latere ſuo ſiniſtro arteriam edit inſignem (*q.*) alteri carotidi circiter aequalem. Ea arcuatim deorſum regreditur et in duos ramos diuiditur (*r. s.*), qui ſinguli, a ſanguine forte extenſi, ſuo trunco maiores ſunt, et quorum alter

inferior maiorque (*s.*) in pulmonem ſiniſtrum ſolus, alter ſuperior et minor (*r.*) in pulmonem, qui inter dextrum et ſiniſtrum pulmonem medius exiſtit, et duobus quaſi vitulis communis eſt, inſeritur. Adeoque haec arteria integram pulmonalem vituli cuiusdam ſiniſtri refert. Eius ramus inferior loco ſiniſtri, et ſuperior loco dextri rami eſt. Poſthaec arteria innominata ſiniſtra ramum ſecundum reddit (fig. 1. *t. t.* et fig. 2. P. P.) paulo minorem priore, nec tamen minus notabilem. Hic recta contra truncum, et angulo cum eo intercepto acuto regreditur verſus baſin cordis, inſinuatque ſe inter auriculam ſiniſtram (W.) et magnam molem adipis conglobatae (V.) quae huic auriculae et baſi cordis adhaeret. Huic adipi inſignem ramum largitur. (fig. 2. Q.) ipſa reliqua arteria per totam poſteriorem ſuperficiem cordis ad apicem vsque decurrit, (fig. 2. R.) ramos lateraliter diſtribuit et in carne cordis conſumitur. Haec itaque arteria coronaria cordis et in ſpecie quidem ſiniſtra eſt. Dixi duas coronarias ſolito loco ex aorta natas eſſe. Earum dextra per mediam ſuperficiem anteriorem cordis decurrit (fig. 1. Q.), refertque igitur eam, quae vulgo dextra vocatur; ſiniſtra autem non in ſuperficiem poſteriorem, ſed in marginem ſiniſtrum obtuſum cordis deſcendit (R.). Haec igitur potius, quam illa, quae ex innominata oritur, tanquam ſupernumeraria cenſeri debet. Denotantque hae tres inſignes arteriae coronariae aliquam iam ſuperfluitatem in ipſo corde, quod nullam licet partem duplicem habeat, ob magnitu-

gnitudinem tamen ſesquialteri vitulo proſpiciendo ſufficere videtur. Denique arteria innominata poſt coronariam datam ilico in duas carotides (*v. w*) capitis ſiniſtri diuiditur, ſolito modo ad latera aſperae arteriae ſiniſtrae verſus hoc caput adſcendentes.

Patet igitur primum, imo et vnicum manifeſtum duplicitatis, ſeu monſtroſitatis principium in duabus arteriis innominatis vel, quod idem eſt, in earum duabus efficiendis pari trunco haerere. Nam ad hunc truncum vsque aorta et ſimplex eſt et nihil, quod praeter naturam eſſet, in ſe habet; poſt illum truncum eadem porro plane naturalis eſſe pergit. Si alteram harum innominatarum, ſiniſtram nempe, auferas, omnia reliqua in ſtatu naturali ſunt. Dextra enim innominata primo, vt fieri debet ſubclauiam et vertebralem dextram edit, deinde in duas pro vno capite carotides diuiditur. Truncus aortae continuatus poſt innominatam emiſſam ſubclauiam ſiniſtram prorſus vt fieri ſolet, cum vertebrali ſiniſtra edit, et cum ductu Botalli ſolito modo in aortam dorſalem confluit. Schol.

Haec tanti ſuperflui ſanguinis cauſa, arteriam innominatam ſiniſtram puta, quantus ſufficit ad alterum caput et collum nutriendum, facile ideam ſuppeditabit quam pridem pro ortu monſtrorum propoſui; vegetationis alicuius luxuriantis, ſeu copioſioris ſecretionis ſucci, in ſolida organica abeuntis, qua ſub primis formationis initiis in hoc loco, vbi nunc truncus duarum innominatarum exiſtit, praeter Schol.

ter ſolitum, tantum quoque ſucci, nouis quaſi viribus intrinſecis ſubortis, excretum fuit, quantum ad alterum caput producendum requirebatur, quemadmodum nunc, vaſis formatis, praeter ſolitum, tantum quoque ſanguinis adhucdum transfertur, quantum ad alterum caput nutriendum opus eſt.

Tab XIII. Fig. 1. Exiſtunt venae cauae ſuperiores duae, (1. 11.) duabus innominatis arteriis reſpondentes; vna tantum inferior (fig. 2. X.) ad aortam vnicam reſpiciens. Illarum altera dextra (fig. 1. 1.) primaria et naturalis eſt, quemadmodum innominatam huius lateris vidimus eſſe. Altera autem, quae ſiniſtra eſt (fig. 1. 11.) ſupernumeraria pro capite ſiniſtro acceſſit, tanquam effectus luxuriantis vegetationis. Dextra ſolito ſuo loco, ex ſinu venarum cauarum et auricula dextra (X.) oritur et recta adſcendit. Deinde plane vt fieri debet, vertebralem dextram (3.) reddit et porro ſubclauiam dextram (4. 5) ex qua iugularis dextra (6.) oritur. Denique in venam ſubclauiam ſiniſtram, quae venam iugularem ſiniſtram ederet, abire deberet. Sed hic praeter ſolitum truncus reliquus in latere ſiniſtro capitis ſui dextri adſcendit (7.); deinde loco ſubclauiae ſiniſtrae duos ramos emittit, (8. 9.) qui ad alterum vicinum collum ſiniſtrum tranſeunt, ibique munere iugularis dextrae funguntur, et reliqua vena (10.) iugularis ſiniſtra capitis dextri manet.

Schol. Aliquid cauſae huius erroris naturae facile intelligimus. Sanguis brachii ſiniſtri, qui hoc loco in cauam

cauam ſuperiorem ingredi, viamque adeo ſibi ſubclauiam ſiniſtram producere debuiſſet, locum ſimilem viciniorem, multoque oportuniorem, venam cauam nempe ſuperiorem nouam ſiniſtram (11. 14.) inuenit, in eamque deductus eſt (13.). Idem ergo brachialis ſanguis, cum deficeret in hoc loco, vbi requiritur pro vena caua dextra; et nouus inſolitus ſanguis ex nouo capite rediens eius loco ſe offerret; quid mirum, ſi hic receptus, loco ſubclauiae ſiniſtrae, inſolitam nouam iugularem produxit?

Vena caua ſuperior ſiniſtra, quam praeter naturam pro capite ſiniſtro acceſſiſſe dixi, miro ortu gaudet, mirasque per ambages redux a capite errat, donec idoneum inſertionis locum inueniat, quaſi naturam dubiam fuiſſe dicas, quorſum hunc nouum ſanguinem capitis ſiniſtri *poſt fundamenta cordis ſimplicis iam formata* reduceret. Collectis enim vena iugulari ſiniſtra (fig. 1. 14.) ſubclauia ſiniſtra (fig. 1. 13.) et vertebrali ſiniſtra (12.) truncus nunc vena caua ſuperior (11.) primum recta deſcendit, vt ſolet vena caua ſuperior, inſinuatque ſe (fig. 2. *o.*) inter auriculam ſiniſtram (fig. 2. T.) et ſinum venarum pulmonalium (fig. 2. *i.*) tanquam ſi dextrum ſinum et ventriculum dextrum in hoc loco quaereret, et applicat ſe ſuperficiem poſteriorem huius ſinus ſiniſtri in latere eius ſiniſtro (fig. 2. *k. k.*) vt videretur eidem in hoc loco inſerta eſſe. Sed continuat reuera inter membranas ſinus pulmonalis ad eius baſin vsque et ad baſin cordis (fig. 2. *p.*). Ibi quaſi cognito errore a tramite hactenus obſeruato Tab. XIII. et XIV. Fig. 1 et 2.

deflectitur dextrorſum (fig. 2. *p. q.*). Tendit recta verſus ſinum venarum cauarum. Eique inſeritur in eo loco, eodemque oſtio, quo vena coronaria magna in hoc ſinu aperitur, adeo, vt vena coronaria, cuius proprium orificium ſimul intra oſtium venae cauae ſiniſtrae apparet, nonniſi ramus ſit huius venae cauae, prope eius oſtium ei inſertus.

Schol. Certum autem eſt, primo tempore venam coronariam truncum, cauam ſiniſtram eius ramum fuiſſe. Nam commune illud oſtium, quod immediate in ſinum dextrum hiat, indubitate ad venam coronariam pertinet, omnibus notis pro eodem oſtio cognoſcendum. Poſtquam autem vena caua et pars venae coronariae, quae inter coniunctionem ambarum venarum et ſinum dextrum breuiſſima eſt, ſanguine copioſiori ad modum dilatata fuit, et reliqua vena coronaria ad coniunctionem vsque, anguſtior contra permanſit, vena caua cum parte venae coronariae, in ſinum hiante, in truncum, reliqua coronaria ad coniunctionem vsque in ramum illius permutata fuit. Sic tandem et viribus naturae media inueniri poſſe, quibus errores commiſſi corrigantur, SVPREMVM NVMEN voluit.

Tab. XIII. Fig. 1. Pulmones tres exiſtunt, primus, dexter, (F. G. H. I.) et ſecundus, ſiniſter, (K. L.) locis conſuetis poſiti, tertius medius (M. N. O.) loco paulo ſuperiore pone arterias innominatas collocatus eſt. Hi membranis quidem, a pleura deductis, minime autem ſubſtantia pulmonari inter ſe coniunguntur.

Dex-

Dexter quatuor lobos habet, quorum infimus (F.) maximus, duo ſuperiores (H et I.), quaſi appendices, minimi ſunt. Pulmo medius, vel ſuperior, minor et trilobus eſt (M. N. O.). Siniſter dextro fere aequalis ex lobis duobus tantummodo conſtat, ſuperiore maiore (K.) inferiore minore (L.). His pulmonibus duae aſperae arteriae reſpondent ex duobus collis deriuatae. Earum dextra (D.) vbi in thoracem venit, in duos ramos finditur, in dextrum maiorem, qui pulmonem dextrum adit, et ſiniſtrum longe minorem, qui in medium pulmonem diſtribuitur. Idem dicendum eſt de aſpera arteria ſiniſtra (E.). Diuiſa enim in duos ramos ſimiles, dextrum paruum pulmoni eidem medio, ſiniſtrum maiorem ſiniſtro pulmoni tradit. Aere per aſperam arteriam dextram impulſo, is permeat inflatque pulmonem dextrum et medium, ſiniſtro intacto relicto. Miſſo aere per aſperam arteriam ſiniſtram, idem ſiniſtrum pulmonem extendit et medium eundem, intacto pulmone dextro. Ex his apparet, pulmonem dextrum et dimidium medium ad foetum dextrum pertinere. Illum eiusdem dextrum, hunc ſiniſtrum pulmonem referre. Pulmonem ſiniſtrum cum dimidio medii foetui ſiniſtro proprium, illum quidem ſiniſtrum, hoc dextrum eiusdem eſſe.

Arteria pulmonalis truncus, ſolito modo ex ventriculo dextro ortus, (*a.*) retro aortam ſe immergit, ibique in duos ramos fere aequales breuiſſimos diuiditur, quorum anterior ductus arterioſus. Tab. XIII. Fig. 1.

 Botal-

Botalli in occurrentem ſibi aortam continuatam (*b.*) inſeritur, ex cuius ipſo inſertionis angulo in ſuperficie anteriore, latereque ſiniſtro ſubclauia ſiniſtra (*x.*) oritur. Ramus poſterior ſeu profundior ilico in duos ramos finditur, dextrum et ſuperiorem. Ille retro aortam continuatam dextrorſum petit, editisque duobus ſurculis (*d. e.*) in lobulos pulmonis dextri ſuperiores (H. I.), ipſe (*b. c.*) in duos maiores inferiores lobos (G. F.) huius pulmonis diſtribuitur. Superior recta adſcendit (*f.*) et in pulmonem medium in eius lobos dexteriores (N. M.) inſeritur.

Schol. Hinc patet, totam hanc arteriam pulmonalem, ex dextro ventriculo ortam, quae caeterum parum praeter naturam in ſe habet, ad ſolum vitulum dextrum pertinere, adeo vt ramus eius dexter (*b.*) dextrum, ſuperior (*f.*) ſiniſtrum ramum referat. Nam diſtributio arteriarum aſperarum docuit, pulmonem dextrum cum dimidio ſuperioris, quibus ſolis arteria pulmonalis proſpicit, nonniſi dextri vituli pulmones eſſe. Eoque ipſo, eodemque argumento cum conſtiterit, pulmonem ſiniſtrum cum altera parte ſuperioris, ſeu medii pulmonis, quibus arteria (*q. q. r. s.*) ex innominata ſiniſtra orta, proſpicit, ad vitulum ſiniſtrum pertinere, patet ſimul arteriam hanc (*q. q.*) vt ſupra iam monui, integram arteriam pulmonalem vituli ſiniſtri eſſe. Oportet autem haec obſeruare, vt conditio totius monſtri inde, vt, dextrum vitulum in formatione primarium, ſiniſtrum nonniſi acceſſorium ob vegetationem

tionem luxuriantem fuiſſe, vt denique dextrum prorſus naturalem, nec niſi ſiniſtrum praeter naturam productum eſſe, inde pateat.

Sinus pulmonalis (fig. 2. *i.*) truncos venoſos tres emittit, qui breues et indiuiſi in tres pulmones vicinos tranſeunt. Qui in pulmonem ſuperiorem, ambobus vitulis communem, abit (*m.*), maior eſt et ex angulo ſinus ſuperiore dextro oritur. Ille, qui in ſiniſtrum pulmonem tranſit, (*l.*) minor, ex angulo eiusdem ſiniſtro, et qui in dextrum pulmonem inſeritur (*n.*) ſiniſtro fere aequalis, ex dextro latere ſinus ſuam originem ducit.

Denique oeſophagi, qui ex collis duo in thoracem deſcendunt, proxime ſuper diaphragma in vnum confluunt, qui porro ſolito modo illud perforat et in ventriculum inſeritur. Tab. XIV. Fig. 2.

DE ORTV MONSTRORVM.

Contra ortum monſtrorum ex colliſione et concretione duorum embryonum, qui antea ſeparati fuerint, vel etiam ex deſtructione vel transmutatione partium foetus ſimplicis, quae antea integrae et naturales fuiſſent per cauſas accidentales, ad generationem non pertinentes, primus, quantum ſcio, DVVERNEVS ſcripſit in actis Pariſinis anno 1706. Deinde LEMERIVS, argumentis quamuis ingenioſiſſimis, tamen infeliciter illum ortum defendit, ibidem anno 1724. Denique *Perill.* L. B. de HALLER

 et

et WINSLOWVS, magni aeque Viri, ille in opuſculis anatomicis, hic in actis laudatis anno 1733 et 1734 tanta contra hanc hypotheſin argumenta produxerunt, vt pluribus aliis vix opus ſit, certe, vt validiora dici non poſſint. Imprimis regularitatem, oppoſuerunt, et ordinem in monſtris obſeruari non minorem, quam in corporibus naturalibus ipſis qui cum fortuita colliſione et concretione, vel cum accidentali transmutatione nullo modo conciliari poſſit. Hic ordo in noſtro vt in omnibus reliquis monſtris apparet. Cur oeſophagus vnius vituli modo cum oeſophago alterius, nec quacunque cum alia parte, cur ambo in eodem loco ſecum inuicem collidunt et concreſcunt, adeo vt vtrique, quousque ſeparati ſunt, eadem longitudo maneat? Cur pulmo vnius modo cum pulmone alterius, cur arteria innominata tantummodo cum arteria innominata vel cum aorta concurrit, comprimitur et concreſcit? Cur non aliquando in aliquo monſtro oeſophagus cum vena iugulari, vel pulmo cum hepate vel carotis cum vena caua concreuit? Non poſſunt enim partes alterius foetus partes ſui ſimiles et conuenientes locaque earum loca ſimilia et conuenientia in altero foetu inſtinctu quaſi quaerere, repulſis remotisque vel deſtructis reliquis partibus omnibus, quae ſibi neceſſario occurrere debent, priusquam ad illa perueniunt.

Praeterea in omnibus fere monſtris ſingulares difficultates occurrunt ſecundum hanc hypotheſin inexplicabiles, cuiusmodi plurimas WINSLOWVS ex variis monſtrorum deſcriptionibus et *Perill.* HALLERVS

RVS ex propriis ſuis obſeruationibus collegit, et quae non minus in noſtro quoque exemplo abundant. In eo cor ſimplex eſt, nec quidquam compoſiti vel praeter naturam habet; adeoque ex ſententia *Cel.* LEMERII cor alterum, ſiniſtri nempe vituli, plane deſtructum eſt. Quum etiam aorta, ex hoc corde vnico nata, ſimplex ſit, aorta quoque vituli ſiniſtri tota perdita erit, exceptis eius ramis maioribus, arteria innominata et ſubclauia ſiniſtra, quae ſolae de ſyſtemate arterioſo vituli ſiniſtri reſtiterunt. Has igitur arterias ſuperſtites in hac hypotheſi ſupponere oportebit orificiis apertis, nec ſanguine effluente, translatas eſſe ad aortam vituli dextri, in eamque, nouis ibi foraminibus ſubortis, quaſi trans plantatas. Quis talia autem concipere, aut quis ferre poteſt? Vena caua ſuperior vituli ſiniſtri, quae, quamuis in dextro huius vituli latere naturaliter ſita, adeoque colliſioni cum vitulo dextro et deſtructioni primum expoſita, tamen ſola ex ſyſtemate venoſo vituli ſiniſtri ſupereſt, non deſtructa, ſed ex latere dextro trans arteriam innominatam in latus ſiniſtrum promota fuit. Deinde eius orificio abrupto, et mobili hactenus, noua pars acceſſit, quae naturaliter non exiſtit, qua nempe haec vena ex latere ſiniſtro inter baſin cordis et ſinum pulmonalem in latus dextrum tranſit (fig. 2. *p. q.*). Hac mediante venam coronariam magnam vituli dextri perforauit eique accreuit. Arteriam pulmonalem vituli ſiniſtri, quam oriri vidimus ex arteria innominata eiusdem vituli, deſtructo corde ſiniſtro inverſam

verſam eſſe ſupponere oportet, adeo vt truncus, cordi ereptus, ſurſum, rami vero deorſum ſpectent, tum adglutinatam propriae ſui vituli arteriae innominatae. Denique quid iudicandum de noua tertia arteria coronaria cordis, quae ex innominata ſiniſtra oritur. Haec ſane nullo modo, etiamſi quaelibet fingere licuerit, ex hypotheſi colliſionis explicari poteſt. Ad vitulum dextrum ea pertinet, ſiquidem in eius corde diſtribuitur. Neque tamen naturalis eſt, vt ante colliſionem duorum embryonum in hoc corde, in quo nihil mutatum eſt, iam exſtitiſſe dici poſſit. Nam duae aliae coronariae, ex aorta vt ſolent natae, iam adſunt. Reſponderi ergo poſſet, quamuis praeternaturalis ſit; tamen caſu id contigiſſe vt in dextro horum embryonum, antequam colliſiſſent, eiusmodi praeter naturam producta arteria iam exſtiterit, quae poſtea per contingentem colliſionem produci non potuit. Sed tum porro qui fieri potuit, vt haec arteria oriatur ex innominata vituli ſiniſtri, qui eo tempore a dextro adhucdum ſeparatus fuit? Ad hanc quaeſtionem plane nihil, ne ineptum quidem quod ſit, reſponderi poſſe, exiſtimo.

Patet igitur, monſtra compoſita non ſic oriri, vt aliquando duo ſeparati integri embryones fuerint, qui deinde contingentes et compreſſi, partibus eorum nonnullis deſtructis, aliis coalitis et commixtis, concreſcerent in vnum nouum compoſitum corpus; ea vero, quae vel defectu partium vel inſolita ſtructura monſtra ſunt, non ita fieri, vt prius integri et natu-

naturales embryones fuerint, qui deinde per cauſas accidentales ad generationem non pertinentes, mutilati vel transmutati fuerint; ſed neceſſe eſſe, vt vtraque monſtrorum genera a primis ſuis initiis iam eiusmodi monſtra fuerint.

Verum nunc alia quaeſtio oritur. Fieri poteſt, (ſiquidem nempe cum reliquis animalibus ſolitae ſtructurae ita comparatum eſt,) vt et monſtra ex germinibus oriantur, monſtroſe creatis, et poteſt quoque fieri, (quandoquidem caetera animalia viribus naturae in generatione producuntur,) vt et monſtra iisdem viribus generatricibus, ſed modificatis, tanquam monſtra producantur. Non modo nemo laudatorum Auctorum, qui de monſtris ſcripſerunt, hanc quaeſtionem tetigit, ſed fere plerique etiam, ſi pauca Merii verba excipias, refutata hypotheſi *colliſionis* et *transmutationis accidentalis*, ilico de germinibus loquuntur, monſtroſe creatis, tanquam ſi, dummodo per transmutationem monſtra non oriuntur, neceſſe ſit, vt ex germinibus originem ducant praedelineatis. Quamobrem vt hanc de monſtris cognitionem perficiam, ſecutus magni Winslowii methodum, in iisdem monſtris, quorum deſcriptiones in actis Pariſinis habemus, quibusque et Dvverney et Winslow vſi ſunt, talia nunc indicia quaeram, quae nos imprimis doceant, vtrum viribus naturae generatricibus ſolitis, ſed modificatis, monſtra producta, an vero germina eorum a DEO immediate creata, et naturae ope tan-

tantummodo euoluta fuerint. Praemonere autem oportet, longe admodum difficilius eſſe omnino, hoc poſterius quam prius in ſtructuris monſtrorum detegere. Nihil enim facilius eſt, quam in operibus naturae talia documenta inuenire, quae euincant, ea non ſimplici fortuito caſui deberi. Quicquid in monſtroſa compoſitione pulchrum occurrit, quicquid regulare et ſecundum ordinem eſt, quicquid certum finem declarat, id contra caſum loquitur, contraque fortuitam concreſcentiam et transmutationem accidentalem. Sed quid vis vt inueniamus in monſtris, quod viribus quidem naturae (a DEO in hunc finem ſtabilitis) haud aeque vero diuina potentia immediate in germinibus illorum, effici potuiſſet? Vel contra quod immediate quidem DEVS creare, non autem mediantibus viribus naturae producere potuerit, et vnde igitur, vtrum producta naturae an DEI opera immediata monſtra ſint, conſtaret? Hoc ſolum nobis reſtabit, vt videamus, quemadmodum in ſuperioribus obſeruauimus, monſtroſam compoſitionem ſaepe nimis pulchram, nimisque regularem et nimis prudentem eſſe, quam vt ſimplici accidenti cauſae deberi poſſit, numne contra eandem nimis quoque vitioſam ſaepe nimisque imperfectam inueniamus, quam vt Diuino conſilio immediate ſic in germinibus praeſtabilita eſſe poſſit.

Eiusmodi vitia naturae vbique abundant, et primum occurrunt in eodem exemplo, in quo celeberrimus Duverney prima argumenta contra concurſum

curſum duorum embryonum detexit, (Mem. de l'Acc. 1706.) et quibus ipſis deinde WINSLOWVS quoque vſus eſt. Monſtrum hoc compoſitum erat ex duobus pueris, pelui et hypogaſtrio connatis, in quibus praeter caeteras partes ipſa etiam monſtroſa pelvis ex duabus peluibus adeo eleganter et concinne compoſita erat, vt facile plus, quam coeca fortuita colliſio in ea Viris acutiſſimis eluceret. Sed in iisdem pueris inteſtina tenuia, ſingulis adhucdum propria confluebant in vnum commune colon. Hcc in rectum terminabatur, quod, cum nec extus vllum orificii ani veſtigium appareret, ſeſe inſerebat in magnam vtrique foetui communem veſicam vrinariam, quaſi in cloacam, in quam foeces deponebantur, vna cum vrina poſtea per duas vrethras duosque penes emingendae. Penes autem prodibant in parte poſteriori, vbi naturaliter anus eſſe ſolet; cum in regione pubis et ad vmbilicum vsque foetus connati eſſent. Teſticuli, epididymides et veſiculae ſeminales, ſingulis pueris propriae, naturali modo ſe habebant, ſed ductus eiaculatorii, quibus ſemen ex veſiculis ſeminalibus in coitu expelli debuiſſet, non in vrethram, ſed in ipſam veſicam vrinariam hiabant orificiis, nullis proſtatis neque ſphincteribus cinctis, vnde ſemen non modo continuo ſtillabat, ſed etiam, in veſicam vrinariam depoſitum, cum communi vrinae et foeçum aluinarum maſſa continuo commiſcebatur.

Non loquor de compoſitione totorum corporum, qua adulti ob ſitum non parallelum ſed obli-

quum erga ſe inuicem ambulare hi foetus vix potuiſſent. Omitto quoque difficillimam excretionem foecum aluinarum, qua vitam nonniſi moleſtam et continuis morbis obnoxiam geſſiſſent. Sola organa generationis produco, in quibus quaedam prorſus inexplicabilia inuenio. Negotium generationis, cum ſemen veſicae vrinariae immiſſum, cum vrina et foecibus aluinis commixtum, corrumpi neceſſe fuerit, ipſo DVVERNEIO concedente, exerceri nullo modo potuit. Cur ergo teſticuli, cur epididymides et veſiculae ſeminales factae, egregiaque adeo arte conſtructae ſunt, cum finis, cur factae ſunt per earum inſertionem in veſicam vrinariam plane deſtruitur? Vel cur hae partes non ſolito modo in vrethram ſed potius in veſicam vrinariam inſeruntur, cum praeſentes teſticuli, epididymides, vaſa deferentia et veſiculae ſeminales finem generationis aliquando praeſtandae tamen teſtentur? Non poſſunt huiusmodi ſtructurae contradictoriae, non poſſunt huiusmodi hominum imperfectiſſimorum aeque ac miſerrimorum germina conſilio praemeditato facta et praeſtabilita eſſe. Nam ſine omni dubio conſultius fuiſſet, teſticulos aut nullos plane et veſiculas ſeminales formare, aut formatas in vrethram deriuare, inteſtinoque recto proprium exitum dare et homines parallelos et lateraliter coniungere.

Verum rei veritas quaenam ſit, non latet. Structura corporis humani et vires ei inſitae, quas vno verbo eius *naturam* dicimus, adeo a CREATORE coor-

coordinatae ſunt, vt miros effectus, et ſapientiae AVCTORIS plenos producere poſſint. Sed eandem naturam etiam cauſis alienis accidentibus in ſuis operibus turbari, eoque modo quaſi errores committere poſſe, non minus ab eius Sapientiſſimo AVCTORE conceſſum eſt. Eadem porro, quod magis adhuc mirum eſt, eiusmodi errores commiſſos corrigere poteſt. (Conferatur de his erroribus et correctionibus etiam locus, quem poſt deſcriptionem venae cauae ſuperioris ſiniſtrae in hac diſſertatione addidi). Sed iterum modo feliciter corrigit, modo infeliciter. Auertit a corpore morbos, et morbos praeſentes curat. Materiam febrilem mitigat et cum ſudore expellit. Sed interdum, quando hae viae ſudoriferae occluſae ſunt, agitatam materiam febrilem etiam cum vi verſus cerebrum pellit, ibique inflammationem producit et mortem. Similiter hae vires corpora organica ſtruere poſſunt, ei corpori, cui inſunt ſimilia. Sed modificatae per cauſas alienas monſtra producunt, turbatae errores committunt, impeditae ſtructuram imperfectam, vitioſam, contradicentem efficiunt. Eiusmodi ergo vitioſa ſtructura etiam in praeſenti noſtro exemplo confuſio viarum vrinariarum et ſeminalium cum aluinis eſt, quam natura ob impedimenta producere coacta fuit. Idque non modo analogia ſuadet, ſed res ipſa demonſtrat. Coniunctis enim embryonibus in regione pubis et hypogaſtrii, locus omnino defuit, quo viae vrinariae et ſeminales ſeparatim ab aluinis deriuarentur. Quo minus ergo exitus vrinae plane interdiceretur, quae

retenta mortem neceſſario produxiſſet; coniunxit euidenter potius has vrinae et ſeminis vias cum alvinis, deduxitque ad eum locum qui naturaliter alvinis tantum deſtinatus eſt. Itaque manifeſto correxit peccatum in compoſitione embryonum per pelves et hypogaſtria commiſſum. Non plane quidem correxit, ſed tamen aliquantulum. Sed peccata in germinibus creatis, quandoquidem ſani ſumus, ſtatuere non poſſumus.

Adeoque non cauſis quidem, a generatione alienis, accidentibus, haec ſtructura, ex naturali, quae prius fuiſſet, in monſtroſam *transmutata*, ſed viribus tamen generatricibus ipſis, per eiusmodi cauſas alienas modificatis *producta* non autem a DEO *praeſtabilita* fuit. Caeterum fines, quos naturam in corrigendis erroribus perſequi dixi, non huic naturae proprie, neque animae, ſed AVCTORI earum, quo vsque veri fines ſunt, adſcribendos eſſe, qui ſcilicet naturam arte vere diuina ita inſtruxerit, vt etiam alienis cauſis quibusuis turbata vel impedita, tamen non opus perditum deſerat, ſed, quantum fieri poteſt, aliis modis idoneis perficiat, quisque facile videt, atque ſatis iam monui.

In actis Pariſinis anno 1700. a LEMERIO foetus leporini deſcribuntur, pectore connati capite vno communi. Loco oeſophagi nonniſi parua cavitas fundo coeco reperiebatur, vnde animal deglutire, adeoque vitam extra vterum continuare, non poterat.

An

An etiam hic defectus oeſophagi et deglutitionis non vitium naturae ſed ſtructura conſilio praemeditato ita facta fuit? Nam morbo pharyngem non coalitum fuiſſe docet totius oeſophagi plenaria abſentia.

In iisdem anno 1700. Cel. MERY foetum humanum deſcripſit vertebris vltimis lumborum adeo retortis, vt pubes genua et pedes extremi retrorſum reſpexerint. Capitis, thoracis et abdominis cauitates praeterea apertae erant, et auriculae cordis vna communi cauitate gaudebant, quae venas omnes recipiebat et in ventriculum dextrum hiabat. Hic communicabat cum ventriculo ſiniſtro, qui aortam non modo, ſed etiam pulmonalem arteriam edebat.

Solent laudatiſſimi Viri dicere, monſtra a Summo CREATORE ideo praeſtabilita eſſe, vt ſapientiam et gloriam ſuam in innumeris rerum varietatibus manifeſtaret; ego nonniſi corpora naturaliter formata ad hunc ſcopum referri poſſe exiſtimo. Quam male vero monſtrum hoc ob pedes et pubem retrorſum ſpectantes, adeo deforme, illi ideae reſpondeat, non opus eſt, vt dicam. Cauitates corporis autem non effectus cenſere oportet cauſae alicuius violentae, qua partes antea integrae, deſtructae fuiſſent. Purulentas enim et laceratas eas Cel. MERY inueniſſet, facileque eiusmodi deſtructionem a mala conformatione diſtinxiſſet. Si vero iam pridem et ſucceſſiue illa deſtructio contigiſſet foetus ſane eo vsque in vtero non potuiſſet viuere et nutri-

ri. Sed inueni quoque in ouis incubatis, thoracem et abdomen ita formari, vt in principio apertae cavitates ſint, quarum latera reflexa in membranam amnii continuantur; deinde latera prolongata anterius contingant paulatim et concreſcant. (vid. obſervationes meas in ouis incubatis inſtitutas, in Commentar. Tom. XIII. pag. 492. §§. 131. 132. 134. 135.). Patet igitur in hoc monſtro viribus naturae, dum corpus conſtruerent, impedimentum occurriſſe, quo minus inchoatum thoracem et abdomen perficere potuerint; adeoque ſtructuram hanc opus naturae imperfectum non in germine ex inſtituto praeſtabilitum eſſe. Neque cordis et vaſorum conformatio ad vitam idonea eſſe videtur.

In iisdem anno 1702. foetus felinus ab eodem Auctore expoſitus eſt, a capite vsque ad vmbilicum ſimplex, inde deorſum totus duplex. Aſpera arteria cum oeſophago adeo coniuncta erat, vt vna tantummodo vtrique communis cauitas eſſet et vnus canalis, qui ſeparatus a pulmonibus in ſolum ventriculum ſe inſerebat. Deglutire ergo ſed non reſpirare animal poterat. Quare etiam nonniſi vnam horam poſt partum, foraminis oualis et ductus Botalli beneficio vixit.

Non fieri poſſe exiſtimo, vt ſingularis quaedam ſpecies animalis ab Ente intelligente ſingatur, cuius ſingularitas praecipue in eo conſiſtat, vt viuere et exiſtere non poſſit.

In

In iisdem 1703. monſtrum ouinum a Viro ANTOINE miſſum deſcribitur, quod in ſolo ouis abdomine cum vmbilico et pedibus poſterioribus conſiſtit, ſine capite ſine pedibus anterioribus et ſine thorace. In hoc abdomine nihil erat praeter meſenterium cum inteſtinis et parte, ventriculo analoga. Hepar nullum, nulli renes, multo minus cor aut pulmones. Cordis munere trunci vaſorum vmbilicalium fungebantur.

Etiam ne hoc quidem opus naturae turbatae et opus imperfectum? Sed perfectum ſuae ſpeciei animal fuit? Nam embryonem prius integrum fuiſſe, poſteaque cauſis violentis ad has reliquias vsque deſtructum, nemo, qui functiones partium corporis animalis intelligit, cogitare poteſt. Si vel cor modo ſemel naturaliter in embryone exſtitiſſet, ita, vt vita huius illi, vt naturaliter fit, innixa fuiſſet, nunquam fieri potuiſſet, vt pars modo cordis deſtrueretur ſalua vita embryonis, multo minus cor totum cum tota aorta et vena caua, cum pulmonibus, cum toto thorace et capite. Huiusque ſententiae etiam Perill. L. B. v. HALLER eſt, qui hoc monſtrum omnino ad originalia refert (Opuſcul. anat. Edit. 1751. pag. 210.). Quid ergo ſupereſt, quam vt pro opere habeatur hoc monſtrum naturae, quod ſucceſſu caruit?

In iisdem anno 1709. monſtri mentio fit cuius deſcriptionem BARTHOLOMAEVS SEYFARTHVS miſerat. In eo praeter multa alia diſformia vnus

tantum oculus in media baſi frontis poſitus erat, palpebris ſuis et tunicis, *adnata* et *cornea pellucida*, *irideque* et tandem ſolitis muſculis inſtructus, neruo vero optico priuatus.

Quis huius oculi finis fuit? Vtrum vt potuerit hoc monſtrum videre? An vt ne potuerit? Si fuit vt potuerit, cur neruus opticus omiſſus eſt, quo deficiente finis ille nunquam obtinebitur? Si, vt ne, cur ergo tanto artificio oculus in hoc monſtro fabrefactus eſt? Naturam oculum perfectum molitam, ob impedimenta perficere non potuiſſe, id cogitari poteſt. Sed CREATOREM huiusmodi ſtructuram, neque volentem, neque nolentem, in germine ex conſilio delineaſſe, id cogitari non poteſt.

Foetui monoculo ibidem 1717. deſcripto duo oculi fuerunt minores, propriis ſcleroticis deſtituti, maioribusque lentibus praediti, in media parte baſeos frontis collecti, et vna communi ſclerotica incluſi, eoque modo in vnum oculi bulbum redacti et communi ſimiliter cornea inſtructi.

Quamuis foetus non coecus fuerit, tamen manifeſtum eſt, viſum ob paruitatem *retinarum* earumque in minutis oculis ad lentes chryſtallinas maiores propinquitatem, nec non ob communem *corneam* nonniſi maxime confuſum et longe peiorem fuiſſe, quam ſi vnus ſimplex oculus huius gemelli oculi locum occupaſſet. Cur ergo non potius aut plane duo oculi ſeparati, aut plane vnus, qui incorruptus ſit et ſimplex? Sed video hic, vt in omnibus reliquis

liquis exemplis obſtacula, naturae oppoſita. Ex vna parte vires determinatae ad oculos duos producendos et ſucci requiſiti adfuerunt; ex altera vero, cum orbitae, ſedes oculorum ſolitae, vel aliena materia occupatae, vel aliis cauſis quibusuis praecluſae, et locus poſt illas aptiſſimus, vni tantum oculo recipiendo par fuerit, locus pro duobus oculis defecit; adeoque natura duos in vnum compingere coacta fuit. Vnum bulbum produxit, in quo tamen veſtigia virium duobus producendis parium, recognoſcuntur.

Neque ille foetus 1712. cum corde, extra thoracem, qui integer fuit, pendulo, a CREATORE ita formatus eſſe poteſt. Nam etiamſi vitium leuiſſimum et vix vllum eſſet, nunquam tamen potero illud CREATORI attribuere. Neque vlla cauſa, ſi vnquam cor thorace incluſum fuiſſet, hunc aperire, cor expellere et poſtea thoracem circa magna vaſa cordis iterum claudere potuiſſet. Sed ex obſeruatis, quorum ſupra mentionem feci, quibusque conſtat, thoracem ſimiliter, vt abdomen primo tempore in embryone apertum, lateribus ſucceſſiue productis tandem ſe claudere (Conf. Tom. Comm. XIII. pag. 496. §. 133.) mea quidem ſententia non incomprehenſibile videtur, qui fieri potuerit, vt thorax, vel ob nimiam cordis magnitudinem, illud, dum ſe conſtrinxerit, non complexus ſit, vel ob alias cauſas nimis cito, et prius quam latera eius ſatis elongata fuiſſent ſe conſtrinxerit, adeoque cor omiſerit. Qui phaenomena ouorum incubatorum

nouit et locum cordis ſub collo, qui idem in hoc foetu quoque fuit, aliasque circumſtantias multas conſiderat, ei de hac veritate ſcrupulus nullus reſtare poteſt.

Anno 1716. MERIVS propoſuit foetum, cuius hepar, ventriculus, inteſtina et lien extra abdomen in funiculo vmbilicali, in ſaccum dilatato, ſita erant. Orificium, quo abdomen in hunc ſaccum funiculi hiabat, anguſtum erat et ſolum meſenterium continebat. Veſica et renes in abdomine locis ſolitis ſiti.

Adduco hoc exemplum ob ſimilitudinem cum praecedenti, tum etiam quod WINSLOWVS, germinum, ni fallor, defenſor, aeque ac MERIVS, qui aliter et mecum, ſenſiſſe videtur, perſuaſus fuit, manifeſtisque argumentis demonſtrauit, haec viſcera cauſis mechanicis ex abdomine, in quo antea incluſa fuiſſent, expelli nullo modo potuiſſe. Quum vero non magis probabile ſit, hanc conformationem, ad vitam ineptam, a CREATORE praedelineatam fuiſſe, nihil reſtat, quam vt viribus generatricibus hoc vitium imputemus. Nimirum aeque hic ac in priori caſu abdomen nimis cito et nimis arcte ſe contraxit viſcerumque illorum prima initia excluſit. Qui ex hiſtoria oui incubati nouit, etiam poſtremo tempore abdomen in pullo iam perfecto circa vmbilicum adhucdum apertum eſſe et aliquam inteſtinorum tenuium partem extra illud propendere, tertio autem et quarto incubationis die totum abdomen

men late patere, renes longitudinaliter ſpinae dorſi applicatos, reliqua viſcera autem anterius et a ſpina dorſi remotiores ſitos eſſe, illi nullum plane dubium erit, quin in omnibus huius generis monſtris praematura contractio abdominis vel thoracis vnica et vera cauſa ſit qua partes, ſpinae dorſi proximae quidem comprehenduntur, remotiores vero praeter naturam excluduntur. Adeoque in his exemplis clare videmus, in monſtris, vti partes praeternaturales ſunt, earum praeternaturalem formationem ſeu generationem cauſam fuiſſe harum partium, non praeternaturalium creationem, neque naturaliter formatorum transmutationem.

Anno 1720. Idem Vir celeberrimus, MERIVS, vna cum puella integra et naturali aliam monſtroſam, ſed a priori ſeparatam natam eſſe vidit ſine capite collo et brachiis, ſine corde et pulmonibus, ſine hepate ventriculo et inteſtinis tenuibus. In thorace anguſtiori et breuiori nonniſi vena caua cum aorta, in quam illa immediate tranſiit, et renes; in abdomine merum inteſtinum coecum duabus appendiculis vermiformibus inſtructum, colon inde continuatum et rectum, porro partes genitales integrae collocabantur.

A DEO ipſo hoc corpus ita praedelineatum non eſſe, ab iis, qui a me diſſentiunt, fere poſco. Integrum autem id prius aliquando et mutilatum poſtea cauſis violentis aut morbo non fuiſſe, id valide demonſtrat praeter alia argumenta integerrimus

venae cauae in aortam immediatus tranſitus, inter quas nulla cauſa et nullus morbus cor eripere, annihilare, vaſaque denuo adeo adcurate conglutinare poteſt, et porro ſecundus proceſſus vermiformis, quem nullus morbus, aeque ac primus eſt, organicum, producere potuit. Reſtat ergo, vt vires generatrices hoc corpus ita, vt repertum et obſeruatum fuit, produxerint.

Denique etiam in noſtro vitulo bicipite, qui ad monſtra pulchra et feliciter producta pertinet, variae monſtroſae ſtructurae, quas ex cauſis naturalibus, ad generatrices pertinentibus, non minus, vt mihi videtur, facile quam vere in ſcholiis interſperſis explicui, nonne ſe ipſis oſtendunt, eiusmodi ſtructuras neque a Diuina potentia *immediate*, neque a morbis vel cauſis accidentalibus, ſed a generatricibus modificatis ſolis pendere? Qui enim ex cauſis naturalibus vere explicari poſſent, quae nonniſi ab arbitrio DEI immediate penderent? Fundamentum totius monſtri, vegetatio luxurians, qua nouus ſuccorum fons apertus toti acceſſorio capiti et collo producendis anſam dedit, et qui idem poſtea paulatim nouam arteriam innominatam, factae inſolitae excretionis ſuccorum veſtigium, produxit, huc pertinet (vide duo priora ſcholia). Pertinet huc porro inſolitus ſanguis, a nouo capite rediens, effectus excretionis illius praeter naturam factae, quo, loco venae ſubclauiae ſiniſtrae, aliena iugularis iugulari ſiniſtrae capitis dextri reddebatur (vid. ſchol. tertium). Tandem mira inſertio venae cauae ſuperioris

ris capitis ſiniſtri in venam coronariam magnam vituli primarii, cauaeque in truncum, coronariae in ramum mutatio (vid. ſchol. quartum) nimis quidem, vt mihi videtur, luculentam noſtram propugnatam veritatem oſtendunt.

Credo autem fore, vt ſufficiant haec exempla ad demonſtrandum, *monſtra non immediata* DEI *ſed naturae opera eſſe, quae ſucceſſu caruerint*; ſiquidem fere vbique vt in adductis vidimus vitia manifeſta, errores quaſi non praeuiſi, et correctiones imperfectae elucent. Rariſſima exempla ſunt, ſi vlla quidem dantur, vbi natura aberrando a ſolita conformatione inceptum opus adeo feliciter perfecerit, vel errores commiſſos adeo dextre correxerit, vt pro praemeditatis operibus haberi poſſint, vtque videri poſſint (vid. Perill. et magni HALLERI opuſcul. anat. p. 198. "exemplaria eſſe noui generis creatu-„rarum et documenta, qua ratione diuina ſapientia „et alias formas hominum poſſit efficere ſuo in ge-„nere perfectiſſimas et feliciſſimas.„ Quae huius ſapientiae documenta nonne iam ſatis clara in animalium et plantarum familiis, generibus, ſpeciebus et varietatibus infinitis exſtant? Et quorum huius Sapientiae documentorum nonne vniuerſa natura iam plena eſt? Discamus autem ex rariſſimis, quae in lucem prodeunt, monſtris, ſtructuram naturalem corporis noſtri, quae infinitis perfectionibus abundat, et quae, hoc paruo monſtrorum numero non obſtante, mirabiliter conſtans eſt, *non neceſſariam* eſſe! adeoque Sapientiae NVMINIS deberi! et Prouiden-

tiae

tiae EIVS incomprehenſibili! Sic enim ratio de monſtris philoſophandi et verior mihi et longe vtilior eſſe videtur.

Pleraque, dico, niſi omnia, monſtrorum exempla, etiamſi non ſemper vitia in ſe habeant adeo manifeſta, quam in adductis vidimus, tamen non expertia ſunt omnis inconuenientiae et irregularitatis, quae indicet, eas ſtructuras non praecogitatas eſſe. Sic in noſtro exemplo et in ipſo Perill. HALLERI pulcherrimo foetu bicipite et, niſi fallor, in omnibus monſtris compoſitis, quibus vnum cor commune eſt, quae nempe inter caetera elegantiſſima eſſe ſolent, irregularitas manifeſta, et quaſi nonniſi ideo admiſſa, vt vitia et incommoda maiora euitentur, in truncis venarum apparet. Syſtema arterioſum (de aortico loquor, nam pulmonare a venoſo pendet) elegantiſſimum non modo in his monſtris et regulare, ſed adeo etiam formatum eſſe ſolet, vt leges naturalis ſtructurae in eo obſeruatae non obſcure appareant. Sic arteria innominata ſecunda in noſtro vitulo, vt naturaliter ſolet, ex aorta, non ex primaria innominata, non ex corde ipſo, non ex dextri vituli carotide aliqua, oritur. Sed ſubclauia ſiniſtra, quod omnino mirum eſt, non conformiter dextrae ex innominata ſui lateris, ſed ex arcu aortae originem ducit; nam haec ſingularis lex eſt ſtructurae naturalis. Sed venae quam mire combinantur et modis inauditis! quae quippe neque ad leges naturales ſe, neque ad conformitatem ſuarum arteriarum adſtringunt. Vena caua ſuperior ſini-

ſiniſtra in noſtro exemplo ſecundum leges ſolitas ex propria auricula oriri, ad conformitatem arteriarum vero cum vena caua ſuperiori dextra in vnum truncum confluere debuiſſet, ſed quaerit ſibi pro trunco venam, inter omnes maxime inexſpectatam, coronariam magnam cordis, ſe ipſa multo minorem, et quam ideo in ſui ramum permutat. In foetu bicipite Perill. HALLERI duae aortae ſunt, duaeque arteriae pulmonales. Quatuor ergo, his arteriis reſpondentes, auriculae et ſinus venarum eſſe deberent. Verum ne duae quidem, quot in ſimplici foetu, ſed plane vna tantummodo exiſtit, et tamen loco quatuor, quinque venae cauae et vna rurſum tantummodo pulmonalis adeſt. Quum in ſyſtemate arterioſo aortico eius non modo ſymmetriae ſed etiam quantum fieri poteſt ipſae ſingulares ſtructurae naturalis leges adeo eximie obſeruentur, cur non, ſi praemeditatae hae ſtructurae monſtroſae eſſent, cur non et in venis cauis obſeruarentur eaedem? Sed cauſa, cur illud fieri poſſit in arteriis, et cur neceſſe ſit, vt confuſio oriatur in venis, me minime latet. Non poſſum autem hunc nodum hic euoluere, (vid. interim in ſuperioribus deſcriptionem venae cauae ſuperioris ſiniſtrae, vbi aliqua verba, huc ſpectantia inieci,) neque intrare pleniorem explicationem modi, quo monſtra formantur, cuius ibidem poſt deſcriptionem ſyſtematis arteriarum aliquam mentionem feci. Pro his autem duo alia momenta adiungere conuenientius eſſe videtur.

Prius eſt definire limites inter monſtra compoſita et foetus gemellos inter ſe mere concretos, qui adeo et ſuperficialiter et profundius concreti obſeruati eſſe dicuntur, vt Ipſe etiam Perill. HALLERVS (opuſcul. anat. p. 217. n. 1. 2.) hos limites figere difficile eſſe iudicauerit; vndeque factum eſt, vt foetus concreti, ab Auctoribus confuſi cum monſtris veris, tanquam argumenta conſiderati fuerint pro ortu monſtrorum ex ſimili duorum foetum concurſu et concretione, quem ortum ſub initio huius commentationis refutaui. Hi limites itaque ſic definiri et figi poſſe videntur. In monſtris compoſitis communicatio organica inter compoſitos foetus obtinet. Id eſt, dantur in iis partes organicae vtrique foetui communes, vti cor et aorta in noſtro exemplo, cor in plurimis, caput in porcino monſtro Perill. HALLERI, peluis in DVVERNEIANO etc. In gemellis concretis contra, quantumuis profunde concreuerint, quae partes modo a deſtructione ſuperſunt, eae ſemper nonniſi alteri foetuum propriae diſtinctiſſimaeque ab altero, et neceſſario erunt. Hi characteres enim eius indolis ſunt, vt a priori demonſtrari poſſint. Sed credo etiam, nonniſi ſuperficiales concretiones et eo vsque tantum dari, vt ne muſculorum quidem et oſſium, multo minus viſcerum deſtructione opus ſit.

Alterum eſt monere, quod etiam ex ſolis argumentis alibi pro epigeneſi datis, iam ſequatur, etiam monſtra viribus naturae produci, non ex ger-

minibus

minibus creatis euolui. Quodſi haec vero propria ſuae originis documenta ſuppeditent; ea viciſſim argumenta ſimul pro epigeneſi eſſe.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Fig. I. Cor cum vaſis maioribus in ſuperficie anteriori.

A. Caput dextrum.
B. Siniſtrum.
C. Locus quo vsque colla concreta ſunt.
D. Aſpera arteria colli dextri.
E. Aſpera arteria colli ſiniſtri.
F. G. H. I. Quatuor lobi pulmonis dextri.
K. L. Lobus ſuperior et inferior pulmonis ſiniſtri.
M. N. O. Tres lobi pulmonis ſuperioris communis.
P. Cor. Ventriculus eius dexter.
Q. Arteria coronaria ex dextro aortae orificio nata.
R. Arteria coronaria ex ſiniſtro aortae orificio orta.
S et T. Adeps ad baſin cordis has arterias inuolvens tegensue.
V. Moles adipis conglobati retro auriculam ſiniſtram baſi cordis adſidens.
W. Auricula ſiniſtra.
X. Auricula dextra.
Z. Aorta dorſalis.

a. Arteria pulmonalis, ex corde orta vnica, ad ſolum vitulum dextrum pertinens.

b. c. Eius ramus, dextrum referens, in lobos pulmonis dextri G. F.

d. e. Ramuli eiusdem lateris in lobulos eiusdem pulmonis H. I.

f. Ramus arteriae pulmonalis, ſiniſtrum referens, in pulmonem ſuperiorem diſtributus.

g. Aorta.

h. Continuatio aortae poſt arterias innominatas editas.

i. Truncus breuiſſimus duarum arteriarum innominatarum.

k. Arteria innominata dextra.

l. l. Arteria vertebralis dextra.

m. Arteria ſubclauia dextra.

n. Carotis dextra capitis dextri.

o. Siniſtra eiusdem capitis.

p. Arteria innominata ſiniſtra.

q. Arteria pulmonalis, quae ex ea oritur, ad ſiniſtrum vitulum pertinens.

r. s. Duo eius rami, trunco maiores, quorum ille in pulmonem ſuperiorem hic in ſiniſtrum.

t. Arteria coronaria cordis, ex eadem orta, in ſuperficiem poſteriorem cordis procedens.

v. Carotis ſiniſtra capitis ſiniſtri.

w. Carotis dextra eiusdem capitis.

x. Truncus arteriae vertebralis et ſubclauiae ſiniſtrae, ortus ex aortae, vbi cum ductu arterioſo coniungitur, facie poſtica.

y. Ar-

y. Arteria ſubclauia ſiniſtra.
z. Arteria vertebralis ſiniſtra.
1. Vena caua ſuperior pro capite dextro.
2. Vena pulmonalis dextra.
3. Vena vertebralis dextra.
4. Vena ſubclauia dextra.
5. Vena axillaris dextra.
6. Vena iugularis dextra capitis dextri.
7. Iugularis ſiniſtra capitis eiusdem.
8. Vena muſcularis pro capite ſiniſtro.
9. Vena iugularis dextra capitis ſiniſtri.
10. Continuatio iugularis ſiniſtrae capitis dextri.
11. Vena caua ſuperior ſiniſtra.
12. Vena vertebralis ſiniſtra.
13. Vena axillaris ſiniſtra.
14. Iugularis ſiniſtra capitis ſiniſtri.
15. Vena pulmonalis ſiniſtra.

Fig. 2. Cor cum vaſis maioribus in ſuperficie poſteriori.

A. Cordis ſuperficies poſterior plana.
B. C. Pulmo ſiniſter.
D. E. Pulmo ſuperior ſeu medius.
F. G. H. I. Pulmo dexter.
K. Subſtantia ligamentoſa, qua pulmo dexter et ſiniſter coniunguntur.
L. Aſpera arteria colli ſiniſtri.
M. Aſpera arteria colli dextri.
N. O. Moles adipoſa conglobata. O eius pars ſiniſtrorſum reclinata vt arteria P. appareat.

P. Arteria cordis, quae loco coronariae ſiniſtrae eſt; eadem (fig. I. *t*.).
Q. Eius ramus in molem adipoſam.
R. R. Eius continuatio.
S. Adeps, quae eam comitatur.
T. Auricula ſiniſtra.
V. Baſis auriculae dextrae.
W. Sinus venarum cauarum.
X. Vena caua inferior.
Z. Vena caua ſuperior dextra.
a. Vena vertebralis dextra.
b. Venae cauae ſuperioris dextrae continuatio.
c. Vena axillaris dextra (fig. I. 5.).
d. Iugularis dextra capitis dextri.
e. Iugularis ſiniſtra capitis dextri.
f. Vena in muſculos colli capitis ſiniſtri.
g. Iugularis dextra capitis ſiniſtri.
h. Continuatio iugularis ſiniſtrae capitis dextri.
i. Sinus venarum pulmonalium.
k. *k*. Venae cauae ſuperioris ſiniſtrae arcta cohaeſio cum variis ſinus pulmonalis partibus.
l. Vena pulmonalis ſiniſtra.
m. Vena pulmonalis ſuperior, quae ope ſubſtantiae *k*. ad tres pulmones peruenit.
n. Vena pulmonalis dextra.
o. Vena caua ſuperior ſiniſtra.
p. Eius poſt cohaeſionem cum ſinu pulmonali intra huius membranas continuatio et locus vbi dextrorſum flectitur.

q. Eius

q. Eius continuatio et locus vbi in venam coronariam magnam inſeritur.

r. Eius ramus primus, vena vertebralis.

s. Eius continuatio ſurſum, quae vena ſubclauia ſiniſtra eſt.

t. Vena axillaris ſiniſtra.

v. Vena iugularis ſiniſtra.

w. w. Pars aortae dorſalis in partem anteriorem retractae, ne partes praecipuas huius figurae tegat.

x. Arteria ſubclauia ſiniſtra.

y. Arteria axillaris ſiniſtra.

z. Arteria vertebralis ſiniſtra.

DE

DE RELIQVIIS ANIMALIVM EXOTICORVM PER ASIAM BOREALEM REPERTIS COMPLEMENTVM.

Auctore

P. S. PALLAS.

Mira forte viſa ſunt, quae de foſſilibus quadrupedum Indicorum, praeſertim Rhinocerotum reliquiis per Sibiriam inuentis olim e Gazophylacio Academiae expoſui. Iam itineranti per has ipſas terras, quas oſſibus foſſilibus admirandis refertas eſſe docui, maiora adhuc miracula ſeſe obtulerunt, quae nunc, ſimul cum obſeruationibus quibusdam generalioribus, ad doctrinam de fatis horum oſſium aliquando ſtabiliendam apprime facientibus, pro complenda priore tractatiuncula breuiter exponam.

Primum ergo moneam, veriſſimum me deprehendiſſe, quod prius alienis innixus obſeruationibus ſcripſeram, per vniuerſam Aſiam borealem ab ipſo Tanai fluuio ad extremum Antiquae telluris Americae vicinum angulum, vix vllum dari fluvium inſigniorem, praecipue *campeſtrem*, in cuius ripis vel alueo non fuerint reperta, ſaepiusque adhuc inueniantur oſſa Elephantum, aliorumque vaſtiſſimorum et non huius climatis animantium. Dico

cam-

campeſtrem fluuium: in vniuerſum enim ſtatui poteſt alpeſtres Sibiriae tractus, qui congenitis telluri ſaxis, verticali proxima directione fiſſilibus exaſperantur, continuisque Iugis vniuerſam peruadunt Aſiam, celſis paſſim aeternaque niue candidis cacuminibus ſupra nubes ſeſe extollentes, quadrupedum exoticorum pariter atque corporum marinorum foſſilibus reliquiis expertes eſſe. Contra vbi Alpium aſiaticarum extremi colles in planitiem demittuntur, magisque vbi vaſti ſuccedunt campi limo vel arena ſcaturiginoſo argillarum ſtrato ſuperingeſtis aequati; ibi ripae fluminum atque riuorum planitiem transſulcantium elatiores vbique fere oſſibus atque reliquiis variis aduentitiis ſunt feraciſſimae; ſatis certo, vt videtur, argumento has ipſas reliquias etiam in locis a curſu fluminum remotis elatiore camporum ſolo ſepultas paſſim latere. Deſunt eaedem vero vel parciſſime ſaltim occurrunt, vbi telluris ab alluuie alpeſtri remotioris ſuperficies nimium demittitur, vbi immenſae regnant paludes atque paſcua depreſſa. Quae quidem norma adeo firma eſt, vt ad obum fluuium, qui ſecundum imam calcem Vralenſis iugi ad arcton defluens modo humiles palude ſyluisque imperuias, modo elatas habet ripas, oſſa elephantina ſimiliaque iis fere locis tantum reperiantur, vbi adiacentes colles arenoſi vel limoſi praeruptas ripas efficiunt. Neque ad Irtim eiusue collaterales campeſtres fluuios huiusmodi ripa fere vlla eſt, e qua, dum a vernis exundationes vel per ſcaturigines ſubterraneas ſubruitur, Oſſa mamontea

dicta ſimiliaque non in lucem prodeant. Imo quidquid dentium eburneorum per Sibiriam colligitur atque venum adportatur e praeruptis ſemper altioribusque fluuiorum ripis, praeſertim arenoſis erui conſtans eſt fama.

Huic obſeruationi, quae ad extricanda fata oſſium foſſilium ducere aliquando poterit, alias eodem facientes ſuperaddam. Notabile *primum* eſt in omni climate vel ſub omni latitudine, a zona montium Aſiam diuidentium vſque ad conglaciatas Oceani borealis oras vniuerſam Sibiriam vbique oſſibus mamonteis aeque feracem eſſe; optimumque reperitur ebur foſſile in terris arctico circulo vicinis, inque regionibus maxime orientalibus, quae ſub eadem latitudine Europa multo frigidiores ſunt, et quarum ſolum aeſtate tantum in ſuperficie regelari ſolet.

Porro obſeruatum eſt, quod Oſſa maiorum minorumque animalium quibusdam locis maxima copia congeſta iacent, vt quaſi gregem animalium vaſtiſſimorum ibi obrutam fuiſſe diceres. Rara autem huius rei exempla innotuerunt; Celeberrima ſunt, ripa Tanais in vicinia oppidi *Koſtynsk*, quam nuper accuratius deſcripſit *Cel.* S. G. GMELINVS (*); magisque ripae Obenſis aluei praeruptae et glareoſae, quas alternatim adiacentes colles arenoſi variis pasſim ſtratis argilloſis, ferruginoſisque conſpicui, paulo

(*) S. G. GMELIN Reiſe durch Rusſland *Vol. I. pag.* 34. itemque *p.* 78. *et ſeq.*

lo infra vicum Kuſchewatenſam (*Kuſchewazkoi Pogoſt*) huic fluuio praebent et in quibus elephantinorum oſſium maxima copia, dentes, ſcapulae, vertebrae, coſtae, oſſa innominata artuumque fulcra vbique fere ſparſa iacent et ab alluuione aquarum in lucem producuntur; ita vt ab incolis fere quotannis ebur ibi colligi ſoleat, plurimaque oſſa a ſtudioſo, quem vere anni 1771. verſus glacialem Oceanum ſecundum Obum fluuium dimiſeram, *Baſilio Sujef* in praedictis ripis inuenta fuerint.

Deinde vero quibusdam in locis ſingulorum ſaepe vel paucorum animalium reliquias in tumulis arenoſis, vno quaſi ſepulcro condita reperiri, variis exemplis comprobare poſſum. — Sed in plerisque ripis, quae foſſili ebore oſſibusque inclaruerunt, membra animalium plerumque disiecta reperiuntur, quaſi a fluctibus agitata et obruta limo vel glareoſis maxime ſtratis euidentiſſime vndarum effectu et fluctuatione congeſtis, imo variis ſaepe corporum marinorum reliquiis conſociata. Huius momenti, in extricanda oſſium foſſilium hiſtoria grauiſſimi, pluribus in locis luculentiſſima exempla propriis oculis vidi. *Primum* ad Rhymnum nobis *Iaik* dictum fluuium, qui per vaſtos magnae Tatariae campos in Mare Caſpium fluit, parallelus tractui montano, ex Vralenſis iugi ramo primario ad ipſum mare vsque collibus decreſcentibus, ſabuloſis continuato, interque praedictum fluuium et Volgam fere medio. Tractus iſte montanus maximam partem conſtat ſaxo glareoſo, ſchiſtisque variis in ſtrata horizontalia

 fiſſi-

fiſſilibus, argillis porro verſicoloribus, margis atque creta, non ſine crebis paſſim petrefactorum marinorum veſtigiis. Campi ad orientem iugi latiſſime patentes, ſalſuginoſi, limo flaueſcente, ſubtili arena mixto, aequabili conteguntur, quo etiam conſtant ripae praeruptae Rhymni, paſſim ad plures orgyas elatae. In limo totam planitiem occupante ſilices quidem nusquam inueniuntur, ſed vbique fere fodientibus et ad ripas, inque lacunis ſalſis occurrunt immixtae teſtae calcinatae concharum marinarum, quarum fragmentis comminutis in vicinia Maris Caſpii omne littus apprime conſtat (*). Ex eodem limoſo ſolo Rhymnus, vbicunque altiores ripas ſubruit crebro in conſpectum producit Elephantum dentes, maxillas, magna artuum oſſa, Bubalorum immania cum cornibus capita, ſimilesque reliquias, quarum bene magnum numerum per haſce regiones profectus miraculi loco apud plebem adſeruari vidi, quaeque magis integra reliquerat aetas collegi (**). Neque ſolum Rhymnum ſed et alios deſerti Tatarici fluuios huiusmodi reliquias e ripis abreptas alueis voluere argumento poteſt eſſe Bubali cranium fractum, quod ex Irgiſo fluuio Volgam augente piſcatorio rete extractum Samarae accepi (†), atque Elephantis ebur corruptum quod in Iaxarte repertum Oren-

(*) Pallas Reiſen durch das Ruſſiſche Reich *Vol. I. pag.* 366. 379.

(**) *Ibid. p.* 378. *ſeq.* 401 *et* 417.

(†) *Loc. cit. p.* 158. *ſeq.*

Orenburgi apud mercatorem Bucharum proſtare vidi.

Poſſem hic quoque memorare ebur foſſile in regione colliculoſa inter Volgam et Swjagam, quae ſtratis calcareis atque argilloſis, immenſa petrefactorum marinorum copia foetis vbique ſcatet, paſſim ad riuos reperiundum, cuius exemplum (††) recentius in Diario itineris per illas regiones facti commemoraui. — Neque non huc pertinent reliquiae crebrae Elephantinorum ſceletorum, quae ſecundum Turam, Iſettum et Shiaſſum fluuios, ad ipſam calcem orientalem Vralenſium Alpium, itemque ab occidente huius Iugi ſecundum Kamam et influentes illam fluuios iisdem ſaepe in ſtratis terrae cum reliquiis marinae originis occurrere ſolent. Quae prius aequore vere ſubmerſa atque in ſtrata telluris ſuperficialia poſtmodum depoſita fuiſſe praeſertim edoctus fui exemplo oſſium ad Iſettum fluuium in tractu riui *Suuariſch*, haud longe ab oppidulo cui a copia pyritarum in eo tractu vbique frequentium nomen eſt (*Koltſchedanskoi Oſtrog*) propiusque adhuc Tamakulenſem vicum ſub ſtratis variae arenae, argillae atque ferruginoſi lapidis, ſimul cum Gloſſopetris, pyritibus aliisque marinae inundationis argumentis repertorum, de quibus accuratam expoſitionem in *ſecundo* Itinerarii *Volumine* communicaui.

Merentur hic denique recenſeri maſſae polymorphae, teſtaceis marinis, petrificatis refertae, quas

 Dili-

(††) *Loc. cit. p. 140.*

Diligentiſſimus Studioſus, quem ſupra nominaui, ad ripas Obi fluuii easdem reperit, de quibus quod oſſibus praeſertim elephantinis abundant ſupra monui.

Sed omnium clariſſima, ſimul cum oſſibus foſſilibus copioſis, veſtigia maris ad Irtin fluuium inueni, cuius totum decurſum relegi aeſtate anni 1771. ad calcem vsque iugi per Aſiam continui Altaici ibidem dicti, quod hic ipſe fluuius perfringens e praeruptis quaſi faucibus montani clauſtri in campos arenoſos vaſtiſſimos effunditur. Luſtrans ipſe ripas exaltatas, quae alterna vice huic fluuio per campeſtria iam tendenti adiacent praeruptae, et conſtant mera glarea ſuper aquigena argillarum ſuperficie ſtratificata, variis in locis, quae in Itinerario (*Vol. II.*) ſpeciatim recenſita ſunt, oſſa corrupta Elephantum, Bubalorum, Rhinocerotum in virgineis arenae verſicoloris ſtratis haerentia tetigi, ſimulque mirabundus obſeruaui arenam iisdem in locis, vti paſſim ad Irtin, teſtaceis calcinatis originem marinam vndique loquentibus ſatis copioſe commixtam eſſe. Imo reperi ſimul fragmenta oſſea, quae forma et textura nonniſi ad maiorum piſcium marinorum crania pertinuiſſe ſatis euidenter perſpici poterat.

In regione huius fluuii, vt hic obiter addam, perfectiſſime apparet oſſa foſſilia ſimul cum veſtigiis maris vsque ad ipſam calcem alpeſtris iugi ſparſa iacere. Etenim vsque in regionem metallis feracem Caeſareisque argentifodinis celebrem, quae iugi Altaici quaſi fimbriam borealem conſtituit, rupibusque maxime exaſperata eſt, reliquias Elephantis duobus

locis

locis repertas vidi. Ex ipſa ſcilicet argentifodina primaria, quae a copia ſerpentum inclyta eſt (*Smeinogorskoi Rudnik*) inter mineras ſuperficiarias, in monte vltra ſeptuaginta orgyas elato, effoſſum fuit fragmentum molaris Elephantini antiquiſſimi; eodemque in monte Corallitas varios ipſe legi, et in montibus vicinis Calcareis Entrochitae copioſe reperiuntur. Ab his deinde montibus (qui ſtrata non habent horizontalia, ſed maxime acuto angulo inclinata) quinque fere milliarum germanicorum diſtantia, depreſſiori in regione, vbi iam plana fit tellus et ager, praeter eminentes hinc inde colliculos rupeſtres veniſque metallicis non expertes, flauenti fere limo conſtat, ad ſiniſtram ripam riui cuiusdam ad Obum longinquo flexuoſoque curſu tendentis, cui *Alei* nomen eſt, aliquot annis ante meum in haſce regiones aduentum ruſticus piſcaturam exercens detexerat Ebur Elephantis e praerupto loco ripae prominulum, dederatque occaſionem curioſiori per metallifoſſores inquiſitioni, qua non ſolum complura eiusdem Elephantis maiora oſſa ſatisque corrupti molares, ſed eodem quoque in loco minoris cuiusdam ignotaeque viſae quadrupedis paucae reliquiae repertae ſunt, e quibus vltimis molarem vnicum, qui ad me peruenit, quique poſt corrupta minora vtriusque animalis oſſa cum ebore magis edaci aeuo reluctauerat, in *ſecundo Volumine* Itinerarii delineatum dedi, ipſe tunc ignorans atque dubitans cuiusnam eſſet animalis; donec nuperrime accepto integerrimo Rhinocerotis cranio, de quo infra ſermo erit, iſtum

quoque

quoque molarem ad Rhinocerotem pertinuiſſe didici.

Huic expoſitioni e nuperrimis obſeruationibus addam repertos ad Ieniſeam molares Elephantinos: quorum vnum ipſe inueni paulo infra Krasnojarenſe oppidum, vbi montes a palmario Iugo ſparſi in planitiem ſtratis horizonti fere parallelis in planitiem decreſcunt, in ripa praerupta lapilloſo-glareoſa, vbi crebra ſimul fragmenta occurrunt lignorum intra glaream petrefactorum, quae forma ſua detrita et exeſa teſtantur, ante lapidificationem in aquis agitata et putrida facta fuiſſe. — Alterum molarem in regione maxime boreali hoc anno inuenit ſaepius laudatus ſtudioſus B. *Sujef*, paulo ſupra hybernaculum *Selakino*, quod in latitudine boreali ſeptuaginta fere graduum ad Ieniſeam poſitum eſt, in locis ripae vbi non raro petrefacta quoque marina leguntur.

Si recenſitis hucusque obſeruationibus addas magnam copiam oſſium Elephanti, aliaque exotica crania a Samojedis colligi venumque Bereſouam adportari e planitie, quam colunt, vaſtiſſima, ſyluis denudata, Sibiriaeque borealem oram vsque in latitudinem ſexaginta octo circiter graduum conſtituentis; hanc ipſam vero planitiem monumenta plurima inundantis olim Pelagi ſeruare; — ſi denique perpendas latentia vbique fere per telluris depreſſioris ſtrata, ſolis Iugis palmariis montium exceptis, petrefacta corporum marinorum, integraque ſtrata aequoream originem arguentia obſeruari, et iis praeſertim locis, vbi quadrupedum exoticarum oſſa in ſuperficie

perficie telluris latent, marina ſimul varia modo iisdem, modo ſubiectis in ſtratis admixta eſſe: Tum quidem fateor, contra opiniones in hac re caeteras omnes, maxime veroſimile videri oſſa ſubterranea quadrupedum in Auſtralibus terris natorum, quae nunc per borealem Aſiam ſparſa iacent, reliquias eſſe cadauerum ex auſtrali patria in arcticas vsque plagas abreptorum et grauiſſima forte olim globi terraquei cataſtrophe ſubmerſorum: Eamque non ſolum vere extitiſſe, ſed etiam violentiſſimam atque ſubitaneam fuiſſe nouo atque inaudito argumento probabile reddam.

Loquor de re portento proxima, de reperto in frigidiſſima orientalioris Sibiriae plaga *Rhinocerote integro*, per tot retro ſaecula in conglaciato inhoſpitae huius terrae ſolo, *cum corio cumque tendinum et carnium inſignibus reliquiis* conſeruato. Qua quidem in re mihi fidem facturos eruditos fere deſperarem, niſi varias, de quibus hic erit ſermo, foſſiles huius animalis partes, et *integrum* praeſertim *Caput* Academiae noſtrae nuper pro teſtimonio veritatis transmiſiſſem; ad cuius itaque *Illuſtrem conſeſſum* tanquam ad oculares teſtes in re fere incredibili prouoco.

Quum Menſe Martio huius Anni (1772.) Ircutiam perueniſſem, e primis quae mihi oblata ſunt curioſis erat *Caput* foſſile animalis cuiusdam vaſtae molis, corio ſuo naturali veſtitum, imo tendinum atque ligamentorum reliquias plurimas oſtendens, quod e figura, veſtigiisque cornuum illico pro Rhinoce-

nocerotis capite agnoui , reique monſtroſitate percul-
ſus et dubitans confirmatus ſtatim fui additis eius-
dem animalis *pedibus* , poſtico vsque ad femur inte-
gro et antici extremitate , in quibus non ſolum di-
viſura vngularum Rhinocerotis characteriſtica , ſed
corium pariter , imo carnium duratarum groſſiores
fibrae , velut in Mumia naturali ſupererant. Haſce
reliquias , ab *Excellentiſſimo Ircutenſis ditionis totius-
que Orientalis Sibiriae Gubernatore* , *Exercitus duce
atque Equite aurato* ADAMO *de* BRIL mihi tunc
traditas , ea ipſa hyeme transmiſerat e diſtrictu Le-
nenſi ſiue Iacutenſi praefectus quidam (*Vprawitel* Ruſ-
ſi vocant) plebis Iacuticae in tractu Wiluji fluuii
(вилюи) degentis , qui fluuius ſub latitudine boreali
ſaxaginta quatuor circiter graduum ab occidente
fluens infra Iacutiam vrbem in Lenam incidit. Re-
latio praefecti IOANNIS ARGVNOF Ruſſica lingua
conſcripta , dataque Decembri menſe 1771. ex hy-
bernaculo ad Wiluënſe oſtium ſito (*Nishnoe Wiljuiskoi
Simowje*) , Ircutiae vero 27mo Februarii ſequentis an-
ni accepta , cuius fidum apographum Academiae ob-
tuli , ſequentia continet : "Eo ipſo Decembri menſe
„in ripa Wiluji fluuii arenoſa , ſub praerupto quin-
„que orgyis ab aqua remota colle , quadragenis cir-
„citer ſtadiis Ruſſicis„ (quae quingentis orgyis com-
plentur) "ſupra hybernaculum Wilujenſe ſuperius
„(*Werchnoi Wiljuiskoe Simoje*) repertum fuiſſe aquis
„elutum cadauer animalis arena ſemiſepulti , cuius
„longitudo quindecim dodrantes , altitudo decem do-
„drantes aequaſſe videbatur ; quodque nec a Ruſſis

„eius

„eius regionis incolis, neque a gentibus interroga-„tis agnitum vel vnquam antea in illa plaga viſum „fuiſſe Praefectus teſtatur. Quum itaque ineruditis „etiam res mira et inſolita eueniſſet, edictumque „prius a Gubernatore emanauerat, vt omnis gene-„ris curioſa, quae in Ircutenſi dictione offerrentur, „praefecti ad Gubernatorem deferrent, Caput reperti „animalis cum duobus pedibus citiſſime, (optime-„que ſeruata) per Olecmenſe munimentum Ircutiam „transmiſſa fuerunt; reliquum vero cadauer, cor-„ruptum valde, licet corio naturali adhuc obuolu-„tum, praeter vnicum adhuc pedem, qui ad Prae-„fecturam Iacutenſis Prouinciae transmittebatur, in „loco relictum periit.„

In capite pedibusque recenter acceptis corium atque tendines aliquam mollitiem a terreno humore madentes ſeruauerant, foetoremque ſpirabant non recens corruptarum carnium, ſed latrinis prorſus antiquis comparandum, quaſi Ammoniacalem. Properans illo tempore, vt Baikalem lacum ante disruptam glaciem traiicerem, neque de accuratiore deſcriptione cogitare potui, neque partes illas Rhinocerotis foſſiles delineare tempus permiſit. Itaque Ircutiae relictas in furno omni cura ſenſimque exſiccari iuſſi; quod quum diutiſſime continuata cura, propter exſudantem continuo pinguinoſitatem vix tandem aucto calore obtineri potuiſſet, caſu interea accidit, vt pars ſuperior cruris poſterioris, omnisque pes anticus in furno nimis ardenti amburerentur et ab iis, quibus ſiccandi cura erat demandata

abiecta fuerint. Caput vero et extremitas poſtici pedis integerrima atque ſiccatione vix mutata ad me peruenerunt, eoque ſtatu in priore adiectarum tabu-
Tab. XV. larum (Tab. XV.) accuratiſſime depicta exhibentur, Caput (fig. 1.) a latere dextro, pes vero poſticus a latere pariter (fig. 2.) et a facie antica (fig. 3.) inſpectus. Odor partium mollium, quae pinguedinis haud parum in medullis ſeruauerant, ſiccatione denuo tranſiit in foetorem tetrum carnium poſt aliquam putrefactionem ardore ſolis exſiccatarum, quem etiam nunc ſeruant.

Fig. 1. Animal, cuius hae partes fuerunt, non e maximis ſui generis neque aetate prouectum erat, vt teſtantur oſſa capitis magis, quam in craniis Rhinocerotum olim a me deſcriptis, diſcreta. Adultum tamen fuiſſe e comparatione magnitudinis cum iis ipſis craniis ſenioribus, quae in variis Sibiriae regionibus foſſilia reperta ſunt, apparet. Longitudo capitis tota a ſumma criſta occipitali ad extremum roſtri oſſei denudati aequat menſurae Pariſinae duos pedes, tresque pollices cum dimidio. Cornua cum capite adlata non fuerunt, prius forte abrupta et a flumine vel tranſeuntibus gentilibus, qui venationi operam nauant, ablata. Apparent autem cornu naſalis pariter atque frontalis euidentiſſima veſtigia: Area ſcilicet inaequalis, (fig. 1. *a.*) inter orbitas leviter protuberans, ouato-rhomboida fere forma corio deſtituta eſt, ſoloque incruſtata perioſteo tenui, quaſi corneo, creberrimisque villis erectis, corneis hiſpidato; aequat haec area longitudine 6″. 5‴. latitudine

tudine $5''$. anteriore angulo acutius terminata interiecto iſthmo ſemipollicari corii integri discreta eſt ab area tuberculoſa (fig. 1. *b*.) ouali in roſtro oſſeo conſpicua, cui cornu naſale innatum fuiſſe probat productio corii in fibras denſata atque extenuata corneas, ſupra poſticum marginem tuberis naſalis continuatas; huiusque tuberis longitudo $8''$. $6'''$ circiter explet. Tab. XV. Fig. 1.

Corium maximam partem capitis obueſtiens in ſicco ſtatu ſubſtantiae eſt tenaciſſimae, fibroſae, corio arte pro calceamentorum ſoleis durato ſimilis, extus fuſcum, intus vero ſubſtantia albida gaudens, ignique iniectum inſtar vulgaris corii foetidum. Circa os, vbi mollia carnoſaque labra fuerunt, maxime corruptum atque lacerum, oſſeas maxillarum extremitates reliquit nudas; paſſim etiam in latere ſiniſtro, quod aëris iniuriis diutius expoſitum forte fuit, corium hinc inde carioſum quaſi et a ſuperficie exeſum apparet. Sed maximam partem, a dextro praeſertim latere, quod depictum fuit, ſuperficiem ita ſeruauit integram, vt per totum illud latus, itemque in vertice inter orbitas crebri pori, ſeu vt rectius dicam lacunae minutae, quibus forte pili inſederunt, appareant. Imo in regione mandibulae, a latere dextro quibusdam locis copioſi adhuc ſuperſunt pili, faſciculatim naſcentes, maximam partem ad radicem fere vsque detriti, hinc inde vero ad duas tresue lineas longi, antrorſum atque deorſum proſtrati, rigiduli, gryſeo-cinerei, praeter vnicum alterumue pilum nigrum ſingulo faſci-

Tab. XV. Fig. 1. culo additum, paulo rigidiorem reliquis. — Mirum maxime quod et orbitas obtegens palpebrasque formans corii pars maximam partem incorrupta ſuperſit, ita vt palpebrarum aperturae, difformes licet, vix digitum admittentes, ipſumque circa palpebras corium in rugas ſubcirculares reſiccatum appareant; dum ipſa oculorum caua luto argilloſo ſeu humo animali repleta videntur, quale partem quoque cavitatis cranii occupauerat. Adſunt ſub corio fibrae tendineae copioſae ac ſatis firmae, muſculorum maxime temporalium atque maſſeterum reliquiae, et in faucibus fibrarum pterygoidearum faſciculi inſignes dependent.

Oſſa denudata flauo colore tincta ſunt, neque adeo ſolida, vt in aliis foſſilibus Rhinocerotum craniis. Praeſertim os ſcutiforme, quod cornu naſalis firmamentum praeſtat, cum ſubiecto fulcro oſſeo craſſiſſimo vomeri comparando nondum coaluit, ſed harmonia tuberculoſa totius plani, vt epiphyſes oſſium iuniorum ſolent, inarticulatur. Extremitates maxillarum neque dentium nec alueolorum veſtigium vllum habent, imo paſſim integumentorum reliquiis incruſtatae ſunt; primusque molaris a margine terminali mandibulae quadripollicari interuallo diſtat. Vlteriorem hic omitto maxillae atque dentium deſcriptionem, quae ſtatim e cranio Rhinocerotis in Dauria citeriore reperto praeſtabitur; adeoque tantum menſurae quaedam capitis, de quo agitur, addendae ſuperſunt;

Oculo-

Tab. XV. Fig. 1.

Oculorum aperturae ab apice roſtri oſſei diſtant - - - - - -	1'.	2''.	10'''.
Eaedem inter ſe per ephippium ad litt. *a*		11.	7.
Sed ducto per gulam filo - - -	2.	2.	6.
Circumferentia extremi roſtri pone rictum	2.	6.	–
Superior maxilla inferiorem ſupereminet	–	1.	1.
Latitudo extremitatis mandibulae -	–	3.	3.
Latitudo vomeris ſub oſſe cornigero roſtri	–	3.	3.
Circumferentia capitis pone tuber naſi -	3.	–	3.
Circumferentia trans ipſas orbitas areamque frontalem cornigeram - -	3.	3.	8.
Altitudo verticalis capitis in medio ephippii - - - - -	1.	1.	–
Axis transuerſa per orbitas - -	–	10.	6.
Eadem ad poſticam baſin zygomatum	–	11.	7.

Pes, qui mihi ſupereſt, *poſticus* ſiniſtri, ni fallor, cruris non ſolum corium maximam partem pilis eorumue radicibus inſtructum, integerrimum, tendines et ligamenta calcis robuſtiſſima conſeruauit, ſed corium etiam vsque ad flexuram genu integerrimum fuerat, inque locum muſculorum limus atra corii vacuum occupabat. Extremitas pedis in tres vngulas fiſſa eſt, quarum ſoli oſſei nuclei, conſeruato hinc inde perioſteo ſuperſunt, calcei vero cornei abſceſſerunt neque ſimul fuere adlati. Pili in multis locis corii adhuc ſuperſunt, ab vna ad tres lineas longi, ſatis rigidi, ſordide cinereo-palleſcentes; totumque pedem iisdem faſciculatim naſcentibus, deorſumque proſtratis obſitum fuiſſe e relictis detritorum reliquiis apparet. Tantam vero pilorum copiam, Fig. 2. 3.

Tab. XV. Fig. 2. 3. piam, quantam in hoc pede atque in deſcripto capite adfuiſſe apparet, in Rhinocerotibus, quos in Europam adductos noſtra vidit aetas, nunquam, ſi bene memini, obſeruata fuit; adeoque aliis diiudicandum relinquo nonne Rhinocerotem Lenenſem noſtrum in temperatiori forte Aſiae mediae climate natum fuiſſe ſit exiſtimandum. Rhinocerotes enim in ſyluoſis Indiae borealis dari relationibus innixus adfirmare poſſum, eosque ab iis, quos calidiſſima gignit Africa, piloſiore corio differre veroſimile eſt, vti alia quoque animalia calidioris climatis iisdem in temperata plaga natis glabriora ſolent eſſe. Menſuras pedis ſequentes addere viſum eſt:

Longitudo a calcaneo ad margines medios vngularum - - - - - -	1'.	3''.	2'''.
Vngulae mediae latitudo - - - - -	–	2.	$9\frac{1}{3}$.
Eiusdem altitudo - - - - - -	–	1.	5.
Latitudo vngulae interioris - - - - -	–	2.	4.
Altitudo eiusdem - - - - - -	–	1.	5.
Latitudo vngulae exterioris - - - -	–	2.	3.
Eiusdem altitudo - - - - - -	–	1.	4.
Circumferentia pedis ſupra bulbum -	1	–	2.
Circumferentia ad calcaneum - - -	1.	7.	–

Deſcriptae hic reliquiae Rhinocerotis in boreali terra per quot ſaecula ſepultae fuerint, iudicabunt facile qui perpendant illa nonniſi telluris noſtrae perturbatione tanta illuc peruenire potuiſſe, quantam antiquiſſima hominum chronica praeter vnicum Diluuium nullibi commemorant. Per tantum vero

aeui

aeui ſpatium ſub glaciali zona cadauer animalis quoad partes molles tenacioris compagis, (vti ſunt corium Rhinocerotis craſſiſſimum, tendinesque robuſtiſſimi), conſeruatum fuiſſe non videbitur mirum, ſi cogites etiam in regionibus Sibiriae multo auſtralioribus terram aeſtate tantum in ſuperficie regelari, quod ſolis GMELINI (in Itinerario Sibirico) teſtimoniis de regione Iacutenſi atque Argunenſi probaſſe ſufficeret, Ipſe per Dauriam Moſcua multo auſtraliorem profectus in campis intermontanis ad Ingodam et Ononem Iunio menſe ardentiſſima aeſtate ſolum in profunditate trium circiter ſpithamarum variis locis gelu adhuc rigere deprehendebam. Studioſus ſupra laudatus, qui Oceanum glacialem adiit, multis in locis circa Obdorienſe munimentum ſub latitudine boreali 67 circiter graduum ſitum, vlteriusque verſus Septentriones ſub finem aeſtatis, in illo climate vix ad exitum vsque Iulii perdurantis, explorans obſeruauit in locis altioribus, ſoli expoſitis, circa Obdorienſe oppidulum ſolum vlnari circiter profunditate, in depreſſioribus vix ad ſemiulnam degelari, inque conuallibus a ſole tutis per totam aeſtatem niues atque glaciem conſeruari; vlterius verſus Oceanum progreſſus vbi deſunt ſyluae, ſolum arenoſum, quod omnium primum reſolui calore ſolet, tantum ad ſemiulnam plus minus molleſcere, paludoſa loca vero vix ad ſpithamam miteſcere; imo vbi muſcoſa loca ſunt ſub caeſpite muſcoſo vel conglaciatam terram, vel ſi paludoſus locus ſit, nudam glaciem inuenit; quo fit vt Samojedae aeſtate per paludes arcti-

arcticae plagae Rhangiferis tuto vagentur, licet muſcoſa vligo ſaepe ad plures orgyas ante pedes incedentium quaſi fluctuet, Rangiferique pedibus nonniſi in cruſta glaciali firmamentum inueniant. Idem ſtudioſus hoc iterum anno ſecundum Ieniſeam per rigentes illas plagas iter carpens, ſub hac longitudine adhuc ingratiorem terram vix ad palmam transverſam emolliri retulit. Sed in Lenenſi tractu omnique orientali Sibiria ſub latitudine, qualem Wilui fluuius percurrit, clima multo rigidius eſſe, minusque profunde terram regelari quam in Sibiria citeriore in eadem a polo diſtantia conſtans ſatisque per obſeruationes confirmata lex, cui orientaliora loca huius regionis adſtricta ſunt, communisque peregrinatorum fama confirmat. — Itaque tantum hoc videtur ſtupendum, quomodo Rhinocerotis in auſtralioribus terris Aſiae nati cadauer integrum tanta vehementia atque celeritate per tot mille ſtadia in arcticas terras transuectum, ibique arena obrutum et conglaciatum fuerit, vt putrefactione partes molles interea non diffluxerint. Itaque cataſtrophes tremendae, integrique forte Pelagi Aſiam ab auſtro ad Boream violentiſſime transfluentis argumentum praebet Rhinocerotis noſtri cadauer, praeſertim ſi prius expoſita adiungas, quibus mixta per totam Sibiriam cum marinis corporibus variis in ipſo ſuperficiali terrae ſtrato oſſa animalium in Auſtrali ſolum climate viuentium indicaui. Neque forte alienum erit breuiter hic commemorare ſtatum catenae montium quae Aſiam totam ad orientalem vsque Oceanum

per-

percurrit, auſtralesque totius Sibiriae limites conſtituit, vbique nudis diſcerptisque rupibus horridae, quaſi laceratae, fluuiorum ad ſeptentrionem fluentium crebris alueis conuallibusque interruptae et omnino violenti quodam effectu in hunc ſtatum redactam, quem in Alpibus Europae, iugoque Vralenſi alia directione ab auſtro ad boream tendente non aeque obſeruamus. Sed mitto hypothetica, aliisque excolenda relinquo; hoc tantum moniturus exemplo Rhinocerotis noſtri plane ſubuerti ſententiam, quam in priore tractatione ipſe veroſimiliorem exiſtimaueram, quaque animalia, quorum membra in iſtis terris hodie leguntur, ibidem habitaſſe, ſed mutato vtcunque terrae climate periiſſe aſſeritur.

Addam nunc plura exempla memoranda oſſium ex auſtralioribus terris in Sibiriam ignoto nobis aeuo translatorum et nunc foſſilium. Nolo de Elephantinis oſſibus et ebore mamonteo, per orientalem praeſertim Sibiriam notiſſima merce, atque, vt ſupra dictum eſt, vix non vbique reperiundo fuſior eſſe. Sed commemorari merentur plures aliae *Rhinocerotum* partes, quae mihi per Sibiriam itineranti oblatae ſunt, addendaque deſcriptioni craniorum huius animalis, in priori tractatione exhibitae, quae nunc e perfectiori cum maxilla et dentibus ad me perlato ſpecimine ſupplere poſſum.

Humerum, quem propter magnitudinem, breuitatem atque craſſitiem ſummam nullius alterius

 ani-

animalis quam Rhinocerotis fuiſſe facile erat perſpicere, ipſe inueni in ripa quadam arenoſa Irtis fluvii, Elephantinis quoque oſſibus ſatis feraci, ad ipſas excubias Korjakouenſes paulo infra Iamyſchevenſe fortalitium ſitas. Dedi eius menſuras in *ſecundo Volumine* Itinerarii, adeoque plura hic addere ſuperſedebo, neque Icon neceſſaria videtur. — Iam ſupra breuiter adtigi molarem Rhinocerotis cum Elephantis oſſibus in ripa riui *Alei* per Barabenſem planitiem fluentis effoſſum, cuius etiam iconem Itinerario inſertam fuiſſe dixi. — Fractum porro Rhinocerotis cranium ex Obenſi regione per ſtudioſum Baſil. Sujef accepi, quod in colle arenoſo deſertorum hyperboreorum verſus Oceanum glacialem repertum fuiſſe affirmabatur. — Simile cranium ad Lenam olim repertum adſeruabatur Ircutiae, mihique occaſione ſupra deſcripti capitis traditum fuit. — Denique integerrimum omnium, quae vidi, Rhinocerotis cranium in regione transbaikalenſi oblatum eſt, quod ad fluuium *Tſchikoi*, qui Selennam influit, in regione campeſtri quidem, ſed vndique montibus praealtis, rupeſtribus cincta, ripae ruina in conſpectum prodiiſſe atque pro Draconis capite miraculoſo a plebe habitum fuiſſe ſcio. Propter dentes quibus inſtructum eſt, adiectamque maxillam, quae partes cranii prius a me deſcriptis deerant, icones varias ex illo confici curaui, quibus ſtructura tota oſſium capitis dentiumque Rhinocerotis perfecte illuſtrabitur (Tab. XVI.).

Eſt

Eſt hoc cranium e maximis ſui generis, totaque longitudine a ſummo criſtae occipitalis ad extremum roſtri oſſei aequat duos pedes et ſeptem pollices menſurae Pariſinae. E ſtatu oſſium robuſtiſſimo eorumque per totum caput coalitione perfecta et aſperitatibus tuberum et apophyſium maxime prominulis apparet eſſe cranium animalis aetate maxime profecti. Mandibula menſuras ſequentes dedit: Tab. XVI.

Ab angulo baſeos ad marginem inciſorum	1′.	7″.	10‴.
Ramorum altitudo ad condylos - - -		8.	6.
Latitudo ramorum ad baſin - - - -		5.	7.
Diſtantia inter angulos baſeos - - - -		6.	4.
Condylorum diameter longus - - - -		3.	7.
Latitudo apicis ſeu margo inciſorius - -		3.	1.
Molarium poſtremorum diſtantia ab inuicem -		3.	7.
Longitudo omnium alueolorum molarium -		7.	8.
Diſtantia molaris primi a margine inciſorio -		3.	0.
(Longitudo reſpondens omnium molarium in maxilla ſuperiore) - - - - - -		7.	9.
(Eorumque diſtantia inter ſe ſubaequabilis) -		3.	-.

Molares ſuperioris maxillae (fig. 1. 2.) non ſolum magnitudine ſunt inſignes, ſed etiam ſtructuram habent, qualem adhuc in quadrupede nulla deſcriptam eſſe ſcio. Omnes ſcilicet coronam ſupra habent planam inſculptam cauernis profundis, ſenſim coarctatis, margine cinctis prominulo, transuerſim Fig. 1. 2.

Tab. XVI. ſubtiliſſime ſtriato, e ſubſtantia vitrea facto; qualis et totam coronae aream maſticatoriam fimbriae inſtar cingit. *Poſticus* molarium (fig. 1. *a*) omnium eſt craſſiſſimus atque radice poſterius maxima, ſolida, infimo quaſi laciniata, anterius vero minore extrorſum vergente firmiſſime alueo incuneatus haeret. Diameter baſeos transuerſus vsque ad 2$''$. 1$'''$ longitudinalis exterius 2$''$ aequat; ſed corona furſum coarctatur, neque transuerſa latitudine vltra 1$''$. 5$\frac{1}{2}'''$ diametroque longitudinali 1$''$. 7$'''$ ſuperat. Irregulariter quadrangula eſt, cauernasque verſus marginem poſteriorem duas habet ſubcirculares, quarum interior minor; anterius inſculpta tertia cauerna oblonga eſt, perque medium coronae obliqua introrſum atque retrorſum effunditur.

Molaris huic proximus (fig. 2. *b*.) coronam habet omnium latiſſimam, magis regulariter quadrangulam, paululum excauatam, baſi vero minus craſſus eſt priore et radicibus magis diuaricatis firmatur, interiore quidem breuiore, craſſa, quadrilaciniata, exteriusque binis transuerſim compreſſis, latiuſculis. Coronae diameter longitudinalis 1$''$. 9$'''$ transuerſus anticae 1$''$. 10$\frac{1}{2}'''$ explet. Cauernas habet item ſubrotundas duas, anterioremque oblongam, obliquam, non vero effuſam, ſed cum exteriore cauernarum circularium confluentem.

Tertius molaris (fig. 2. *c*.) radicibus antecedenti fere ſimilis, coronam habet magis depreſſam, an-

tror-

trorſum magis inclinatam, planiorem, cuiusque diameter transuerſus maior $1''$. $8\frac{1}{2}'''$ dum longitudinalis vix $1''$. $4'''$ excedit. Cauernae huic minores, vna poſterius oualis, altera oblonga, ſubflexuoſa, cum adiacente exterius paruula ſubcoalita.

Quartus molaris (fig. 2. *d.*) radice vix differt, tertioque coronae circumſcriptione ſimilis eſt, verum paulo minor eoque diuerſus quod cauernam habeat tantum geminam alteram lunari fere circumſcriptione reflexam, cum minore altera ſubconfluentem. — *Quintum* adfuiſſe dentem prioribus multo minorem, triplici radice inſtructum et ſubtriangularem e forma alueolorum apparet; is vero ab vtroque latere in cranio noſtro deficit.

Inferioris maxillae (fig. 3. 4.) molares longe diuerſam formam exhibent. Multo ſcilicet anguſtiores habent planioresque coronas, neque cauernis exſculptas, ſed ſolidas, ſoloque limbo vitreo ambeunte exornatas. — *Poſtremus* horum (fig. 3. *aa.*) pariter maximus quidem eſt, ſed quoad coronam magis coarctatus. Diameter eius longitudinalis $1''$ $9\frac{1}{2}'''$ transuerſus ad baſin $1''$. $2\frac{1}{2}'''$ ſed quoad aream coronae vix vltra $1''$. aequat; forma ſingularis, duobus interius ſinubus exciſa ſigma (Σ) graecorum ruditer referens. Fig. 3. 4.

Proximus (fig. 3. *bb.*) diametrum habet longitudinalem $1''$. $7'''$ transuerſalem ad ſummum $1''$. $1\frac{1}{2}'''$;

coro-

Tab. XVI. Fig. 3. 4. coronae area plana, oblongoquadrata, vnico interius ſinu exciſa.

Tertii (fig. 3. *cc.*) corona ſupra integerrima, plana, quadrata, diametrum transuerſalem vix pollicari maiorem, longitudinem 1''. 2$\frac{1}{2}$''' habet. Eique ſimillimus quartus (fig. 3. *dd.*) vtramque diametrum habet aequalem, pollicari paulo minorem. — Deſunt in maxilla inferiore dentes duo antici, quorum *vnus* quarto ſimilis et aequalis, *prior* vero omnium minimus fuiſſe videtur. Omnium inferorum molarium radix fere duplex tantum eſt.

Fig. 1. 3. In apice maxillae inferioris ſeu ipſo margine, vt ita dicam, inciſorio dentes quidem nulli adſunt; veruntamen apparent veſtigia oblitterata quatuor (fig. 3. *e e.*) alueolorum minuſculorum, aequidiſtantium, e quibus exteriores duo obſoletiſſimi, ſed intermedii ſatis inſignibus foſſis denotati ſunt. In ſuperiore quoque maxilla huius cranii ad anticum palati terminum vtrinque (fig. 1. *e e.*) tuber oſſeum adſtat obſoletiſſima foſſa notatum, quae alueoli quandam praeſentis veſtigium refert. An itaque certa aetate Rhinoceroti dentes primores, ſaltem inferius, enaſcuntur, haud diu duraturi? Indeque forte disſenſus auctorum qui Rhinocerotis dentes deſcribunt?

Adlatis omnibus, quae in deſcriptione cranii Rhinocerotis ſupplenda reſtabant, tranſeo ad deſcriptionem

ptionem *Craniorum foſſilium* diuerſi generis; quae tanto magis memoriae digna viſa ſunt, quia quadrupes, ad quod pertinuerunt, ad hanc vsque diem a Zoologis nondum rite deſcripta eſt.

Duo accepi, de quibus loquor crania, quorum perfectius triplex icon Tabulae noſtrae XVII. a fronte (fig. 1.), a latere (fig. 2.), et a baſi (fig. 3.) conſpectum exprimit. Hoc quidem vltimum Bereſouam oppidum, quod ad Obum ſitum eſt, e terris hyperboreis (*Tundra*) adlatum fuit; alterum ſaepius nominatus *Studioſus* ab Oceano rediens aduerſo flumine Obo ipſe inuenit in ripa ſeptuagenis circiter ſtadiis Ruſſicis (10 milliaribus) ſupra Obdorienſe munimentum. Animal cui debentur, ſpecies eſt Tauri feri, quae connatis in frontem cornibus conuenit cum Bubalo capenſi cuius cornua *Illuſtriſſimus* BVFFONVS (*) dedit, vel potius cum Biſonte Americano (**), cuius caput olim ſiccatum in *Muſeo Brittannico* vidi, cornibus ſimiliter baſi ſupra frontem diffuſis, ſecundum latera capitis inflexis, qualia in noſtris craniis fuiſſe apparet. Nollem tamen pro certo affirmare ad poſteriorem crania iſta referenda eſſe; poſſent alii forte affini, ſed Indicae origi- Tab.XVII

(*) Hiſtoire naturelle *Edit. minor, Vol. 23 tab. 41. p. 252.*

(**) Hiſt. de la nouvelle France par le P. Charlevoix *tom. III. p. 132.*

Tab.XVII originis Biſonti deberi, qui cum multis aliis interioris Aſiae quadrupedibus hucusque incognitus manſiſſe potuit. Itaque ſerioribus obſeruationibus determinandum relinquo cuiusnam animalis vere fuerint quae deſcribo crania.

Compages eorundem ſolidiſſima eſt, craſſiſſimisque conſtat oſſibus, vt vix vlli quadrupedi tanta cranii craſſities obſeruetur, etiam Rhinocerote non excepto. Maximeque neceſſaria fuit ollae nobiliſſima ſenſus organa defendentis ſoliditas in animali, quod ipſo vertice, ipſa cerebri lorica omnem furentis irae vim exſerere Natura deſtinauit. Ipſa *olla* cerebri exterius ruditer eſt quadrilatera; magisque adhuc tetraëdra forma *oſſium roſtri* ſeu maxillae ſuperioris, cuius parietes laterales in cranio foſſili ſuperſtites (fig. 1. 2. *aa.*) planiuſculi, et ad frontem planam, palatumque verticales fere ſunt. — Ab orbitis ad occipitalem vsque criſtam verticem totum occupant *baſes cornuum*, cranio inolitae (fig. 1. *c c.*), intermedia foſſa vel ſemicanali vix digiti minoris capaci diremtae, poſticeque ipſam criſtam occipitalem ſupereminentes (fig. 2. *c.*). Sunt hae baſes plana oſſea, digiti transuerſi craſſitie, bregmata tota incruſtantia, ſubtriangularia, totaque cauernis celluloſis et prominentiis exaſperata, vt corneae ſubſtantiae continuatione craſſa loricata fuiſſe appareat. Interius haec plana margine terminantur rectiſſimo, arguto, exterius contracta continuantur in *proceſſus*

oſſeos

oſſeos robuſtiſſimos (fig. 1 - 3. *dd.*) depreſſos, coni- Tab.XVII
cos, fere verticaliter ſecundum tempora deflexos, ſulcis longitudinalibus ruditer porcatos et in foſſili cranio apice praefractos, qui *cornuum* vaginis inhaeſerunt. — *Orbitae* (fig. 1 - 3. *ee.*) a baſi cornuum diſtinctae, fornices ſunt oſſei robuſtiſſimi, maxime prominentes, antice confirmati tubere oſſeo, quo foramen atque canalis arterioſus ſupraciliaris defenduntur. — Contra vero *zygomata* (*ff.*) admodum ſunt reducta et exigua, quippe quae ſub cornuum deflexis proceſſibus tuta latent. — Oſſa naſi, atque maxillae ſuperioris extremitas, cum parte alueolorum molarium deſunt etiam in ſpecimine foſſili, perfectiori, quod accepimus, Apparet autem molares vtrinque ſex adfuiſſe, quorum in vno cranio ſuperſunt poſticus maximus et aliquot e reliquis antrorſum ſenſim minoribus. — Habent hi molares coronam valde anguloſam, inque media ſuperficie cavernas coecas multiformes, iis analogas, quas in Rhinocerote deſcripſi, ſed magis anguloſas, limboque lamellae vitreae non ſtriato ſed laeuiſſimo marginatas.

Cranium totum per omnes partes craſſiſſimam habet *ſubſtantiam*, ſuturis quoque craſſis contignatum. Praeſertim cauerna cerebri, quae perexigua eſt, craſſiſſimo ſolidoque oſſe conſtat, deſtituta quoque *foraminibus* in baſi *laceris* dictis, quae vix non omnibus data ſunt animalibus, quarumque loco ma-

Tab.XVII gis cylindrici et mediocres adſunt canales; quemadmodum et reliqua arterioſa cranii foramina ſolito minora ſunt. Eaque caui atque canalium anguſtia vt ſoliditati conſuleret Natura cerebrum huic animali dedit exiguum, atque vti forma cauernae teſtatur, (ſex fere pollices longa, ſed vix vltra $2''. 6'''.$ diametro dilatata) ferme cylindraceum. Hinc et foramen occipitale pro transmittenda exiliore medulla pariter proportione anguſtius eſſe potuit atque lumine vix pollicari hiat, ſimul ſubſtantia oſſea pollicem fere craſſa circumcirca firmatum.

Addo menſuras nonnullas, filo exploratas e cranio perfectiore:

Longitudo totius cranii a margine poſtico baſeos cornuum ad anticum finem alveolorum molarium - - - - -	$1'. 2''. 4'''.$
Diameter longitudinalis baſeos cornuum	0. 6. 8.
Latitudo earundem - - - - - -	0. 2. 11.
Earundem diſtantia a ſutura oſſium naſi - - - - - -	0. 2. $6\frac{1}{2}$.
Exceſſus earundem vltra occiput - -	0. 0. 6.
Longitudo proceſſus cornuum - -	0. 5. 9.
Eorundem latitudo baſi - - - - -	0. 3. 8.
Atque craſſities - - - - - - -	0. 2. 6.

Orbi-

Orbitarum fornix poſterius a cranio prominet - - - - - -	0.	2.	2.
Anterius - - - - - -	0.	1.	6.
Latitudo ſummá cranii inter orbitarum margines - - - - -	0.	9.	5.
Diameter transuerſus occipitis prope baſes cornuum - - - - - -	0.	5.	9.
Inferius ad tubera mammillaria - -	0.	7.	2.
Diameter verticalis - - - -	0.	5.	0.
Diameter transuerſus roſtri ad baſin -	0.	5.	4.
Latitudo oſſium roſtri lateralium - -	0.	4.	6.
Latitudo palati inter molares - - -	0.	2.	11.
Longitudo zygomatum per ſubtenſam - - - - - -	0.	2.	5.
Alueoli molarium omnes ſimul - -	0.	5.	1.
Craſſities ſubſtantiae oſſeae in fronte -	0.	0.	$6\frac{1}{2}$.
In oſſibus roſtri lateralibus - - -	0.	0.	5.
In fornice orbitarum - - - - -	0.	0.	8.
Sed vbi tuber ſupraciliare - - -	0.	1.	3.

Eſſent adhuc quaedam dicenda de Bubalorum maximis craniis, qualia iam in prioribus deſcripſi, quorumque aliqua durante itinere, quod me tenet, in auſtralioribus Imperii Ruthenici, ad Iaikum et

Irtin inuenta, vnum vero e maxime borealibus ad Obum fluuium adlatum obtinui. Sed quum de iis in Itinerario mentionem factam inuenient Lectores, nollem heic repetitione taedioſus eſſe, deque *Obſervatis* hactenus *circa reliquias quadrupedum exoticorum in Aſia boreali repertis* finem facio.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DISQVI-

DISQVISITIO DE INVESTIGANDA PARALLAXI SOLIS, EX TRANSITV VENERIS PER SOLEM ANNO 1769.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

1.

Quamquam omnes qui ex nouiſſimo tranſitu Veneris per Solem, Parallaxin Solis definire ſuſceperunt, de eo inter ſe conſentiant, quod valor Parallaxeos pro tempore tranſitus 8 minuta ſecunda excedat, contra vero infra 9 ſecunda ſubſiſtat; tamen ſi de exactiori menſura huius Parallaxeos quaeſtio ſit, tantam inter varios Auctores reperimus diſcrepantiam, vt in eam facile quis induci poſſet opinionem, de hac parallaxi vix cum praeciſione ſemiſſis ſecundi aliquid certi ſtatui poſſe. Quemadmodum enim nonnulli, Parallaxin pro tempore tranſitus 8, 3 ſecundorum fuiſſe perhibent, ita ex aduerſo alii eam vsque ad 8, 75 ſecunda augere haud dubitant, inter quas determinationes, omnino maior

 eſt

eſt diſſenſus, quam vt hoc in negotio admitti poſſe videatur. Operae igitur pretium eſſe duxi, hac Diſſertatione expendere, vtrum et quousque de vera quantitate Parallaxeos Solis, vel aliquid certi, vel probabiliter ſaltem definiri poteſt; tum vero etiam rationes explicare ex quibus factum eſt, vt varii Auctores pro Parallaxi inuenerint valores a veritate haud parum diſcrepantes, ſimulque iſtas cautiones perſpicue definire, quibus opus eſt, ne in hac inueſtigatione vllae committantur fallaciae. Quibus praemonitis, concluſiones adferam, quas ex calculis omni rigore et exactitudine inſtitutis, pro Parallaxi Solis deduxi, quae concluſiones ſi cum iis, quas alii Auctores ſe inueniſſe affirmant, comparentur; haud obſcurum euadet, quid de vera quantitate Parallaxeos Solis iudicandum ſit.

2. Quoniam tota inueſtigatio Parallaxeos Solis obſeruationibus contactuum Veneris cum Sole innititur, atque in his obſeruationibus aliquales errores ineſſe poſſunt, facile intelligitur certos praeſcribi limites, intra quos non niſi cum maiori vel minori probabilitate de valore Parallaxeos aliquid definiri poteſt. Quemadmodum enim eae concluſiones Parallaxin ſpectantes omnino pro certis et indubitatis haberi merentur, quibus in dubium vocatis, obſeruationibus tanti tribuendi ſunt errores, qui omni veriſimilitudine deſtituuntur et quos pro abſurdis tuto habere licet; ita eae concluſiones tantum vt probabiles ſpectandae ſunt, quibus negatis, obſeruationibus maiores non inferuntur errores, quam quos

ipſis

ipſis ineſſe poſſe, experientiae nequaquam repugnet. Perſpicuum igitur hinc euadit, pro certiſſima et indubitata veritate habendum eſſe, quod Parallaxis Solis decem minutis ſecundis multo minor ſit, quippe quum ex valore Parallaxeos decem ſecundorum, ſequeretur obſeruationibus errores ineſſe, qui vsque ad duo, tria immo quatuor minuta prima increſcerent, quod nemine contradicente pro maximo abſurdo habere licebit. Simili modo etiam pro certo affirmare poſſumus, Parallaxin Solis certe maiorem eſſe 8″, contra vero minorem 9″, quum ex vtraque ſuppoſitione Parallaxeos ſiue 8, ſiue 9 ſecundorum, aliae atque aliae obſeruationes fide digniſſimae in ſuſpicionem venirent errorum vsque ad minutum primum et vltra aſſurgentium, quod etiam omni deſtituitur veriſimilitudine. Immo pro certo etiam aſſerere audemus, Parallaxin Solis tempore tranſitus (*a*) inter hos limites 8″, 3 et 8″, 7 neceſſario contineri, quum alterutro horum valorum pro vero aſſumto, obſeruationibus quae caeteroquin omnes veritatis characteres prae ſe ferunt, 40 vel 30 ſecundorum errores eſſent tribuendi. Infra autem fuſius explicabimus, vnde iſti characteres ſunt deducendi ex quibus de obſeruationum probabilitate iudi-

Hhhh 2 cium

(*a*) Neceſſum eſt vt hoc loco moneam, quod vbicunque in hac Diſſertatione voce Parallaxeos ſimpliciter vtar, ſermo ſit de Parallaxi aequatorea Solis tempore tranſitus; Parallaxin autem Solis diſtantiae mediae conuenientem, nomine Parallaxeos mediae indigitabo.

cium inſtitui oportet. Sin autem nunc limites pro valore Parallaxeos magis coarctentur, concluſiones hunc valorem ſpectantes non amplius pro indubitatis haberi merentur, ſed maiori tantum vel minori probabilitate gaudebunt. Sic etiamſi mihi quidem valde probabile videatur, Parallaxin Solis excedere 8″, 4 et aliquanto minorem eſſe 8″, 6, hanc tamen concluſionem pro indubitata pronuntiare vix auſim, et ſi limites Parallaxeos adhuc magis reſtringantur ex. gr. ad 8″, 45 et 8″, 55, omnino perſuaſus ſum vtrumque horum valorum admitti poſſe, obſeruationibus etiam melioris notae non multum repugnantibus. Verum igitur valorem Parallaxeos Solis, pro iis quibus obſeruationes laborant erroribus, vix cum maiori praeciſione quam decimae partis ſecundi definire poſſe exiſtimo; ex quo circa inueſtigationem Parallaxeos hanc regulam praeſcribendam eſſe cenſeo, vt is valor pro Parallaxi maxime probabilis habeatur, qui obſeruationibus ſaltem melioris notae optime ſatisfacit.

3. Quod Auctores de quantitate Parallaxeos Solis in tot diuerſas abierint ſententias, ex duplici imprimis ratione factum eſſe credimus; *primum* quod effectus Parallacticos adhibuerint non vsquequaque exactos, tum vero *ſecundo* quod de obſeruationum praeſtantia et exactitudine diuerſimode iudicauerint. Quod igitur priorem errorum cauſſam attinet, tenendum eſt etiam minutiores quasdam aberrationes hac in disquiſitione euitandas eſſe, vbi vnusquisque Auctor ſummam exactitudinem et praeciſionem ſuis calcu-

calculis vindicare videtur. Quamobrem nunc quidem breuiter explicabimus, quid in Methodis ab Aſtronomis receptis pro computandis effectibus Parallaxeos iure meritoque deſiderari poſſit. *Primum* igitur obſeruo in his Methodis aberrationem quandam inde eſſe metuendam, quod pro computo Parallaxeos nulla plane haberi ſoleat ratio verae figurae Telluris. Si enim P Z z deſignet meridianum alicuius loci, in quo P ſit Polus aequatoris, Z zenith apparens ſpectatoris, z punctum vbi recta per centrum telluris et locum ſpectatoris ducta meridiano occurrit, atque ponatur eſſe C locus Solis, V locus Veneris verus et D locus eius apparens; perſpicuum omnino eſt effectum Parallaxeos computari debere, non quemadmodum vulgo fit, ſecundum arcum circuli maximi Z V *d*, ſed ſecundum arcum z V D. Si ſcilicet ducta concipiatur linea C V, facile patebit angulum C V D pluribus minutis primis differre poſſe ab angulo C V *d*, vnde ſi poſterior loco prioris adhibeatur, errores inde haud contemnendi emergere poſſunt, quando effectus Parallaxeos ſecundum directionem V C exquiri debet, vt taceam ipſam quantitatem lineae V D ſaepe multo aliam prodire pro hypotheſi figurae Telluris ſphaeroidicae, quam ſi Tellus conciperetur eſſe perfecte ſphaerica. Tab. XVIII. Fig. 1.

4. Qualiſcunque autem ſit aberratio hinc oriunda, aliquibus tamen in caſibus multo maior fit quae II^do^ inde prodit, quod arcus circulorum maximorum z V A et z C per centra Solis et Veneris ex Fig. 2.

punćto z dućti, vt inter ſe paralleli conſiderentur. Etiamſi enim plurimum eueniat, vt angulus A V C ab angulo V C z non niſi aliquot minutis primis differat, dantur tamen omnino caſus, quibus differentia horum angulorum ad plures gradus vsque increſcit, quemadmodum factum eſſe nouimus pro obſeruationibus contactuum Veneris in ingreſſu St. Ioſephi in California inſtitutis, pro quibus ſcilicet angulus A V C fere tribus gradibus angulo V C z maior reperitur, quae differentia omnino maior eſt, quam vt eam tuto negligere liceat. Deinde III^{tio} perpendendum eſt angulum A V C adhuc nouam admittere correctionem, quo ad angulum D V C reducitur. Sit enim V A Parallaxis diſtantiae Veneris a puncto z, C O Parallaxis Solis, ductaque concipiatur A D parallela et aequalis ipſi C O et iungatur V D. Tum facile quidem patet verum effectum Parallaxeos pro loco Veneris immutando, ſtatui debere aequalem lineae V D, id eſt ſi locus Solis per Parallaxin nullam mutationem ſubire concipiatur, intelligendum eſt locum Veneris verum V ob Parallaxin mutari in locum apparentem D. Angulus autem D V C qui aequalis eſt ſummae angulorum A V C et D V A, nunc multo magis diſcrepabit ab angulo V C z. Caeterum obſeruari meretur, quod quum ſit

$$DVA : DAV :: DA : VD :: DA : AV - DA :: 2 : 5$$

proxime, tum vero quoque habeatur ang. $DAV = VzC$ ſatis prope, eſſe ang. $DVC = VCz + \frac{2}{5} VzC$ ſaltem cum

cum praeciſione aliquot minutorum ſecundorum, vnicum ſi excipiamus caſum ſupra commemoratum obſeruationis in California factae, pro quo angulum A V C exactius computare licebit. Aberratio vero iſta pro valore anguli D V C non ſolum tum inſignis eſt momenti, quando angulus A V C multum ab angulo V C *z* differt, ſed etiam iis in caſibus, vbi angulus D V C proxime ad rectum accedit; quantilla enim fuerit aberratio, quae tum committitur in valore anguli D V C aſſignando, illa maximum habere poteſt influxum, quando effectus Parallaxeos ſecundum directionem V C determinari debet; quippe quum reductio lineae V D ad effectum ſecundum V C, potiſſimum pendeat ex coſinu anguli D V C, qui pro caſu quo D V C a recto non multum diſcrepat, ex leui mutatione ipſius anguli, inſigniter immutari poteſt. Huiusmodi autem obtinent caſus pro contactibus in egreſſu ad Sinum Hudſonis obſeruatis, erat enim angulus D V C pro his obſeruationibus a 90° non multum diſcrepans. Propter has igitur iam allatas rationes factum eſſe cenſemus, quod Cel. D. *de la Lande* pro contactu interno in ingreſſu Californiae effectum Parallaxeos in tempore inuenerit + 18″, 1, quem invenire debuiſſet + 16″, 4, contra autem pro contactu interno circa egreſſum ad Sinum Hudſonis eum inuenerit + 37″, 0, qui tamen ſub hypotheſi Elementorum a Cel. *de la Lande* aſſumtorum, eſſe deberet + 38″, 9. Fateor quidem hos errores eſſe exiguos, neque valores Parallaxeos inde multum

reddi

reddi dubios, ſimul tamen concedendum eſſe exiſtimo, quod ſi plures huiusmodi errores accumulentur, fieri poſſe vt valor medius pro Parallaxi inuentus ſaltem $\frac{1}{20}$ parte minuti ſecundi a veritate diſcrepet. In genere autem tenendum eſt, huiusmodi calculos ita inſtituendos eſſe, vt quantum fieri poſſit, ſummam prae ſe ferant exactitudinem, ne ſcilicet propter defectum Theoriae et Methodorum concluſiones reddantur dubiae, praeprimis vbi ob incertitudinem obſeruationum haud leuibus erroribus euadere poſſunt obnoxiae.

Tab.XVIII Fig. 2. 5. Quo autem melius intelligantur, quae de valore anguli D V C rite determinando ſupra monuimus, eadem heic vno obtutu Lectoribus ob oculos ponere iuuabit. Si igitur z fuerit punctum vbi recta per centrum telluris et locum obſeruatoris ducta meridiano occurrit, C locus Solis verus, et V locus Veneris, ductique concipiantur arcus circulorum maximorum z C O, z V A, capiatur C O aequalis effectui Parallaxeos pro Sole et V A ſimili effectui pro Venere, tum vero per A ducta concipiatur A D parallela et aequalis ipſi C O et iungatur D V. Quod ſi nunc locus Solis per Parallaxin non mutari concipiatur, facile quoque perſpicitur ob effectum Parallaxeos diſtantiam apparentem centrorum Solis et Veneris eſſe aequalem ipſi D C, ideoque effectum Parallaxeos pro diſtantia centrorum aequari ipſi $CV - CD = CV - AO$. Ex iis autem quae ſupra attulimus, patet angulum $DVC = DVA + AVC$ fore quam proxime aequalem

qualem V C $z + \frac{7}{5}$ V z C. Quodſi nunc Methodus communiter recepta pro inueniendo angulo D V C, cum hac iam expoſita conferatur; facile patet in valorem iſtius anguli inſignes errores irrepere poſſe; ſi calculi ad praeſcriptum Methodi vulgaris inſtituantur. Praeterquam enim quod in Methodo vulgari loco puncti z ipſum zenith vſurpari ſoleat, circuli z C O, z V A vt inter ſe paralleli ſpectari ſolent, tum vero denique anguli D V A nullus plane habetur reſpectus.

6. *Altera* autem eaque potior ratio inſignis diſcrepantiae, quae inter Auctorum ſententias de Parallaxi inuenitur, deducenda eſt ex diuerſitate iudiciorum, quae de obſeruationum exactitudine et praeſtantia ferri ſolent. Quum ſcilicet durationes totius tranſitus a Rev. P. *Hell* in Wardhus et Cel. D. *Planman* Caianeburgi obſeruatae plus iuſto inter ſe diſcrepent; Auctores vnam vel alteram harum obſeruationum in fauorem alterius, erroris condemnandam eſſe exiſtimarunt, licet valde quidem probabile ſit in vtraque aliqualem latere errorem. Verum enimuero inſtituti mei ratio nunc quidem non poſtulat, vt hoc ipſum heic exacte demonſtrem, ſiquidem de errore harum obſeruationum infra fuſius agendi dabitur occaſio; quare characteres tantum quosdam exponere conducet, ex quibus de praeſtantia obſeruationum ſaltem probabiliter iudicare licet. *Primus* igitur character veritatis obſeruationum merito habetur, quod momenta a pluribus in eodem loco obſeruatoribus, pro contactibus aſſignata, non

 multum

multum inter ſe diſcrepent; quamuis enim aliqualis diſſenſus ex diuerſo effectu tuborum et diuerſo acumine viſus oriundus omnino admitti debeat, tamen ſi is vltra 15 aut 20 ſecunda aſſurgit, ipſam obſeruationum probabilitatem non poteſt non multum infringere. *Secundus* character veritatis inde deducitur, quod ſi alicubi contactus tam internus, quam externus imprimis pro egreſſu fuerit obſeruatus, mora inter hos contactus ex obſeruationibus talis prodeat, quae conciliari poſſit cum menſura diametri Veneris, quam quidem 57″, 2 eſſe probabiliter ſtatuere licet, vel ſaltem nou niſi duabus decimis partibus ſecundi maiorem. *Tertium* characterem veritatis in eo merito conſtituimus, quod obſeruationes in variis locis factae, pro quibus effectus parallactici non multum diuerſi ſunt, easdem proxime praebeant differentias meridianorum inter haec loca, quae iam ex aliis obſeruationibus ſtabilitae ſunt. Quum igitur obſeruationes Grenouici, Pariſiis, Stockholmiae et Vpſaliae inter ſe comparatae, ſatis bene conſentiant et de differentiis meridianorum inter haec loca nullum ſit dubium, tuto ſtatuere licet, reliquas obſeruationes pro contactibus internis in ingreſſu in variis locis Europeicis inſtitutas, eatenus pro exactis habendas eſſe, quateuus cum medio inter obſeruationes in locis iam nominatis capto bene conſentiunt. Pro contactu interno in ingreſſu aeque certum veritatis criterium non quidem ſuppetit, quum pro Petropoli, qui vnicus eſt locus ex iis vbi egreſſus fuit obſeruatus, cuius Longitudo pro

exacte

exacte cognita haberi poteſt, ipſae obſeruationes contactus interni admodum ſint dubiae; verum tamen quum obſeruationes pro contactu interno Wardhuſiis, Orenburgi et in Gurjef inſtitutae, ſatis bene inter ſe conſentiant et dubium circa differentias meridianorum inter haec loca vix quinque ſecunda exſuperare poſſit; etiam probabiliter ſtatuere fas eſt, obſeruationes quae a medio inter prius nominatas ſumto multum diſcrepant pro ſuſpectis merito eſſe habendas, et ſimile omnino iudicium ferre licet de momentis pro contactu externo, ſi eorum comparatione facta, cum obſeruationibus huius contactus in Wardhus, Gurjef et Orenburg inſtitutis, ab his multum reperiantur diſcrepantes.

7. Antequam concluſiones quas pro Parallaxi Solis ex tranſitu Veneris deduxi, expoſiturus ſum; neceſſum omnino eſt, vt Methodum quam hoc in negotio mihi ſequendam propoſui, vberius explicem. Inter varias autem Methodos, quibus ex obſeruatione tranſitus Veneris inueſtigationem Parallaxeos Solis ſuſcipere licet, pro praeſenti quidem caſu tutiſſima habenda eſt ea, qua durationes totius tranſitus in variis locis obſeruatae inter ſe comparantur; quippe quum haec Methodus exactam Longitudinem locorum vbi obſeruationes factae ſunt, non omnino praerequirat. Hoc igitur modo ſi durationes totius tranſitus in America obſeruatae tam inter ſe, quam cum iis, quae Caianeburgi, Wardhuſiis et in Kola obſeruatae ſunt, comparentur, certiſſimae obtineri poſſunt concluſiones pro valore Parallaxeos.

laxeos. Praeter hanc autem Methodum etiam alia cum vſu adhiberi poteſt, in eo conſiſtens, quod duratio inter contactum internum pro ingreſſu alicubi in Europa obſeruatum ſimilemque contactum pro egreſſu in alio quodam loco cognito ſiue Europae ſeu Aſiae viſum, comparetur cum obſeruationibus totius tranſitus in America factis. Quamuis enim concluſiones hinc deductae pro aeque certis haberi non debent, ac illae quae ex durationibus in iisdem locis obſeruatis deducuntur; quum praeter errores obſeruationum, nunc quoque aberrationes circa differentias meridianorum negotium turbare queant; quum tamen pro huiusmodi comparationibus a me inſtitutis, loca vbi contactus internus in egreſſu fuit obſeruatus, ſatis exacte ſint determinata, cum praeciſione ſaltem quinque aut decem ſecundorum, de Longitudine autem locorum vbi contactus internus in ingreſſu fuit obſeruatus, Pariſiorum ſcilicet, Grenouici, Stockholmiae et Vpſaliae vix vllum ſit dubium et praeterea obſeruationes in his locis factae egregie inter ſe conſentiant; certo perſuaſus ſum valores Parallaxeos ex his quoque comparationibus elicitos non multum a veritate recedere poſſe. Quicquid tamen ſit, eos tantum ad concluſiones prioris generis confirmandas et ſtabiliendas adducere volui. Caeterum in genere quidem hanc mihi praeſcripſi legem, vt obſeruationes tantum contactuum internorum, quoad fieri liceret in vſum vocarem; verum quum Caianeburgi contactus internus pro egreſſu obſeruari non potuit et aequum mihi viſum non ſit,

obſer-

obſeruationem Caianeburgenſem e numero comparationum penitus excludere; pro hoc loco durationem inter contactum internum pro ingreſſu et externum pro egreſſu cum durationibus inter contactus internos in America obſeruatos comparaui; tum vero quia obſeruationi in Wardhus factae, vbi pro egreſſu vterque contactus obſeruatus fuit, ſimile ius denegandum non eſſe videbatur, etiam ſimilem comparationem pro Wardhus inſtituendam eſſe iudicaui. Vbi reticere tamen non poſſum, valores Parallaxeos ex hoc genere comparationum deductos haud aeque certos videri, ac qui prodeunt, dum durationes inter contactus internos inter ſe conferuntur, ſiquidem illi valores propter leuiſſimas correctiones Diametri Veneris haud exiguam ſubire poſſunt mutationem, quod infra quidem euidentius ob oculos ponemus.

8. Vt omnes calculos ad ſummam praeciſionem exigere liceret, elementa Aſtronomica ſaltem quam proxime vera adhibere neceſſe erat, ne propter errores in his Elementis commiſſos, effectus parallacticos a veritate multum aberrantes inuenirem. Sequentia igitur Elementa Aſtronomica in vſum calculi a me fuerunt praeſuppoſita:

I. Tempus verum Pariſinum pro coniunctione Solis et Veneris Die 3 Iunii $10^h. 14'. 0''$.

II. Latit. Veneris Geocentrica hoc tempore $10'. 16''.7$. hincque diſtantia minima centrorum $10' 10''$.

III. Diameter Solis $31'.\ 31''$ et

IV. Diameter Veneris $57''.\ 2$.

Quum autem negare non velim, haec elementa aliquam admittere poſſe correctionem, obſeruandum tantum mihi eſt, quod *primum* eorum attinet, illud adeo exacte eſſe determinatam, ac pro effectibus Parallacticis cum ſummo rigore determinandis requiritur; reliqua autem Elementa quod concernit, latitudinem ſcilicet Veneris et Diametros Solis et Veneris, calculos ita inſtruendos eſſe ratus ſum, vt etiam ratio haberetur correctionum, quas haec Elementa adhuc admittere poſſent.

9. Ad inueniendum effectum Parallaxeos in tempore ſeu quantitatem, qua introitus vel egreſſus Veneris aut acceleratur, aut retardatur, neceſſum eſt vt prius cognoſcatur effectus Parallacticus ſecundum circulum maximum zV. Notum autem eſt hunc effectum ſequenti exprimi eſſe conſuetum formula

Tab. XVIII Fig. 2.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}-1\right)\pi.\ \text{ſin.}\ zV}{1-\left(\frac{a}{b}-1\right)\pi.\ \text{coſ.}\ zV}$$

deſignante $a:b$ rationem inter Parallaxes horizontales Veneris et Solis, littera autem π ipſam Parallaxin Solis denotante, in qua quidem formula denominatoris membrum poſterius ob paruitatem ſuam tuto negligere licet. Verum haec formula pro vera Telluris figura ſphaeroidica valores exhibere poteſt effectuum Parallacticorum a veritate haud parum diſcre-

diſcrepantes; ſi igitur pro loco vbi obſeruatio aliqua inſtituta eſt, recta ad centrum telluris ducta ſupponatur eſſe ad radium aequatoris vt $\varepsilon : 1$ et Parallaxis Solis aequatorea exprimatur littera π, exactior formula qua effectus Parallacticus V D exhibetur, iam ita erit expreſſa

$$V D = \frac{(\frac{a}{b} - 1) \varepsilon \pi \,\text{ſin.}\, z V}{1 - (\frac{a}{b} - 1) \varepsilon \pi \,\text{coſ.}\, z V}$$

in qua denominatoris membrum poſterius ſi placet, vt admodum exiguum negligere licebit. Nullus quidem dubito quin plurimi ſint, qui exactitudinem quam heic ſecutus ſum pro ſuperflua et imaginaria habebunt, immo ipſe primum in eadem fui ſententia; poſtquam autem intellexi, valores pro effectibus parallacticis obſeruationum in Lapponia factarum, propter correctionem iam allatam, duobus ſecundis in tempore immutari, eandem non prorſus negligendam eſſe cenſui, imprimis quando de Parallaxi Solis cum praeciſione $\frac{1}{25}$ ſec. determinanda quaeſtio eſt. Porro fatendum tamen eſt, valorem iam allatum ipſius V D non omnimode eſſe exactum. Nam pro ſumma praeciſione obtinenda, effectus Parallactici V A et D A = C O, ſeorſim ope formularum

$$V A = \frac{\frac{a}{b} \varepsilon \pi . \,\text{ſin.}\, z V}{1 - \frac{a}{b} \varepsilon \pi . \,\text{coſ.}\, z V} \quad \text{et} \quad C O = \frac{\varepsilon \pi . \,\text{ſin.}\, z C}{1 - \varepsilon \pi . \,\text{coſ.}\, z V}$$

ſunt computandi; deinde vero in triangulo D V A, ex datis V A et D A cum angulo D A V, valor

lineae

lineae D V exquirendus. Quomodo autem diſtantia Veneris a puncto z ſeu arcus z V computari debeat, hoc loco explicare minus eſt neceſſe; ſiquidem is calculus ſecundum varias Methodos inſtitui poteſt, inter quas tamen ea, quam tradit Illuſtr. *Eulerus* in Part. II. Tom. XIV. Nouorum Comment. omnino quam maxime expedita mihi videtur.

10. Supra quidem iam expoſui, quaenam cautelae obſeruari debeant, circa verum valorem anguli D V C definiendum, nunc igitur reliquum eſt, vt oſtendam, quomodo dato effectu Parallaxeos V D et angulo D V C inueniri debeat effectus parallacticus ſecundum directionem V C, ſeu quod idem eſt C V − C D. Centro igitur C radio C D deſcriptus intelligatur arcus circuli, qui ipſi V C in B occurrat et iungatur D B, tum vero in valore pro effe-
Tab. XVIII. Fig. 3. ctu Parallaxeos V D = V A − C O proxime, pro π valor eius approximatus ſubſtituatur, vt habeatur ipſius V D valor abſolutus ſaltem proxime verus, hinc autem quaeratur angulus V C D per ſequentem analogiam:

$$D C : V D :: \text{Sin. } D V C : \text{Sin. } D C V.$$

Cognito nunc angulo D C V dabitur

$$D B C = 90^\circ - \tfrac{1}{2} D C V,$$

ideoque et

$$V D B = D B C - D V C \text{ vel } = D V C - D B C,$$

ex quo obtinetur

$$V B = V C - D C = \frac{V D . \text{ſin. } V D B}{\text{ſin. } D B V}$$

vnde

vnde ſi ponatur

$$VD = \beta\pi, \text{ erit } VB = \frac{\beta\pi . \mathit{ſin.}\, VDB}{\mathit{ſin.}\, DBV}.$$

Heic quidem primum obſeruare licet, nequaquam neceſſarium eſſe, vt valor lineae V B in numeris abſolutis exhibeatur, aſſumto ſcilicet certo valore Parallaxeos tamquam cognito; expreſſio enim generalis iam tradita ſatis exacta eſt, etiamſi π non eundem prorſus haberet valorem, ac qui pro inueſtigando angulo V C D in valore lineae V D ſubſtituitur. Deinde patet ſuperfluam omnino eſſe exactitudinem, qua praeſcribitur vt angulus V C D inueſtigetur cum praeciſione decimae partis ſecundi, quamuis enim valor lineae V B cum praeciſione $\frac{1}{1000}$ computari debeat, vehementer tamen falleretur, qui exiſtimaret ad hanc exactitudinem obtinendam id requiri, vt angulus V C D vsque ad decimam ſecundi partem ſit cognitus, cum potius verus valor lineae V B imprimis pendeat ab exactitudine valoris lineae V D et anguli V D B, cuius anguli certitudo potiſſimum dependet ab angulo D V C, immo ſuperfluum erit angulum V C D cum tanto rigore definire, quando in valore anguli C V D determinando errores committuntur aliquot graduum. Quod autem haec nequaquam gratis dicta ſint, vnusquisque ipſe facile experiri poteſt, ſi enim valorem anguli V C D inuentum aliquot ſecundis auxerit vel minuerit, tamen valorem pro V B inde vix vllam ſubire mutationem inueniet.

11. Caeterum et ſequenti modo inueſtigatio quantitatis lineae V B ſuſcipi poterit: ex puncto D in V C demittatur perpendicularis D E et quum iam ſit $VB = VE \mp BE$, tum vero habeatur

$$VE = VD. \text{Coſ. } DVC \text{ et}$$

$$BE = \frac{DE^2}{DC + EC} = \frac{VD^2 \text{ſin. } DVC^2}{2DC}$$

quam proxime, erit omnino

$$VB = VD\left(\text{Coſ. } DVC \mp \frac{VD. \text{ſin. } DVC^2}{2DC}\right),$$

ſi igitur ponatur $VD = \beta\pi$, fiet

$$VB = \beta\pi\left(\text{Coſ. } DVC \mp \beta\pi. \frac{\text{ſin. } DVC^2}{2DC}\right)$$

in poſteriori igitur membro vncinulis incluſo, ſi pro π valor proxime verus ſufficiatur, iam innoteſcet valor ipſius V B. In Tomo XIV. Nouor. Comment. valor ipſius V B ipſi $\beta\pi$. Coſ. D V C tantum poſitus eſt aequalis, at plurimis omnino in caſibus poſterius membrum ex linea B E oriundum non ſine metu ſenſibilis erroris negligi poteſt, imprimis vbi angulus D V C non multum differt a recto; fatendum igitur eſt effectus Parallacticos in Tom. XIV. et XVI. Nou. Comment. allatos, leviores quasdam admittere correctiones.

Tab. XVIII Fig. 4. 12. Poſtquam igitur hoc modo valor lineae V B inuentus fuerit, nunc effectus Parallaxeos ſecundum orbitam Veneris inueſtigari poteſt, ſi enim centro C radio C B deſcribatur arcus circuli, qui orbitae Veneris in puncto X occurrat et iungatur B X, tum vero ex C in orbitam ducta concipiatur perpendi-

pendicularis C M, quae erit aequalis diſtantiae minimae centrorum Solis et Veneris, liquet effectum parallaxeos ſecundum orbitam fore = V X, quem ſequenti ratione indagare licet. In valore lineae V B pro π ſubſtituatur valor ad veritatem proxime accedens, vnde habebitur V C = C B ± V B, tum vero ex datis V C, B C et C M, anguli C X M, C V M innoteſcent, quorum differentia eſt V C X; hinc autem prodit C X B = 90° − ½ X C B. In triangulo igitur V B X valor ipſius V X ſequenti formula exprimetur:

$$V X = V B . \frac{\text{ſin. } V B X}{\text{ſin. } V X B},$$

ideoque ſi V B ponatur = $\delta\pi$ habebitur

$$V X = \delta\pi . \frac{\text{ſin. } V B X}{\text{ſin. } V X B},$$

quin etiam ex valore ipſius V D ſtatim deducitur

$$V X = \beta\pi . \frac{\text{ſin. } V D B . \text{ſin. } V B X}{\text{ſin. } D B V . \text{ſin. } V X B}.$$ Tab. XVIII Fig. 3 et 4.

Inuento autem valore ſpatii V X, quantitas temporis ipſi percurrendo a Venere impenſi, ob datum motum horarium Veneris in orbita facile eruitur, atque ſi hoc tempus addatur vel ſubtrahatur a tempore, quod Venus adhibet ad percurrendam chordam X M, habebitur tempus per ſpatium V M.

13 Facile quidem intelligitur hanc expreſſionem pro ſpatio V M ſeu pro tempore ad idem percurrendum neceſſario, pro ſatis exacta haberi non poſſe, niſi valores linearum C B et C M bene fuerint definiti; reliquum itaque eſt, vt diſpiciamus

 quam

quam mutationem ſubeat linea V M, ſi ipſis C B
Fig. 5. et C M leuiores quaedam tribuantur correctiones. Primum autem ſupponamus C V inuariatam manere at C M augeri particula C p, ſtatuamus igitur centro V radio V C arcum circuli deſcribi, cui occurrit recta per p ipſi V M parallela in S, tum vero ductam eſſe S m parallelam ipſi C M et perſpicuum quidem eſt ob augmentum C p lineam V M diminui particula M m = S p, patet autem eſſe

$$Sp : Cp :: \text{Tang. } SCp : 1 :: \text{Tang. } CVM : 1.$$

Maneat nunc porro C M inuariata at diſtantia C V incrementum accipere concipiatur = q S', ita vt vera diſtantia centrorum ſit = V S' = V C + q S', tum vero ductae intelligantur C S' et S' m quarum haec parallela eſt ipſi C M, eritque in triangulo C q S'

$$CS' : qS' :: 1 : \text{Coſ. } CS'q = 1 : \text{Coſ. } CVM,$$

ideoque

$$Mm' = CS' = qS' \text{ Sec. } CVM.$$

Deſignemus nunc correctionem diſtantiae minimae C M littera y, correctiones autem lineae C B pro contactibus quidem externis littera μ et pro internis littera ν, et ponatur valor lineae V X = $\gamma\,\pi$, valor autem lineae X M ex aſſumtis C B et C M deductus = L, erit omnino verus valor pro linea V M

$$= L \pm \gamma\,\pi - y \text{ Tang. } CVM + \mu \text{. Sec. } CVM$$

pro contactibus externis, pro internis autem

V M

$$VM = L \pm \gamma\pi - y.\text{Tang.}CVM + \nu\text{Sec.}CVM.$$

Notari autem conuenit, pro contactibus externis CB aequari ſummae ſemidiametrorum Solis et Veneris et pro internis earum differentiae, tum vero litteram L et angulum C V M diuerſos quoque adipiſci valores prout ſiue de contactibus externis ſeu de internis quaeſtio eſt. Si nunc m ponatur eſſe numerus, in quem valor ſpatii multiplicari debet, vt prodeat tempus quod Venus ipſi percurrendo impendit, valor correctus pro tempore per lineam V M prodibit

$$= mL \pm m\gamma\pi - my.\text{Tang}\,CVM + m\nu.\text{Sec.}CVM.$$
$$+ m\mu.\text{Sec.}CVM.$$

14. Si igitur in eodem loco contactus internus tam pro ingreſſu quam egreſſu ſit obſeruatus, quibus obſeruationibus reſpondeant loca Veneris vera in orbita V et v, liquet hinc pro temporibus per V M et v M has inueniri expreſſiones: Tab. XVIII Fig. 5.

$$\text{Tempus per } VM = mL + m\gamma\pi - my\,\text{Tang.}CVM$$
$$+ m\nu\,\text{Sec.}CVM$$

$$\text{Tempus per } vM = mL + m\gamma'\pi - my\,\text{Tang.}CvM$$
$$+ m\nu\,\text{Sec.}CvM$$

vnde iam tota duratio tranſitus huiusmodi formula exhiberi poteſt:

$$\textit{Duratio tranſitus} = 2mL + \eta\pi - \zeta y + \theta\nu,$$

vbi η, ζ et θ ſunt coefficientes cogniti et determinati, haec autem duratio aequalis poni debet ipſi durationi obſeruatae quam dicamus D. Si nunc pro

alio quodam loco ſimilis duratio tranſitus D′ fuerit obſeruata eius ſimilem quoque expreſſionem inuenire licet, ita vt ſit

$$D' = 2mL + \eta'\pi - \zeta' y + \theta' \nu,$$

ſubtracta autem hac aequatione a ſuperiori obtinebitur

$$D - D' = (\eta - \eta')\pi - (\zeta - \zeta')y + (\theta - \theta')\nu,$$

ex quo fit

$$\pi = \frac{D - D'}{\eta - \eta'} + \frac{\zeta - \zeta'}{\eta - \eta'}.\, y - \frac{\theta - \theta'}{\eta - \eta'}.\, \nu.$$

15. Quum correctiones y et ν ſint quam minimae, pro caſu quo durationes inter contactus internos pluribus in locis obſeruatae inter ſe comparantur, valor Parallaxeos ob has correctiones vix vltra centeſimam partem minuti ſecundi immutari poterit; eo tamen minus ſuperfluum iudicari debet, quod harum correctionum heic habuerimus reſpectum, quia ſic quidem certiſſime redditi ſumus conuicti, ex leui quadam mutatione valorum pro Latitudine Veneris Geocentrica atque Diametris Solis et Veneris, Parallaxin nullam ſenſibilem pati mutationem. Dum vero comparatio inſtituitur durationis inter contactum internum pro ingreſſu et externum pro egreſſu alicubi obſeruatae, cum valore durationis inter contactus internos pro alio loco, inuento, hae correctiones omnino haud contemnendam producere poterunt variationem in valore Parallaxeos, quod infra dum huiusmodi comparationum attulerimus exempla euidentius patebit. Praeterea hoc loco

reti-

reticendum non eſſe videtur, primo intuitu ineptam omnino videri poſſe noſtram operandi rationem, qua in valorem Parallaxeos praeter numerum abſolutum binas adhuc incognitas y et ν introduximus, quum neceſſitas non vrgeat, niſi vnam earum in hunc valorem ingredi. Scilicet quia binas has obtinuimus aequationes:

$$D = 2mL + \eta\pi - \zeta y + \theta\nu;\quad D' = 2mL + \eta'\pi - \zeta' y + \theta'\nu$$

videri poteſt ex vnaquaque earum valorem correctionis ν quaeri poſſe, quibus valoribus inter ſe aequatis obtineretur expreſſio pro Parallaxi, quam praeter numerum abſolutum, non niſi correctio y ingreditur. Ratio autem cur hanc procedendi viam hac occaſione eligere non placuit, in eo imprimis ſita eſt, quod valorem quantitatis $2mL$ etſi ex ipſis C B et C M facile deducendum, in calculum introducere plane non voluerimus, quum fieri posſit, vt duratio iſta Geocentrica ex calculo deducta cum obſeruata non conueniat; imprimis ſi vt quidam opinantur atmoſphaera Veneris aliquem habuerit effectum ad durationem tranſitus imminuendam. Praeterea autem ex infra monendis patebit, pro comparationibus durationum inter contactus internos, correctiones ex y et ν emergentes conſtantem inter ſe tenere rationem eamque ita comparatam, vt earum effectus proxime ſe inuicem deſtruant.

16. Haec igitur eſt Methodus ad cuius praeſcriptum calculum Parallaxeos inſtituere in animum induxi, vt quantum fieri poſſet concluſiones inuenirem

rem certas et exactas. Inutile autem duco de praerogatiuis quas haec Methodus prae aliis ſibi vindicare poteſt, hoc loco multa commemorare; quisquis enim eam rite examinare voluerit, facile inueniet vix quidquam ad ſummam exactitudinem requiri. Quum tamen ſuſpicandi locus ſit, id Methodo noſtrae vitio verti poſſe, quod Analyſeos quandam ſpeciem referat, ideoque vt nonnulli autumant incertitudini et obſcuritati ſit obnoxia, neceſſum omnino eſt, vt de hoc crimine mentem breviter exponam. *Primum* igitur fateor me valde dubitare, an demonſtrari queat Methodum quandam, eam praeprimis ob cauſſam quod Analytica ſit, incertitudini reddi obnoxiam, quum hactenus omnes Mathematicorum periti, in ea videntur fuiſſe opinione Analyſin ſummum eſſe remedium, quo problemata etiam Aſtronomica expedite reſolui poſſunt. Porro notandum eſt in Methodo noſtra vitium iſtud Analyſeos adhibitae in eo conſiſtere, *primum* quod effectus parallactici generaliter a nobis ſint determinati, pro quocunque demum valore Parallaxeos, cum tamen in Methodis vulgo adhibitis, vſu receptum ſit, vt hi effectus pro determinato quodam valore Parallaxeos computentur, et *ſecundo* quod correctionum iſtarum y et v reſpectum habere non neglexímus. Quod poſterius quidem attinet, de eo plura monere heic opus non eſt, quum in §. praecedenti iam ſufficiens a nobis allata ſit ratio, cur has correctiones plane omittere non voluerimus. De priore igitur defectu tenendum eſt, tantum abeſſe,

vt

vt pro vitio quodam habendum ſit, quod generales expreſſiones effectuum Parallacticorum adhibuerimus, vt potius Methodus noſtra eo *ipſo* facilior, ſaltem magis directa euadat, quam ſi ſecundum tritam et vulgo receptam rationem, in veram quantitatem Parallaxeos per regulam falſae poſitionis inquiratur. Id autem facili exemplo heic illuſtrare haud pigebit. Ponamus quantitatem Parallaxeos inueſtigandam eſſe ex comparatione durationum inter contactus internos pro Arce Principis Walliae et Inſula Regis Georgii, breuitatis autem gratia conſiderationem correctionum y et ν heic ſeponamus; quum igitur ſit pro priori loco effectus parallacticus ad durationem Geocentricam augendam $24, 88. \pi$ et pro poſteriori ad eam diminuendam $84, 01, \pi$, liquet differentiam inter durationes obſeruatas $920''$, 2 eſſe debere $= 108, 89. \pi$, ex quo fit $\pi = \frac{920, 2}{108, 89} = 8'', 45$. Iam penes vnumquemque iudicium eſto, an non haec operandi ratio multo facilior ſit communiter recepta, qua primum per effectus parallacticos ex certa hypotheſi Parallaxeos computatos, durationes Geocentricae ex binis obſeruationibus deduci debent, quae ſi inuicem diſcrepent, ex hac differentia per regulam trium inueſtigandum eſt, quomodo Parallaxis immutari debuiſſet, vt iidem prodirent valores pro duratione Geocentrica. Mihi quidem ita perſuaſum eſt, eos Auctores haud immerito taxari, qui in re facillima et ſatis obuia operationem indirectam eligere praeoptant, vbi facilior et magis directa negotium abſoluendi ſuppetit ratio.

17. Quum Methodus a me adhibita poſtulet, vt duratio tranſitus inter contactum internum Veneris pro ingreſſu et contactum ſiue internum ſeu externum pro egreſſu alicubi obſeruata, aequalis ponatur valori eiusdem durationis per calculum inuento; primum quidem heic ob oculos ponere licebit valores, quos calculi noſtri praebuerunt, pro temporibus a Venere adhibitis ad percurrenda ſpatia V M, v M, indeque deductis durationibus tranſitus, vbi autem monendum eſt, breuitatis gratia quantitatem ſemidurationis Geocentricae inter contactus internos littera T a nobis indigitari, ſimiliterque valorem ſemidurationis Geocentricae inter contactus externos littera T' deſignari:

Pro Arce Principis Walliae ad Sinum Hudſonis.

Temp. per $VM = T + 29{,}45.\pi - 13{,}04.y + 19{,}87.\nu$
per $vM = T + 4{,}57\,\pi - 13{,}41.y + 20{,}12.\nu$ Duratio obſeruata.
$Durat. = 2T + 24{,}88.\pi - 26{,}45.y + 39{,}99.\nu = 5^h.45'.23'',7.$

Pro Sto. Joſepho Californiae.

Temp. per $VM = T + 1{,}96.\pi - 13{,}34.y + 20{,}06.\nu$
per $vM = T - 33{,}92.\pi - 13{,}75.y + 20{,}34.\nu$
$Durat. = 2T - 31{,}96.\pi - 27{,}09.y + 40{,}40.\nu = 5^h.37'.21'',1.$

Pro Inſula Regis Georgii alias Otahitee dicta.

Temp. per $VM = T - 39{,}44.\pi - 13{,}80.y + 20{,}38.\nu$
per $vM = T - 44{,}57.\pi - 13{,}86.y + 20{,}42.\nu$
$Durat. = 2T - 84{,}01.\pi - 27{,}66.y + 40{,}80.\nu = 5^h.30'.3'',5.$

Pro

Pro Wardhus in Finmarkia.

Temp. per $VM = T + 45,81.\pi - 12,87.y + 19,76.\nu$
per $vM = T + 32,06.\pi - 13,00.y + 19,82.\nu$
$vM = T' + 29,51.\pi - 11,92.y + 19,15.\mu$
Durat. $= 2T + 77,87.\pi - 25,87.y + 39,58.\nu = 5^h.53'.14''.$
$= T + T' + 75,32.\pi - 24,79y + 19,15.\mu + 19,82.\nu = 6^h.11'.33'',8$

Pro Caianeburg in Finlandia.

Temp. per $VM = T + 47,47.\pi - 12,84.y + 19,75.\nu$
per $vM = T' + 32,39\ \pi - 11,90.y + 19,14\ \mu$
Durat. $= T + T' + 79,86.\ \pi - 24,74.y + 19,14.\mu + 19,75.\nu = 6^h.11'.41'',5$

Pro Kola in Lapponia Ruſſica.

Temp. per $VM = T + 46,03.\pi - 12,87\ y + 19,76\ \nu$
per $vM = T + 33,12\ \pi - 13,01\ y + 19,83.\nu$
Durat. $= 2T + 79,15.\pi - 25,88.y + 39,59.\nu = 5^h.53'.17''.$

Quod autem valores durationum obſeruatos attinet, notandum eſt pro locis Americanis tales a me heic adhibitos fuiſſe, qui prodeunt, dum ex obſeruationibus in vnoquoque loco inſtitutis media ſumuntur, pro Wardhus autem eam durationis quantitatem adhibui, quae ex momentis a *Rev. Pat. Hell* aſſignatis deducitur, praeprimis quum Cel. huic viro nullam praebere velim anſam querendi, quod eius obſeruationem ex vſu determinandae Parallaxeos ſecludam. Porro notari quoque meretur moram Geocentricam inter contactum Veneris internum et externum a me adhibitam fuiſſe 18'. 43'', qualis nimirum ex valoribus diametrorum Solis et Veneris

 atque

atque diſtantiae minimae centrorum a me aſſumtis prodit.

18. Quodſi nunc aequationes ſupra allatae, modo quem in §. 14. deſcripſimus inter ſe combinentur, valores pro Parallaxi Solis inuenientur tales, quales ſequens Tabula refert:

Valores Parallaxeos ex comparatione obſeruationum.

Pro	$\pi =$	Cum	
Inſ. Reg. Georgii	$8,45 - 0,011.y + 0,007.\nu$	Arce Princ. Walliae.	2
	$8,41$	St. Joſeph. in Calif.	1
	$8,59$	Wardhus.	3
	$8,58 - 0,018\,y - 0,123(\mu - \nu) + 0,006(\mu + \nu)$	Wardhus	3
	$8,39 - 0,018.y$	Caianeburg	3
	$8,54 - 0,011.y + 0,007.\nu$	Kola	3
St. Joſepho Californiae	$8,49 - 0,011.y + 0,007.\nu$	Arc. Princ. Walliae	1
	$8,68$	Wardhus	2
	$8,67 - 0,021.y - 0,178(\mu - \nu) + 0,007(\mu + \nu)$	Wardhus	2
	$8,38 - 0,021.y$	Caianeburg	2
	$8,60 - 0,011.y + 0,007.\nu$	Kola	2
Arce Princ. Walliae	$8,88 - 0,011\,y + 0,007.\nu$	Wardhus	1
	$8,86 - 0,025\,y - 0,357(\mu - \nu) + 0,010(\mu + \nu)$	Wardhus	1
	$8,27 - 0,025.y$	Caianeburg	1
	$8,71 - 0,011.y + 0,008.\nu$	Kola	1

Antequam vero ex his inuentis medium quendam valorem Parallaxeos quaeramus, e re eſt vt in genere obſeruemus, tutiſſimas determinationes et minime ex correctionibus elementorum dependentes eas merito habendas eſſe, quae ex durationibus inter contactus internos eliciuntur, ſiquidem valores coefficientium pro y et ν adeo parui ſint, vt certum ſit ex iis in valorem Parallaxeos ſenſibilem non induci muta-

mutationem. Si enim noſtras determinationes quis accommodare voluerit ad valores diſtantiae minimae et diametrorum a Celeb. *de la Lande* inuentos, ponere debebit $y = - 2'', 3$ et $\nu = - 1'', 8$, ex quo valores pro Parallaxi centeſima tantum parte ſecundi augentur. Contra vero minus tutae habendae ſunt concluſiones, quae obtinentur conferendo durationes inter contactus internos pro locis Americanis, cum iis, quas inter contactum internum pro ingreſſu et externum pro egreſſu Wardhuſiis et Caianeburgi obſeruatas eſſe conſtat, quum leuis correctio diametri Veneris heic inſignem producere valeat mutationem. Si enim ſupponamus Diametrum Veneris tantum quinta parte ſecundi augeri, valor Parallaxeos deductus ex comparatione obſeruationis ad Sinum Hudſonis inſtitutae, cum ſupra dictis Wardhuſiis et Caianeburgi factis, iam $\frac{7}{105}$ partibus minuti ſecundi immutabitur. Quamuis autem ſatis probabile videatur valorem Diametri Veneris a nobis adhibitum ſatis eſſe exactum, tamen adfirmare non auſim aberrationem $\frac{1}{5}$ ſecundi pro hoc valore admitti non poſſe, praeprimis quum hoc in negotio maior ſit obſeruationum diſſenſus, quam vt cum ſumma exactitudine et praeciſione hic valor determinari poſſit. Quicquid tamen de hac incertitudine ſit, correctionem $(\mu - \nu)$ pro euaneſcente habebo, ideoque in ſequentibus dum valor medius Parallaxeos inueſtigandus eſt, omnes correctiones ſupra allatas plane negligam.

19. Dum ex valoribus pro Parallaxi ſupra inuentis medium exquiri debet, ante omnia notan-

dum eſt omnes concluſiones eiusdem pretii habendas non eſſe. Probabilitas enim vniuscuiusque valoris merito aeſtimatur ex quantitate coefficientis pro π in illa aequatione vnde hic valor deductus fuit, quas probabilitates in Tabula ſupra allata numeris 3, 2 et 1 expreſſimus. Vt autem hoc adhuc melius intelligatur, perpendendum tantum eſt, quod variatio vnius partis decimae ſecundi in valore Parallaxeos deducto ex obſeruatione Inſulae Regis Georgii combinata cum Wardhuſienſi vel Caianeburgenſi, triplo maiorem praeſupponat obſeruationum errorem, quam ſi eadem aberratio produceretur pro valore Parallaxeos inuento ex comparatione obſeruationum Wardhuſienſis vel Caianeburgenſis cum illa, quae ad Sinum Hudſonis facta eſt. Hoc ergo modo omnes noſtras concluſiones in tres claſſes partiri licebit et ex ſingulis medium ſumere, tum vero denuo ex his mediis, medium valorem Parallaxeos colligere licet, reſpiciendo ad eorum probabilitates, quae iam proportionales erunt productis ex probabilitate ſingularum concluſionum in numerum earum. Quae operatio ſequenti Tabella exponitur:

Prob.	3	2	1			
$\pi =$	8″,59	8″,45	8″,41	Med. I. Prob.	12..6	8,52
	8, 58	8, 68	8, 49	II.	10..5	8,56
	8, 39	8, 67	8, 88	III.	6..3	8,50
	8, 54	8, 38	8, 86		Med. med. $\pi =$	8,55
		8, 60	8, 27			
			8, 71			
Med. $=$	8,54	8, 56	8, 60			

20. Hanc quidem concluſionem a veritate haud multum recedere oporteret, ſi omnes obſeruationes pro aeque certis habere liceret, vel ſi iudicare fas eſſet easdem aequalibus fere erroribus eſſe obnoxias, quum vero hoc nequaquam locum habeat, fatendum omnino eſt, in ſuperiori comparatione I°. obſeruationem in Kola inſtitutam cum reliquis eundem certitudinis gradum ſibi non vindicare, quia Cel. huius obſeruationis Auctor de momentis a ſe aſſignatis affirmauit, eadem tantum aeſtimatione quadam definita eſſe et per nubes capta. Quamuis autem hae obſeruationes maioribus erroribus non videantur obnoxuiae, quam eae quae in Caianeburg vel Wardhus inſtitutae ſunt, quum tamen certum ſit propter earum aberrationem, errorem in valore Parallaxeos commiſſum, augeri, tutiſſimum quidem videtur has obſeruationes ſeponere. II°. Infra oſtendemus cum maxima probabilitate vtrique obſeruationi tam Wardhuſienſi quam Caianeburgenſi aliquem adſcribendum eſſe errorem, quum ergo obſervatio Wardhuſienſis duplici modo ingrediatur inueſtigationem pro valore Parallaxeos ſupra inſtitutam, liquet hunc errorem duplicem quoque obtinere effectum pro valore Parallaxeos augendo, praeprimis quia error huius obſeruationis in contactu interno pro ingreſſu reſidet. His igitur de cauſſis ſatis eſſe poſſumus perſuaſi valorem medium Parallaxeos iam inuentum aliquantum imminuendum eſſe. Sepoſita autem primum obſeruatione Kolae inſtituta, ſequentes pro Parallaxi deducuntur concluſiones:

Prob.

Prob. 3	2	1
$\pi = 8'',59$	$8'',45$	$8'',41$
8, 58	8, 68	8, 49
8, 39	8, 67	8, 88
	8, 38	8, 86
		8, 27
Med. = 8, 52	8, 54	8, 58

Med. I. Probab.	9.	$8'',52$
II.	8.	8, 54
III.	5.	8, 58
Med. med.		$\pi = 8, 54$

Porro ſi ad aberrationem adhuc imminuendam ex ſingulis binis concluſionibus pro Wardhus medium in calculum introducatur, ſequenti modo Parallaxeos valor medius inuenietur:

Prob. 3	2	1
$\pi = 8'',59$	$8'',45$	$8'',41$
8, 39	8, 68	8, 49
	8, 38	8, 87
		8, 27
Med. = 8, 49	8, 50	8, 51

Med. I. Prob.	6 .. 3	$8'',49$
II.	6 .. 3	8, 50
III.	4 .. 2	8, 51
Med.		$\pi = 8, 50$

Hinc igitur pro *Parallaxi Solis horizontali aequatorea tempore tranſitus* adhibere licebit $\pi = 8'', 50$, vbi tamen ingenue fateor me de hoc valore Parallaxeos adeo perſuaſum non eſſe, vt negare vellem eum aliquot centeſimis partibus minuti ſecundi augeri vel minui poſſe, neque multum repugnabo, ſi quis hanc Parallaxin ſtatuere velit $8'', 54$ vel $8'',46$ quorum valorum poſterior ex ſolis obſeruationibus Americanis deducitur. Grauiſſimae tamen eſſe videntur rationes, quae ſuadent Parallaxin nec infra $8'', 44$ deprimendam eſſe, nec vltra 8, 56 ſec. augeri debere, quas ex ſequentibus melius perſpicere licebit.

21.

21. Quum videri poſſet me in fauorem obſeruationis Caianeburgenſis pretium obſeruationis Wardhuſienſis diminuiſſe, nunc quidem a me ea remouenda eſt ſuſpicio, quod crederem obſeruationis Wardhuſienſis errorem duplo maiorem eſſe errore obſeruationis Caianeburgenſis, ſi enim errores pro his obſeruationibus tantum ſtatuantur aequales, tamen effectus prioris ad Parallaxin plus iuſto augendam duplo maior erit, quam poſterioris ad eam diminuendam, haec ergo praecipua fuit ratio cur ad aequalitatem quandam obtinendam, medium ex concluſionibus pro Wardhus inuentis in vſum vocare placuit. Hoc vero eo tutius facere licuit, quod concluſiones ex obſeruationibus Americanis deductae quaſi pro norma haberi queant, ad quam reliquarum probabilitatem exigere conuenit. Quamuis enim non negauerim obſeruationibus Americanis aliquantillos errores ineſſe quoque poſſe; eos tamen vltra 5″ pro durationis quantitate obſeruata increſcere poſſe, vix probabile videtur. Verum tamen Cel. *D. de la Lande* aſſentiri non poſſum, dum contendit obſeruationem Caianeburgenſem prae Wardhuſienſi nouies maiorem ſibi vindicare probabilitatem, quum ex ſupra allatis pateat, diſcrepantiam concluſionum ex obſeruatione Wardhuſienſi inuentarum non eſſe niſi duplo maiorem ea, quae pro obſeruatione Caianeburgenſi ſe prodit et ſi leuiores quasdam aberrationes in obſeruationibus Americanis admittere velimus, diſſenſus iſti ad multo maiorem aequalitatem perduci poterunt. Si enim ſupponere vellemus duratio-

nem pro Arce Principis Walliae $5''$ eſſe augendam, haec obſeruatio cum Wardhuſienſi comparata praeberet $\pi = 8'', 78$, cum ex eius combinatione cum Caianeburgenſi ſequeretur $\pi = 8'', 18$. Simul vero et hinc perſpicuum euadit obſeruationem Wardhuſienſem ab omni ſuſpicione erroris nequaquam liberari poſſe, vt enim ex eius comparatione cum obſeruatione pro Arce Principis Walliae prodire poſſet valor Parallaxeos $8'', 6$, duratio tranſitus in poſteriori loco obſeruata 15 ſecundis eſſet augenda, quod quidem nulla probabilitate gaudet.

22. Sequitur itaque vt ad praeſcriptum regularum §. 6. allatarum, probabilitatem ſingularum obſeruationum a nobis ſupra adhibitarum ſub examén reuocemus. Quod igitur *primum* attinet obſeruationes in Arce Principis Walliae et St. Ioſephi in California inſtitutas, tenendum eſt primum et ſecundum veritatis characterem iis ſatis bene conuenire. Scilicet quum pro priori loco momenta a binis obſeruatoribus pro contactibus internis aſſignata, pro poſteriori autem obſeruationes a tribus obſeruatoribus factae, tam parum inter ſe diſcrepent, vt maximus diſſenſus circa durationem tranſitus ex obſeruationibus deductam, ſeptem minuta ſecunda non excedat; credere omnino fas eſt, has obſeruationes eſſe admodum exactas. Porro pro Fortalitio Principis Walliae etiam ſecundo criterio veritatis ſaltem quod obſeruationem Cel. D. *Dymond* pro egreſſu attinet, egregie ſatisfit. Pro St. Ioſepho in California licet momenta pro contactu externo in egreſſu

a di-

a diuerſis obſeruatoribus aſſignata non parum diffe-rant, tamen momentum a Cel. D. *Chappe* allatum, pro aſſumto valore Diametri Veneris, a veritate non multum aberrare deprehenditur. Quicquid autem de contactu externo ſit, ſi ad primum veritatis characterem pro contactibus internis attendamus, fatendum omnino eſt, nullam nobis oboriri poſſe ſuſpicionem, quod vllum horum momentorum plusquam quinque ſecundis eſſe poſſit erroneum. Quum igitur inueniatur valorem Parallaxeos ex comparatione harum obſeruationum in America factarum deductum, maximum eſſe 8″,61, minimum vero 8″,31; iam omnino ſatis tuto ſtatuere poſſumus valorem Parallaxeos ſaltem intra hos limites contineri.

De obſeruatione tranſitus in Inſula Regis Georgii facta, fateri omnino cogimur criteria veritatis in eam aeque bene non quadrare, ac in binas priores; pro contactu enim interno in ingreſſu diſſenſus inter momenta obſeruata vsque ad 20″ aſſurgit et pro contactu interno circa egreſſum, bina momenta aſſignata 10″ differunt. Obſeruationes autem contactus externi in egreſſu, adhuc magis dubiae ſunt, quippe quum in iis ſaltem pro valore diametri Veneris a nobis aſſumto, ad minimum errores 30″ deprehenduntur. Hac autem incertitudine non obſtante, pro valde probabili aſſerere audeo, durationem tranſitus ſupra a nobis pro hoc loco adhibitam, quae ex mediis inter momenta obſeruata ſumtis deducitur, vix maiorem quam 5 ſecundorum mutationem admittere, cuius aſſerti rationes heic

 expo-

exponere haud inutile erit. Etiamſi igitur negandum non ſit, obſeruationibus contactum externorum in egreſſu pro hoc loco graues ineſſe errores, tamen aequitas poſtulare videtur, vt pro contactu interno eiusmodi adhibeatur momentum, quo aſſumto hi errores aliquantum imminui poſſunt, vnde pro contactu interno in egreſſu vel ipſum momentum a Cel. D. *Green* aſſignatam adhiberi poterit, vel etiam momento a D. *Green* obſeruato duplo maiorem tribuendo probabilitatem prae obſeruatione Cl. D. *Cook*, momentum medium eligi poterit, vix tamen ſuſpicari fas eſt, verum contactus momentum obſeruationem Cel. *Green* praecedere. Pro contactu quidem interno in ingreſſu, aut ſimpliciter medium ſumendo ex momentis a tribus obſeruatoribus allatis, aut obſeruationi Cel. *Green* duplicem tribuendo valorem prae reliquis, verum contactus momentum ſaltem ſatis probabiliter determinari poteſt. Quin etiam ſi momentis a D. *Green* allatis tantum acquieſcere vellemus, durationem tranſitus pro hoc loco inueniemus, quae a nobis adhibitam non niſi 4 ſecundis ſuperat.

23. Progrediamur nunc ad obſeruationes in Wardhus inſtitutas et quum de momentis quae Rev. Pat. *Hell* pro egreſſu adhibenda eſſe ſtatuit (*a*) nullum nobis obortum ſit dubium, quin ſatis exacta ſint; heic tantum examinare placet momentum a

Rev.

(*a*) Videatur Appendix ad Ephemerides Ipſius pro anno 1773 p. p. 43. 10.

Rev. Pat. *Hell* pro contactu interno in ingreſſu obſeruatum. Tametſi vero pro obſeruationibus huius contactus in Wardhus factis, primum veritatis criterium locum non habeat, ſiquidem obſeruationes Pat. *Sainovics* et D. *Borgrewing* 25 ſecundis inter ſe diſcrepent, tamen hunc diſſenſum hoc loco vrgere nolo, quum Rev. Pat. *Hell* eius rationem nulli dubio obnoxiam ex diuerſo effectu Tuborum et diverſo acumine viſus obſeruatorum, ſe reddere poſſe confidat. Diſpiciendum igitur tantum eſt, vtrum obſeruatio Pat. *Hell* conſentiat cum illis, quae pro contactu interno circa ingreſſum inſtitutae ſunt in locis Europeicis cuius ſitum Geographicum perfecte cognitum habemus, Grenouici ſcilicet, Londini, Oxoniae, Pariſiorum, Stockholmiae et Vpſaliae? Tabula igitur heic adnexa omnes has obſeruationes in ſingulis locis factas et debito modo ad meridianum Pariſinum reductas exhibui, vbi quidem monendum eſt pro obſeruatoriis Londinenſibus eas a me adhibitas fuiſſe Longitudines, quas Cel. *de la Lande* in Diſſertatione ſua de Parallaxi Solis nuper edita nec non in ſuis Ephemeridibus Aſtronomicis (Connoiſſance des temps) attulit, pro Oxonia autem Longitudinem a me aſſumtam fuiſſe $14'. 19''$ a Pariſiis Occid., tum vero pro Stockholmia $1^h. 2'. 53''$ et pro Vpſaliae $1. 1'. 14''$ item a Pariſiis Oriental., qui ſcilicet Longitudinum valores pro his locis, ex obſeruationibus Eclipſium Solis Annis 1764 et 1769 factis, proxime deducuntur. Has autem determinationes ſaltem pro Stockholmia et Vpſalia adeo exa-

ctas eſſe perſuaſus ſum, vt maiorem quam duorum aut trium ſecundorum mutationem non admittant.

Nomen loci et Obſeruat.	Obſeruat. in ſingulis locis factae.	Obſeruat. ad merid. Pariſ. reductae.	Nomen loci et Ocſeruat.	Obſeruat. in ſingulis locis factae.	Obſeruat. ad merid. Pariſ. reductae.
Grenouici			*Oxoniae*		
Hitchins	$7^h. 28'. 57$*		Hornsby	$7^h. 24'. 13''$	$7^h. 38'. 31''$
Heiſt	7. 29. 18	$7^h. 38'. 33''$	Clare	24. 28	38. 46
Horsley	29. 28	38. 43	Sykes	24. 22	38. 40
Dunn	29. 48*		Shuckburgh	24. 25	38. 43
Dollond	29. 20	38. 35	Nikitin	24. 16	38. 34
Nairne	29. 20	38. 35	Williamſon	24. 11	39. 29
Maskelyne	29. 23	38. 38	Horsley	24. 28	38. 46
Londini			*Stockholmiae*		
Aubert	29. 1	38. 35	Wilke	$8^h. 41. 45$	38. 45
Canton	29. 15	38. 47	Wargentin	41. 47	38. 47
Hirſt	29. 18	38. 50	Ferner	41. 48	38. 48
Bewis	28. 17	38. 46	*Vpſaliae*		
Pariſiis			Bergman	$8^h. 40. 9$	38. 47
Bernoulli		38. 37	Melander	40. 12	38. 50
Meſſier		38. 45	Proſperin	40. 12	38. 50
Duſéjour		38. 43	Salenius	40. 15	38. 53.
Caſſini de Thury		38. 53		med.	$7^h. 38'. 43''$
Maraldi		38. 50	*Wardhus*		
Bory		38. 47½	P. Hell	$9^h. 34'. 11''$	7. 38. 29
Fouchy		38. 47½	*Caianeburg*	Diſſenſ.	− 14′
			Planman	9. 20. 45	7. 38. 44
				Diſſenſ.	+ 1

Heic

Heic autem primum obſeruare conuenit Longitudinem pro Wardhus a Pariſiis a me aſſumtam fuiſſe $1^h. 55'. 8''$, quum Rev. Pat. *Hell* eandem adprobare videatur, ex obſeruatione Eclipſeos Solis A. 1769. eandem inueni $1^h. 55'. 6''$ vel $7''$, qua igitur in vſum vocata diſſenſus momenti a Pat. *Hell* aſſignati a reliquis foret $12''$. Pro Grenouico quidem binas obſeruationes Cl. D. *Hitchins* et *Dunn* excludendas eſſe cenſui, quod a medio inter omnes obſeruationes pro hoc loco, ſumto, vltra viginti ſecunda diſcrepent, quum tamen reliquarum quinque obſeruationum diſſenſus decem ſecunda non ſuperet. Obſervationes autem Oxonienſes eam imprimis ob rationem attuli, vt pateret me in hoc examine inſtituendo nullo praeiudicio eſſe occupatum, quum inter obſeruationes Oxonienſes binae ſit, quae cum momento Rev. Pat. *Hell* optime conſentiunt. Immo ex magno numero obſeruationum pro contactu hoc interno quarum copia adhuc ſuppetit, nonnullae quidem inueniuntur, quae obſeruationi Pat. *Hell* fauent, ſimul tamen certum eſt, ex obſeruationibus heic excluſis, quintuplo maiorem eſſe numerum earum, quae momentum a P. *Hell* aſſignatum erroris arguunt, quam quae illud abſoluunt. Verum tamen plures obſeruationes heic congerere neceſſe non erat, quum id mihi propoſitum fuerit obſeruationes tantum conſulere factas in eiusmodi locis, quorum Longitudines Geographicae exacte eſſent cognitae. Certum igitur eſt, obſeruationem Rev. Pat. *Hell* pro contactu interno in ingreſſu a reliquis optimae

notae

notae obſeruationibus Europeicis per medium 14 vel 12 ſec. diſcrepare. Quae diſcrepantia vtrum ex errore quodam obſeruationis Wardhuſienſis originem ducat nec ne definire nolo? Si enim Rev. Pat. *Hell* rationem excogitare valeat, qua ſua obſeruatio cum reliquis ſupra allatis conciliari poſſit, id quidem me aegre non ferente fiet, donec autem id factum fuerit, ſine aliqua offenſione Rev. Pat. *Hell* diſſenſum hunc, nomine erroris in ſequentibus vt et hucusque feci, indigitabo. Indubitata tamen hinc ſequitur conſequentia, pro valore Parallaxeos inueſtigando momentum a Pat. *Hell* aſſignatum nequaquam vt vnice exactum in vſum vocari debere, quum in aliquali obſeruationum diſſenſu, regula ab Aſtronomis praeſcripta de medio ſumendo, vt tutiſſima ratio veritatem proxime attingendi, reſpici debeat.

24. Simili modo nunc obſeruationem Caianeburgi pro contactu externo inſtitutam ſub examen reuocare conuenit, vtrum cum reliquis contactus externi in egreſſu obſeruationibus conſentiat, nec ne? Quamuis autem hoc examen aeque certum haberi nequeat, ac illud quod pro contactu interno ingreſſus iam in medium protulimus, quum de Longitudinibus locorum non niſi cum praeciſione 5 ſecundorum perſuaſi eſſe poſſimus, valde tamen probabiliter hinc colligi poteſt obſeruationem Cel. *Planman* in defectu peccare, quum omnes reliquae obſeruationes eam hoc reſpectu erroris arguant. In hoc autem examine abſoluendo omnia momenta obſeruata ad Meridianum

num Petropolitanum reuocare placet, in quem vſum Longitudines locorum ſequentes a me adhibitae fuere:

Petropolis a Pariſiis	1^h.	$52'$.	$0''$	Orient.
Caianeburg	1.	41.	41	
Wardhus	1.	55.	8	
Gurjef	3.	18.	37	
Orenburg	3.	31.	10	
Pekin	7.	36.	23.	

Pro Caianeburg quidem Gurjef et Orenburg Longitudines adhibui, quas ex Eclipſi Solis Anno 1769, elicui vid. Tom. XV. Nouor. Comment., niſi quod Longitudinem Orenburgenſem 5 ſecundis auxerim, vtrum autem haec Longitudo adhuc $10''$ augmentum admittat, valde dubito; ſaltem ex obſeruatione Eclipſeos Solis in Orenburg facta, id nunquam probari poterit.

Locus et Nomen Obſeruat.	Moment. Obſeruat.	Obſeruat. ad Merid. Petropol. reducta.
Wardhus		
Borgrewing	$15^h. 45'. 38''.$	$15^h. 43'. 16''.$
P. Hell	45. 44	43. 22.
P. Sainowics	45. 45.	43. 23.
Petropoli		
P. Stahl		43. 14.
Lexell		43. 24.
Euler		43. 31.
P. Mayer		43 41.
Gurjef		
Lowits	17. 11. 6.	43. 22.
Orenburg		
Krafft	17. 23. 24.	43. 32.
Caianeburg	Med.	$15^h. 43'. 25''.$
Planman	15. 32. 27.	43. 7.
	differ.	$- 18''.$

Quamuis hinc pateat obſeruationem Caianeburgenſem a reliquis per medium $18''$ differre , tamen in eam procliuior ſum ſententiam , ipſum hoc medium 3 ſecundis a veritate aberrare poſſe , ita vt error obſeruationis Caianeburgenſis circiter $15''$ aeſtimari queat. Sed de abſoluto valore huius erroris ſolliciti non ſumus , ſufficit quod generaliter euictum dederimus iſtam obſeruationem erroris cuiusdam ſuſpicionem haud effugere poſſe. Interim tamen ſi quis

omnes

omnes reliquas obſeruationes pro contactu externo in fauorem obſeruationis Caianeburgenſis pro erroneis declarare velit, ad eum conuincendum ſequens proponere licebit argumentum vix vlli exceptioni obnoxium. Notum eſt Cel. D. *Rumovski* in Kola non obſeruaſſe contactum externum, certo tamen vidiſſe quod hic contactus tempore $15^h. 53'. 31''$. nondum tranſiiſſet, comparetur igitur hoc momentum cum obſeruatione Cel. *Planman* ſaepius commemorata et inuenietur differentia meridianorum inter Caianeburg et Kola $21'. 20''$, quae tamen ex obſeruata Eclipſi Solis tantum habetur $21'. 1''$, Longitudo enim Kolae a me inuenta eſt $2^h. 2'. 42''$. Etſi iam concederem veriſimile eſſe, vt Longitudo pro Kola $10''$ ſit augenda, eaque pro Caianeburg forſan 5 ſec. minuenda; quum tamen ex altera parte probabiliter concludere licet, verum momentum contactus externi pro Kola ſaltem quinque ſecundis ſerius incidiſſe quam momentum a Celeb. *Rumovski* notatum $15^h. 53'. 31''$; ſatis omnino certe colligere poſſumus obſeruationem Cel. *Planman* pro contactu externo errori ad minimum $10''$ eſſe obnoxiam. Id enim vnusquisque facile concedet, multo magis probabile eſſe, vt Cel. *Planman* pro contactu externo errorem commiſerit decem ſecundorum, quam vt obſeruatio Cel. *Rumovski* pro fine Eclipſeos Solis, ex qua ſcilicet Longitudo Kolae deducta eſt, integris viginti minutis ſecundis ſit erronea.

25. Reſpectus itaque ſi habeatur horum errorum, quibus obſeruationes in Wardhus et Caiane-

burg factae, obnoxiae videntur, perſpicuum ſane fiet valorem medium Parallaxeos, quem ſupra elicui, ſumma gaudere probabilitate; vt eius veritas tamen eo magis confirmetur et ſtabiliatur, nunc haud incongruum erit exponere, quinam pro Parallaxi inveniantur valores, ſi iuxta modum § 7. expoſitum obſeruationes in diuerſis locis pro ingreſſu et egreſſae factae inter ſe combinentur, indeque deducti valores pro duratione tranſitus per chordam V M v, comparentur cum durationibus tranſitus in America obſeruatis. Pro contactu autem interno in ingreſſu, adhibebimus obſeruationes Grenouici, Pariſiis, Stockholmiae et Vpſaliae factas, et pro contactu interno in egreſſu obſeruationes Wardhuſiis, Gurjef, Orenburgi et Pekini inſtitutas, quas omnes ad meridianum Pariſinum reducemus, adhibitis differentiis Meridianorum iam ſupra expoſitis. Hinc vero ſequentes eliciuntur valores temporum per chordas V M et v M, vbi maioris compendii cauſſa correctiones y et ν iam prorſus omiſimus.

Tab. XVII Fig. 4

	Temp. per V M	Obſeruatio ad Merid. Pariſ. reducta
Pro Pariſiis	$= T + 49,79.\pi$	$7^h. 38'. 45''$
Grenouico	$= T + 49,70.\pi$	38. 39
Stockholmia	$= T + 48,94.\pi$	38 54
Vpſalia	$= T + 48,89.\pi$	38. 56
Oxonia	$= T + 49,63.\pi$	7. 38. 41

vbi

vbi notandum eſt, a me in vſum vocata fuiſſe momenta a Celeb. Viris *Maſkelyne*, *Meſſier*, *Wargentin Bergman* et *Sykes*, obſeruata.

	Temp. per v M	Obſeruat. ad Merid. Pariſ. reducta
Pro Wardhus	$= T + 32,06 . \pi$	$13^h . 32' . 17''$ P. *Hell*
Gurjef	$= T + 45,41 . \pi$	13. 34. 12
Orenburg	$= T + 43,77 . \pi$	33. 56 *Krafft*

Pro Gurjef quidem momentum medium, inter iſta, quae a Cel. *Lowits* et Cl. *Inochodzow* aſſignata habentur, in vſum vocaui. Vt autem melius intelligatur quomodo comparatio ſupra commemorata inſtituenda ſit, id vnico exemplo illuſtrare ſufficiet; quum igitur ſit,

Temp. per V M Pariſiis $= T + 49,79 . \pi$
Temp. per v M Wardhus $= T + 32,06 . \pi$

erit Temp. per V M $v = 2T + 81,85 . \pi = 5^h . 53' \; 32''$, quod ſi nunc haec aequatio combinetur cum illa pro Inſula Regis Georgii inuenta:

$$2T - 84,01 . \pi = 5^h . 30' . 3'',5,$$

inde prodibit

$$165,86 . \pi = 23' . 28'',5 = 1408'',5,$$

ex quo fit $\pi = 8'',49$.

26. Valores igitur Parallaxeos per combinationem obſeruationum ſupra allatarum inuentos, ſequenti Tabula ob oculos ponere ſufficiet:

Valores Parallaxeos ex comparatione obſervationum pro

cum	Inſula R. Georg.	St. Ioſeph.	Arce Prin. Walliae
Wardhus et Paris	8″, 49	8″, 53	8″, 57
Grenouico	8, 54	8, 59	8, 69
Stockholmia	8, 48	8, 52	8, 54
Vpſalia	8, 47	8, 50	8, 51
Oxonia	8, 52	8, 58	8, 66
Gurjef et Pariſ.	8, 50	8, 54	8, 58
Grenouico	8, 54	8, 59	8, 68
Stockholmia	8, 49	8, 53	8, 55
Vpſalia	8, 48	8, 51	8, 53
Oxonia	8, 53	8, 58	8, 66
Orenb. et Pariſ.	8, 49	8, 52	8, 55
Grenouico	8, 53	8, 58	8, 65
Stockholmia	8, 48	8, 51	8, 52
Vpſalia	8, 47	8, 50	8, 50
Oxonia	8, 52	8, 56	8, 63
med.	8, 50	8, 54	8, 59

Si nunc ex valoribus his mediis, ſingulorum probabilitates reſpectiue proportionales aeſtimando numeris 3, 2, 1, medium ſumatur; prodit valor medius Parallaxeos 8″, 53 circiter, vnde concluſio noſtra ſupra inuenta egregie confirmatur. Videntur autem concluſiones heic inuentae eo maiorem mereri fidem, quod optime inter ſe conſentiant.

27. In eorum gratiam, qui modo vulgariter recepto valorem Parallaxeos quaerere praeoptant, effectus

fectus Parallacticos pro ſingulis obſeruationibus quarum in praecedentibus vſum fecimus, ſub hypotheſi Parallaxeos 8″, 5 computatos, ſequenti Tabula exponere iuuat, vbi contactus internos pro ingreſſu et egreſſu numeris II. et III. reſpectiue deſignabo, externum autem pro egreſſu numero IV. indigitabo:

Effectus Parallactici ſub hypotheſi Parallaxeos 8″, 5.

	Cont. II.	Cont. III.	Cont. IV.
Arx. Pr. Walliae	+4′. 10″, 3	+ 38″, 8	
St. Ioſephus	+ 16, 7	+4. 48, 4	
Inſula R. Georgii	−5. 35, 2	+6′. 18, 9	
Wardhus	+6. 29, 4	−4. 32, 5	−4′. 10″, 8.
Caianeburg	+6, 43, 5	- - - -	−4. 35, 3.
Kola	+6, 31, 4	−4. 41, 6	
Lutetia Pariſ.	+7, 3, 2	- - - -	
Grenouic.	+7, 2, 5	- - - -	
Stockholmia	+6. 56, 0	- - - -	
Vpſalia	+6. 55, 6	- - - -	
Oxonia	+7. 1, 9	- - - -	
Gurjef	- - - -	−6. 26, 0	
Orenburg	- - - -	−6. 12, 1	

28. Antequam vero iam ad concluſiones noſtras finales progrediamur, haud praeter rem erit, ſequentem heic adponere Tabulam, qua valores pro duratione Geocentrica ex variis hypotheſibus Parallaxeos deducti repraeſentantur:

Duratio

Duratio Geocentrica pro hypotheſi Parallaxeos,

	$\pi = 8'', 30$	$= 8'', 40$	$= 8'', 50$	$= 8'', 60$	$= 8'', 70$
Arx. Pr. Walliae	$5^h.41'.57'',2$	$5^h.41'.54'',7$	$5^h.41'.52'',2$	$5^h.41'\,49'',7$	$5^h.41'.47'',2$
St. Ioſephus	46, 4	49, 6	52, 8	56, 0	59, 2
Inſ. Reg. Georgii	40, 8	49, 2	57, 6	42. 6, 0	42 14, 4
Wardhus	42. 27, 7	42. 19, 9	42. 12, 1	4, 3	41. 56, 5
Caianeburg	41. 55, 7	41. 47, 7	41. 39, 7	41. 31, 7	23, 7
Kola	42. 20, 1	42. 12, 1	42. 4, 2	56, 3	48, 4
Wardhus. . Par.	42. 12, 6	4, 5	41. 56, 3	48, 1	39, 9
Grenouic.	19, 4	11, 2	42. 3, 0	54, 9	46, 7
Oxonia	18, 1	9, 8	1, 6	53, 5	45, 3
Stockholmia	10, 7	2, 6	41. 54, 5	46, 4	38, 3
Vpſalia	9, 1	1, 0	52, 9	44, 8	36, 7
Gurjef. . Pariſ.	16, 6	7, 1	57, 6	48, 1	38, 6
Grenouic.	23, 6	14, 1	42. 4, 6	55, 0	45, 5
Oxonia	22, 2	12, 7	3, 2	53, 6	44, 1
Stockholmia	14, 9	5, 5	41. 56, 0	46, 6	37, 1
Vpſalia	13, 4	4, 0	54, 5	45, 1	35, 6
Orenb. . . Pariſ.	14, 4	5, 0	55, 7	46, 3	36, 9
Grenouic.	21, 1	11, 8	42. 2, 4	53, 1	43, 7
Oxonia	19, 7	10, 4	1, 0	51, 7	42, 3
Stockholmia	12, 4	3, 2	41. 53, 9	44, 6	35, 3
Vpſalia	10, 9	1, 6	52, 3	42, 1	33, 8

29. Ex iis quae in praecedentibus fuſius diſputata ſunt, ſequentes nunc deducere licet concluſiones:

I°. Parallaxin Solis 8'', 3 certe eſſe maiorem, minorem tamen quam 8'', 7.

II°.

II°. Cum ſumma probabilitate ſtatui poſſe, valorem Parallaxeos etiam 8″, 4 ſupergredi, nec tamen ad 8″, 6 increſcere.

III°. Valorem Parallaxeos Solis aequatoreae tempore tranſitus, ſatis exacte definiri per 8″, 50, nec vllam tamen abſurditatem inuoluere, ſi hic valor tribus aut quatuor partibus centeſimis ſecundi augeatur vel minuatur.

Quod primam harum concluſionum attinet, ſufficiet tantum heic oſtendere Parallaxin 8″, 3 certo eſſe maiorem, ſimilia enim incommoda quae valorem Parallaxeos 8″, 3 premunt, etiam pro valore 8″, 7 ſe produnt. I°. Igitur quum valor Parallaxeos 8″, 3 tantum ex comparatione obſeruationis Caianeburgenſis cum illa ad Sinum Hudſonis facta, deducatur et ſupra oſtenſum ſit, durationem tranſitus pro Caianeburg, quindecim, vel ad minimum decem ſecundorum augmentum admittere; inde facile colligitur ex comparatione iſta maxime erroneum prodire Parallaxeos valorem, quinque enim ſecundorum augmentum in duratione tranſitus pro Caianeburg, in valore Parallaxeos augmentum $\frac{1}{10}$ ſecundi producit. II°. Si admitteretur valor Parallaxeos 8″, 3, ſtatuendum eſſet, aut durationem Geocentricam ex obſeruationibus ad Sinum Hudſonis et in Caianeburg factis, elicitam eſſe veram, aut eam pro conſenſu cum reliquis obſeruationibus Americanis obtinendo, aliquantum eſſe minuendam. Si prius, duratio tranſitus pro Inſula Regis Georgii aſſigna-

ta 16″ eſſet augenda, duratio autem pro St. Ioſepho Californiae 10″ augmentum pateretur, quod pro inſigni abſurdo habere licet. Sin autem poſterius ſtatuatur, obſeruationes pro egreſſu in Wardhus, Gurjef, et Orenburg factae, praeter omnem probabilitatem redderentur erroneae, iam enim pro duratione Geocentrica $5^h\ 41'.\ 57''$, obſeruatio Wardhuſienſis pro egreſſu ſaltem, 16″, Gurjefuenſis 20″ Orenburgenſis 17″ fierent erroneae, ſi igitur in duratione pro tranſitu St. Ioſephi in California obſeruato error 5″ admitteretur, omnes errores ſupra allati adhuc 7″ augerentur. Quod autem in obſeruatione Gurjefuenſi error 30″ vel iu Orenburgenſi 24″ deprehenderetur, ne minimam quidem habet veritatis ſpeciem. III°. Ex valoribus pro duratione Geocentrica ſub hac hypotheſi Parallaxeos inuentis, liquet maximum eorum diſſenſum vsque ad 45″ aſſurgere, quae aberratio etiam ſi per quatuor momenta obſeruata diſtribuenda videatur, tamen pro abſurda haberi meretur; demonſtrari enim poteſt inter quatuor huiusmodi momenta, bina ſaepius dari in quibus maiores quam quinque ſecundorum errores ſuſpicari non licet. IV°. Obſeruationes Petropoli pro contactu interno factae hinc vno minuto primo fierent erroneae, qualem errorem ipſis ineſſe nobis quidem perſuaderi non poteſt. Fatemur quidem has obſeruationes erroribus 40 ſec. eſſe obnoxias; maxime tamen iniquum eſſe arbitramur, easdem erroris integri minuti primi arguere velle, et ſuſpicio Cel. *de la Lande* in Diſſertatione Eius de

Paral-

Parallaxi, de errore obſeruationis Petropolitanae prolata omni deſtituitur veriſimilitudine, quod quidem hoc modo facile euincitur. Supponamus in aſſignando tempore Penduli, errorem integri minuti primi pro contactibus internis Petropoli eſſe commiſſum; ſtatuendum igitur erit, aut momenta pro contactibus externis integro minuto quoque eſſe mutanda, aut eadem quemadmodum prolata ſunt, recte ſe habere. Prius autem abſurdum eſſe per §. 24. euincitur, poſteriori igitur ſuppoſitione adoptata mora inter binos contactus fiet fere 19′, quae certe iuſto maior eſt.

30. De *ſecunda* concluſione noſtra tenendum eſt, eam praeprimis inde confirmari, quod I°. valores Parallaxeos ex comparatione durationum ad Sinum Hudſonis et in California deducti, contineantur his limitibus 8″, 35 et 8″, 61, vnde maxima cum probabilitate colligere licet Parallaxin 8″, 40 ſupponi debere maiorem. II°. Obſeruationes Wardhuſienſes et Caianeburgenſes vtcunque inter ſe inſigniter diſcrepent, tamen cum obſeruatione ſuper Inſula Reg. Georgii comparatae, valores praebent pro Parallaxi, qui proxime circa hos limites 8″, 4 et 8″, 6 ſubſiſtunt, vnde quum vtraque obſeruatio ſaltem decem ſecundorum correctionem admittat, ſumma probabilitate gaudet Parallaxin inter hos limites 8″, 4 et 8″, 6 contineri, praeſertim quia in duratione tranſitus pro Inſula Reg. Georgii maiorem quam quinque ſecundorum errorem ſuſpicari fas non eſt. III°. Maximus diſſenſus inter valores duratio-

nis Geocentricae pro hypotheſi Parallaxeos $8''$, 4 ad $30''$ aſſurgit, quem adhuc pro nimio recte habere licet, praeſertim quia caſus dantur vbi totus hic error in vnica fere obſeruatione, Gurjeſuenſi ex. gratia, eſſet quaerendus. Pro hypotheſi Parallaxeos $8''$, 6 diſſenſus non habebitur niſi $30''$, qui ex obſeruationibus in Wardhus et Caianeburg factis prodit; quum igitur hunc errorem in ſola obſeruatione Caianeburgenſi quaerere non liceat, ſed certum omnino ſit obſeruationem R. Pat. *Hell* a ſuſpicione erroris liberari non poſſe, inde inferre poſſumus Parallaxin quoque $8''$, 6 eſſe minorem.

31. Denique *tertiam* noſtram concluſionem quod attinet, argumenta pro ea demonſtranda repetere, heic eo minus eſt neceſſe; quod ex disquiſitionibus noſtris ſupra inſtitutis euidenter pateat Parallaxin Solis ſtatui poſſe quam proxime $= 8''$, 50 vel ſi placet $8''$, 53. Dixi autem me non repugnante pro Parallaxi adhiberi poſſe $\pi = 8''$, 46, quia hic valor ex ſolis obſeruationibus Americanis inter ſe comparatis colligitur, et quum obſeruationes ad Sinum Hudſonis et in California factae ſingularia prae ſe ferant veritatis criteria, in valore Parallaxeos determinando, illis merito inſigne tribuendum eſt meritum. Eo tamen non obſtante, fortiores omnino nobis videntur eſſe rationes, quae Parallaxin $8''$, 46 aliquanto maiorem eſſe vrgent, quam quae in huius valoris fauorem adduci poſſunt et valor quidem a nobis adhibitus $\pi = 8''$, 50 obſeruationibus Americanis tam bene ſatisfacit, vt maiorem conſenſum

ſenſum deſiderare non poſſimus. Erit igitur nobis *Parallaxis Solis horizontalis aequatorea pro tempore tranſitus* = 8″, 50 ex quo illa *Parallaxis aequatorea, quae diſtantiae mediae Solis a terra conuenit, prodibit* 8″, 63 vel ſi potius Parallaxi Polari vti placet, illa inuenietur 8″, 59, ſub ea ſcilicet hypotheſi, quod radius aequatoris ſtatuatur eſſe ad ſemiaxem telluris vt 201 ad 200. Limites autem intra quos valor Parallaxeos Solis mediae cadere concipiendus eſt, ſtatuere licebit 8″, 59 vel 8″, 67, ſaltem iidem vltra 8″, 57 et 8″, 69 prorogari non poſſe videntur.

32. Nunc quidem obſcurum haud eſſe poteſt, quid de valore Parallaxeos a Cel. *de la Lande* inuento ſtatuendum ſit, maxime ſcilicet probabile eſſe, quod is iuſto minor ſit et quidem a veritate circiter decima parte ſecundi diſcrepet. Atqui de hoc errore in determinatione Cel. *de la Lande* commiſſo, multis heic agere ſuperfluum foret, ſufficiet nobis oſtendiſſe hanc determinationem eo minus pro vera haberi poſſe, quod valores Parallaxeos ex ſingulis obſeruationibus a Cel. hoc Viro deducti, haud parum a veritate recedant. Sequenti igitur Tabula valores pro Parallaxi tam a Cel. *de la Lande* inuentos, quam veros ſimul conſpectui exponamus:

	Wardhus		Caianeb.		Arx. Prin. Walliae		St. Ioſeph	
	C. la Land.	ver.	*C. la Land.*	ver.	*C. la Land.*	ver.	*C. la Land*	ver.
Arx. Pr. Walliae	9, 08	8, 98	8, 49	8, 41				
St. Ioſeph	8, 81	8, 80	8, 43	8, 52	8, 56	8, 63		
Inſ. R. Georgii	8, 72	8, 72	8, 52	8, 53	8, 55	8, 60	8, 53	8, 56.

Notandum autem eſt valores pro St. Ioſepho non prorſus eosdem heic occurrere, ac quos ſupra §. 18. inuenimus, partim quia nunc cum Cel. *de la Lande* momenta pro iſto loco a Cel. *Chappe* obſeruata in vſum vocauimus, partim etiam quod effectus Parallacticos a prioribus aliquantum diuerſos adhibuimus, heic enim eiusmodi effectus Parallactici adhibendi fuerunt, qui Elementis a Cel. *de la Lande* aſſumtis conuenirent. Ex Tabula vero heic allata facile colligi poteſt, quod ſecluſa prima columna, medium ex reliquis foret 8″, 54; tum vero ſimul patet conſenſum obſeruationis Caianeburgenſis cum Americanis tantum non eſſe ac ſibi perſuaſit Cel. *de la Lande*, ideoque obſeruationi Caianeburgenſi prae Wardhuſienſi nouies maiorem probabilitatem tribui non poſſe. Aberratio autem iſta in determinatione Cel. Viri commiſſa, potiſſimum originem ducit, ex ipſa Methodo, ſecundum quam computum ſuum inſtituit; ſcilicet pro contactu interno ingreſſus ad Sinum Hudſonis obſeruati inuenit effectum Parallaxeos + 4′. 9″, 8, quem inuenire debuiſſet + 4′. 6″, 0, pro contactu autem interno egreſſus + 0′. 37″, 0, qui eſt + 38″, 9. Propter hos autem effectus Parallacticos licet non multum a veris aberrantes factum eſt, vt Cel. *de la Lande* ex comparatione obſeruationum in America factarum inter ſe, iuſto minores inueniret valores Parallaxeos; contra vero ex comparatione obſeruationis Caianeburgenſis cum illa ad Sinum Hudſonis facta valorem iuſto maiorem, quae quod ſatis exacte conſentiret, cum binis reliquis

reliquis valoribus ex obſeruatione iſta Caianeburgenſi deductis, inde Cel. Vir ſtatim collegit ſingularem iſtum conſenſum obſeruationis Caianeburgenſis cum Americanis, certiſſimo eſſe indicio valorem Parallaxeos mediae a ſe bene eſſe determinatum. Nunc vero ſi calculos ſuos pro effectibus Parallacticis modo commemoratis rite examinare velit, ſimulque ea expendere quae ſupra de errore obſeruationis Caianeburgenſis adduximus; non dubitamus quin facile concedet valorem Parallaxeos a ſe adoptatum augmentum admittere, ſaltem fateri cogetur computandi Methodum a ſe adhibitam a ſumma exactitudine et praeciſione multum diſtare.

33. Quod Parallaxin Solis cum aliqua latitudine definiendam eſſe cenſuerimus, nemo mirabitur, cui in mentem venerit obſeruationes Aſtronomicas, perinde ac quantitates Geometricas pro abſolute exactis haberi non poſſe. Omnes igitur illi Parallaxeos valores vt probabiles ſpectari merentur, quibus melioris notae obſeruationes imprimis Americanae pro Sinu Hudſonis et Sto. Ioſepho, non vltra 5 ſecunda redduntur erroneae. Neque certo quidem determinare valemus, quousque limites Parallaxeos mediae prorogari poſſint, interim vti ſupra iam innuimus, probabile nobis videtur hos limites vltra 8″, 57 et 8″, 69 extendi non poſſe. Ratio autem huius noſtrae aſſertionis ſequens eſt: Ex comparatione obſeruationum in Lapponia factarum cum illa pro Inſula Regis Georgii, patet, quod nulla habita ratione correctionum quas obſeruationes admitte-

mittere poſſunt, limites ipſius π ſint $8'', 39$ et $8'', 59$. Conf. §. 18. Quodſi nunc in vtraque obſeruatione Wardhuſienſi ſcilicet et Caianeburgenſi error 10 ſecundorum admittatur, hi limites fient $\pi = 8'', 45$ et $\pi = 8'', 53$, quumque fieri poſſit vt in duratione pro Inſula Regis Georgii incertitudo adſit 5 ſecundorum, exiſtimauimus ſine errore pro Parallaxi media hos praeſcribi poſſe limites $8'', 57$ et $8'', 69$. Vtrum vero determinatio Parallaxeos Solis ex nouiſſimo tranſitu Veneris deducenda tantam admittat praeciſionem, vt dubium centeſimam ſecundi partem non ſupergrediatur, iure meritoque dubitamus. Scilicet ad tantam exactitudinem obtinendam omnino requireretur, vt durationes in Inſula Reg. Georgii, Caianeburgi et Wardhuſiis obſeruatae non plus quam duobus ſecundis eſſent incertae, talem autem praeciſionem ne ſperandam quidem fuiſſe cenſemus. Fatemur igitur valde dubia nobis videri, quae *R. P. Hell* in Opuſculo de Parallaxi Solis profert, de praeciſione Parallaxeos, quam ex obſeruationum in Wardhus et ſuper Inſula Otahitee factarum comparatione deduxit. Etſi enim *R. P. Hell* concederemus obſeruationem Wardhuſienſem ne vno quidem minuto ſecundo erroneam eſſe, tamen nullam concipere poſſumus rationem, cur *P. Hell* eandem exactitudinem tribuat durationi pro Inſula Reg. Georgii inuentae. Recordari enim debuiſſet momenta contactuum pro hoc loco adhibita, non eſſe obſervata, ſed per medium ex obſeruatis deducta; quum igitur vnius obſeruatoris momentum multo magis

eſſe

eſſe poſſit erroneum quam alterius, liquet omnino de duratione pro Inſula Regis Georgii aliquam remanere incertitudinem. Porro etiamſi Rev. Pat. *Hell* largiri vellemus momenta haec pro Inſula Reg. Georgii veritati perfecte conſentire; tamen minime inde ſequeretur ex hac obſeruatione et Wardhuſienſi valorem Parallaxeos cum praeciſione centeſimae partis ſecundi cognoſci; hoc enim concedi non poſſe videtur antequam a Rev. Pat. *Hell* demonſtratum fuerit, obſeruatorem ſuper Inſula Regis Georgii conſtitutum, qui cum Pat. *Hell* eodem acumine viſus gaudens, aeque fortem adhibuiſſet Tubum ac quo R. P. *Hell* vſus eſt, haec praeciſe momenta pro contactibus internis vsque ad praeciſionem duorum ſecundorum inuenire debuiſſe, quae ex momentis reuera obſeruatis medio capto deducuntur. Denique ſi ex obſeruatione Rev. P. *Hell* exacte ſequatur Parallaxis media 8″, 7 quemadmodum ipſe contendit, ſcire quidem optaremus an idem valor Parallaxeos ex Sociorum Ipſius obſeruationibus deduci poſſit et quaenam momenta pro Inſula Reg. Georgii adhibere debeamus, vt obſeruationes R. P. *Sainouics* et Cl. *Borgreuing*, cum momentis a P. *Hell* obſeruatis perfecte conciliari queant?

35. Antequam huic de Parallaxi Solis disquiſitioni finem imponamus, haud inutile erit oſtendere quales prodeant obſeruationum correctiones ex hypotheſi $\pi = 8'', 50$, hunc autem in finem neceſſum eſt, vt primum duratio Geocentrica pro hac hypotheſi determinetur, tum vero inde deducatur

tempus medii tranſitus pro loco quodam cognito ex. cauſſa Lutetia Pariſiorum. Si igitur ex valoribus Durationis Geocentricae pro hypotheſi $\pi = 8'', 50$. §. 29. allatis, medium ſumatur, habebitur duratio Geocentrica inter contactus internos $5^h. 41'. 57''$, quam tamen in fauorem obſeruationum in America factarum ſtatuere licebit $5^h. 41'. 56''$, ita vt ſemisſis huius durationis ſit $2^h. 50'. 58''$. Quodſi nunc tempus verum contactus interni pro Pariſiis ſtatuatur $7^h. 38'. 43''$ et reſpectus habeatur effectus Parallactici, qui pro hoc contactu eſt $+ 7'. 3'', 2$, prodibit tempus verum medii tranſitus Pariſinum $10^h. 36'. 44''$. Quoniam vero haec determinatio dubia videri poſſet, ſi duratio Geocentrica aliquot ſecundorum mutationem admitteret, vel momentum contactus interni pro Pariſiis a nobis non recte eſſet ſtabilitum, hoc tempus medii tranſitus etiam alia ratione inueſtigabimus. Conferamus ſcilicet obſeruationes pro ingreſſu Pariſiis, Grenouici, Oxoniae Stockholmiae et Vpſaliae factas, cum obſeruationibus pro egreſſu in Wardhus, Gurjef et Orenburg inſtitutis, indeque obtinebimus non ſolum valores temporis a Venere impenſi per chordam V M v ex obſeruationibus deductos, ſed etiam differentiam temporum per V M, v M ex effectibus parallacticis deducendam, vnde ſingula tempora per V M et v M determinari poſſunt, quo ipſo tempus medii tranſitus ſponte innoteſcit. Facta autem huiusmodi combinatione, ſequentes inuenimus determinationes pro tempore vero medii tranſitus Pariſino:

Tab. XVIII Fig. 4.

ex

ex Wardhus et Paris	$10^h. 36'. 46''$	ex Gurjef et Paris	$10^h. 36'. 47''$
Grenouic.	43	Grenouic.	45,5
Oxonia	43,5	Oxonia	46,5
Stockholmia	47	Stockholmia	48,0
Vpſalia	48	Vpſalia	49
med.	10. 36. 45,5	med.	10. 36. 47

ex Orenburg et Paris.	$10^h 36'. 46''$
Grenouic.	42,5
Oxonia	43,5
Stockholmia	47
Vpſalia	48
med.	10. 36. 45,5.

Hinc ex omnibus medium ſumendo, prodit tempus medii tranſitus Pariſinum $10^h. 36'. 46''$, quod tantum duobus ſecundis a prius inuento differt, quare ſine errore ſenſibili vt ſupra pro hoc momento adhibere licet $10^h. 36'. 44''$. Tempore autem medii tranſitus inuento, nunc etiam Longitudines locorum in America determinari poterunt, indeque vera contactuum momenta inueſtigari. Pro Inſula Regis Georgii ſupponamus vera momenta contactuum fuisſe, $21^h. 44'. 2''$ pro contactu interno in ingreſſu, et $3^h. 14'. 6''$ pro contactu interno in egreſſu, quae ſcilicet inueniuntur ſi obſeruationibus Cel. *Green* prae reliquis ibidem factis duplex tribuatur probabilitas, hinc igitur erit tempus per $VMv = 5^h. 30'. 4''$ et differentia temporum per MV, $Mv = 44''$, ex quo deducitur tempus medii tranſitus pro hoc loco

 $0^h. 29'$.

$0^h. 29'. 26''$ ideoque Longitudo eius occidentalis a Pariſiis $10^h. 7'. 18''$; quodſi vero ſimpliciter ex momentis obſeruatis media ſumantur, prodibit haec Longitudo $10^h. 7'. 16''$ de qua diſcrepantia non multum laboramus. Similiter pro reliquis locis Americanis tempora medii tranſitus indeque Longitudines locorum deducuntur, quos calculos heic recenſere ſuperfluum eſſet. Pro locis autem Europeicis ex cognitis Longitudinibus locorum, primum tempora medii tranſitus determinauimus, deinde vero ope durationis Geocentricae et effectuum Parallacticorum, vera momenta contactuum pro ſingulis locis elicuimus. Concluſiones autem ipſas iam ſuccincte ſequenti repraeſentabimus Tabella:

Locus Obſeru.	Longitud. a Pariſiis.	Temp. med. tranſit.	Mom. Cor. Cont. II.	Mom. Cor. Cont. III.	Mom. Cor. Cont. IV.
	Occid.				
Otahitee	$10^h. 7'. 18''..16''$	$0^h. 29'. 26''..28''$	$20^h. 44'. 3''..5''$	$3^h. 14'. 5''. 7''$	
St. Joſeph.	7. 28. 4.	3. 8. 40.	0. 17. 25.	5. 54. 50½	
Fort. Pr. Wall	6. 26. 14.	4. 10. 30.	1. 15. 22.	7. 0. 49	
	Orient.				
Wardhus	1. 55. 8..6	12. 31. 52..50	9. 34. 25..23	15. 27. 23. 21	$15^h. 45'. 44''. 42''$
Caianeburg	1. 41 41.	12. 18. 25.	9. 20. 44.		15. 32. 41
Kola	2. 2. 42.	12. 39. 26.	9. 41. 57.	15. 35. 6	
Lut. Parif.	0. 0. 0.	10. 36. 44.	7. 38. 43.	- - -	
Grenou	0. 9. 16 Occ.	10. 27. 28.	7. 29. 28.	- - -	
Oxonia	0. 14. 19.	10. 22. 25.	7. 24. 25.	- - -	
Stockholm.	1. 2. 53. Or.	11. 39. 37.	8. 41. 43.	- - -	
Vpſalia	1. 1. 14.	11. 37. 58.	8. 40. 4.	- - -	
Gurjef	3. 18. 37.	13. 55. 21.	- - -	16. 52. 45.	17. 11. 6
Orenburg	3. 31. 10.	14. 7. 54.	- - -	17. 5. 4.	17. 23. 23

Probe

Probe autem heic notandum eſt, haec momenta correcta tantum valere ſub ſequentibus hypotheſibus, I°. quod Parallaxis ſit 8″, 5; II°. quod valor durationis Geocentricae aequetur $5^h. 41'. 56''$, vbi quidem vix duorum ſecundorum error metuendus eſt; III°. ſi tempus obſeruationis Pariſinae a nobis recte ſit aſſumtum, quod omnino ſumma gaudet probabilitate, conf. §. 23; IV°. quod Longitudines locorum a nobis adhibitae ſint exactae, id autem de plurimis valere nullum eſt dubium; V°. denique quod Diameter Veneris ſit 57″, 2, nam hac Diametro immutata, momenta contactuum externorum mutari quoque debent. Concluſiones igitur heic allatas non quidem pro veritatibus apodictis venditare audeo, vnius vel alterius ſecundi aberrationem lubenter admittens, praeprimis quia valorem Parallaxeos aliquantula parte augeri vel imminui poſſe iam conceſſerim, vtrum vero hae determinationes aliqua gaudeant probabilitate vel minus, peritis harum rerum iudicibus diiudicandum relinquo. Id certe a me impetrare non potui, vt contra omnem veriſimilitudinem, in fauorem vnius obſeruationis, omnes reliquas erroris accuſarem, vel vt crederem quempiam Aſtronomum vtcunque exercitatum aliqua infallibilitatis praerogatiua prae caeteris inſtructum eſſe.

35. Stabilito valore Parallaxeos, de correctionibus Elementorum Aſtronomicorum quae adhibuimus, pauca adiicienda reſtant. Quod igitur *primum* attinet tempus verum coniunctionis Solis et Veneris, id ex tempore medii tranſitus iam inuento de-

 duci-

ducitur, ſubtrahendo $22'. 41''$, ita vt hinc conſtet coniunctionem Solis et Veneris contigiſſe, tempore Pariſino vero D. 3. Iun. 1769. $10^h. 14'. 3''$, quod momentum ſaltem cum praeciſione trium aut quatuor ſecundorum pro exacto haberi debet. II°. De latitudine Veneris Geocentrica ex durationibus tranſitus nihil certi definiri poteſt, niſi quantitas diametri Solis exacte ſit definita. Obſeruationes autem Micrometro obiectiuo factae circa diſtantias marginum Solis et Veneris, probant diſtantiam minimam centrorum Solis et Veneris, pro hypotheſi Diametri Solis $31'. 31''$, ſtatui debere $10'. 10''$ vel $10'. 9''$, conf. Tom. XVI. Nouor. Comment., nihilominus tamen fatendum eſt, his valoribus pro diametro Solis et diſtantia minima centrorum, in vſum vocatis, prodire durationem Geocentricam $5^h. 42'. 6''$, quae ab obſeruata ſaltem $10''$ differret. Verum Cel. *de la Lande* vt huiusmodi diſſenſum tolleret, diametrum Solis adhuc 3 ſecundis diminuendam eſſe contendit, quae diminutio ſi admittatur, nullum eſt dubium quin valor diſtantiae minimae ex obſeruationibus durationum, perinde ac ex menſuris Micrometro captis, prodeat $10'. 8''$, ita vt hoc modo perfectus harum obſeruationum conſenſus obtineatur. Licet vero hanc diminutionem plane negare non ſuſtineamus, maior tamen eſſe videtur, quam vt admitti queat, niſi menſuris actualibus Micrometris inſtitutis plenius confirmetur. Quare dubii omnino ſumus, an non potius aſſenſus praebendus ſit eorum ſententiae, qui contendunt atmoſphaeram Veneris aliquid contuliſſe, ad

ad durationem tranſitus inter contactus internos coarctandam, praeſertim quum ipſa phaenomena circa contactus internos in variis locis obſeruata, hanc opinionem haud parum confirment. Diſtantiam igitur centrorum minimam tantisper 10′. 9″ ſtatuamus, donec eius quantitas exactior argumentis indubitatis ſtabiliri queat, hinc autem fiet Latitudo Veneris Geocentrica tempore coniunctionis 10′. 15″, 7, vnde demum deducitur Latit. Veneris Heliocentrica pro eodem tempore 4′. 4″, 9, quumque locus coniunctionis ſit 2ˢ. 13°. 27′. 21″ habebitur locus nodi Veneris 2ˢ. 14°. 36′. 23″. III°. Quod diametrum Veneris attinet, perſuaſum quidem mihi habeo eam 57″, 2 ſtatui poſſe aequalem, neque tamen abſurdum aliquod implicaret, ſi decima vel quinta parte ſecundi augeatur, tantus enim eſt diſſenſus obſeruationum pro mora Veneris inter binos contactus externum et internum, vt praeciſio maior quam $\frac{1}{5}$ ſecundi vix ſperari queat. Valor autem hic diametri Veneris ex menſuris Micrometro obiectiuo factis, tam pro tranſitu Veneris A. 1761, quam pro nouiſſimo, optime confirmatur.

36. Hae igitur praecipuae ſunt meditationes, quas hoc loco de Parallaxi Solis proponendas habui, quasque iam Lectorum in hiſce rebus peritorum examini et cenſurae libenter ſubmitto. Cum ſumma autem confidentia aſſeuerare audeo, me in hac inueſtigatione vbique veritatis amore ductum fuiſſe, quare ſi in ratiociniis a me allatis vitium quoddam forſan irrepſerit, id ex praeiudicio quodam originem

non

non ducere, ipſe mihi conſcius ſum. Tametſi vero rationes a me allatae, mihi quidem ſatis perſpicuae et euidentes videantur; facile quidem praeuideo illas eum ſucceſſum non eſſe habituras, vt Auctores qui de Parallaxi Solis diuerſas a mea fouent opiniones, conuincere valeant. Noui enim mentes hominum ita eſſe comparatas, vt a ſententiis ſemel receptis recedere non velint. Nec hac diſquiſitione eum mihi propoſui ſcopum, vt aliorum ſententias refellerem, ſed vt intelligatur haud leues fuiſſe rationes, quibus inductus in Tomo XVI. Nou. Comment. Parallaxin Solis mediam 8″, 68 eſſe ſtatuebam. Denique ſi quis fuerit, qui oſtendere valeat aut Methodum a me adhibitam eſſe vitioſam, aut in calculis meis inſignes latere errores, aut concluſiones inde deductas eſſe falſas; de eo commonefactus, non ſolum errores meos ſponte confitebor, ſed etiam valorem Parallaexos heic adoptatum minus recte ſe habere agnoſcam. Sin autem id a nemine praeſtari poterit, in ea quidem conſtanter permanebo ſententia, valorem Parallaxeos mediae contineri ſaltem inter 8″, 57 et 8″, 69, ſatisque probabiliter ſtatui poſſe 8″ 63, aliis tamen liberum relinquens de Parallaxi pro lubitu iudicandi; nec enim eam mihi vindicare poſſum auctoritatem, vt hunc Parallaxeos valorem non ſolum noſtri aeui Aſtronomis, ſed etiam poſteris adoptandum et adprobandum obtruderem.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI ANNO 1772. INSTITVTAE.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Die $\frac{16}{27}$. Iulii Imm. I. Sat. Iouis 10^h. 39$'$. 6$''$.
Obſeruatio inſtituta eſt a Viro Cel *Lexell.*

Die $\frac{18}{29}$. Iulii Imm. II. Sat. Iouis coelo ſereno
Satellitis lumen diminutum 12^h. 30$'$. 19$''$.
Satellitem perdo ex conſpectu 31. 19.
Rurſum micare videtur 31. 25.
Prorſus diſparet 31. 35.
Eadem Imm. obſeruata eſt a D^{no} *Lexell* 12^h. 31$'$. 11$''$.

Ex quo apparet momentum, quo mihi Satelles rurſum micare videbatur, non niſi fallaciam opticam fuiſſe.

Die $\frac{23.\ Iul.}{3.\ Aug.}$ Imm. I. Sat. Iouis coelo ſereno
Lumen Satellitis imminutum 13^h. 32$'$. 45$''$.
Satellitem difficile conſpicio 33. 0.
Prorſus diſparet 33. 20.
Eadem a D^{no} *Lexell* obſeruata eſt 13. 33. 38.

Die $\frac{30.\ Iul.}{10.\ Aug.}$ Imm. I. Sat. Iouis 15. 28. 26.
Obſeruatio peracta eſt a D^{no} *Lexell.*

Die $\frac{30.}{10.}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ Em. II. Satellitis Iouis $7^h. 24'. 0''.$
Itidem a D^{no} *Lexell* eſt obſeruata.

Die $\frac{13}{24}$. Sept. Em. II. Satellitis Iouis
Satellitem primum conſpicio 12. 32. 43.
Pariter cum reliquis lucet 44. 0.

In hac obſeruatione ob coelum nubilum non Satellites modo, verum et ipſe Iupiter non diſtincte fuit conſpicuus, ita vt Satellitem pluribus minutis ſecundis tardius mihi ſeſe obtuliſſe exiſtimem.

Die $\frac{8}{19}$. Sep. Em. II. Sat. Iouis coelo ſereno
Satelles prodit ex vmbra $9^h. 45'. 35''.$
Aeque ac reliqui lucet 47. 43.

Eodem die Imm. IV. Sat. Iouis
Lumen Satellitis diminuitur 10. 17. 0.
Iam aegre conſpicio 20. 0.
Immerſio totalis 21. 30.
Eadem a D^{no} *Lexell* obſeruata eſt 10. 21. 7.

Obſeruationes a Viro Cel *Lexell* inſpecula inferiori, meae vero in ſuperiori inſtitutae ſunt; illae tubo Gregoriano duorum circiter pedum, hae vero tubo achromatico Dollondiano $3\frac{1}{2}$ circiter pedum triplici lente obiectiua inſtructo.

Obſeruatio Eclipſeos Lunae.

Die $\frac{30.}{11.}$ $\frac{Sept.}{Oct.}$

Huic phaenomeno Cel. *Lexell* et ego iisdem in locis, in quibus ſupra relatae obſeruationes inſtitutae ſunt, inuigilauimus.

Initium

Initium Eclipſeos obſeruare non licuit.

	Lexell	Rumovski.
Vmbra ad Ariſtarchum	– – –	$5^h.44'.30''$.
Ariſtarchus immergit	$5^h.46'.38''$.	5. 45. 55.
Vmbra ad Copernicum	5. 51. $31\frac{1}{2}$.	5. 52. 0.
Copernicus immergit	53. $2\frac{1}{2}$.	– – –
Vmbra ad Tychonem	– – –	5. 53. 15.
Tycho immergit	5. 54. $32\frac{1}{2}$.	– – –
Heraclides immergit	57. $1\frac{1}{2}$.	– – –
Vmbra ad Inſulam Sinus medii	6. 0. $39\frac{1}{2}$.	6. 0. 40.
Vmbra ad Archimedem	– – –	6. 1. 12.
Archimedes immergit	– – –	2. 40.
Helicon immergit	6. 2. $3\frac{1}{2}$.	– – –
Inſula ſinus medii immergit	2. $59\frac{1}{2}$.	– – –
Vmbra ad Platonem	10. 8.	6. 10. 0.
Vmbra ad Manilium	– – –	10. 25.
Manilius immergit	6. 11. 42.	6. 11. 13.
Plato immergit	6. 13. 12.	6. 12. 55.
Vmbra ad Menelaum	– – –	6. 13. 12.
Menelaus immergit	6. 17. 4.	14. 50.
Vmbra ad Fracaſtorium	– – –	6. 16. 30.
Vmbra ad Plinium	– – –	17. 8.
Vmbra ad mare Nectaris	6. 17. 26.	– – –
Plinius immergit	6. 17. 56.	6. 17. 36.
Fracaſtorius immergit	– – –	6. 18. 10.
Mare Nectaris immergit	6. 20. 22.	– – –
Vmbra ad mare Foecunditatis	– – –	6. 23. 38.
—— ad Petauium	– – –	24. 29.
—— ad Langrenum	– – –	28. 43.
Meſſala immergit	6. 28. 45.	– – –

	Lexell	*Rumovski.*
Vmbra ad mare Criſium	– – –	$6^h. 29'. 14''$.
Totum in vmbra	$6^h. 31'. 30''$.	32. 5.
Totalis Lunae Immerſio	6. 37. 0½	6. 37. 0.
Breui poſt immerſionem coelum fit nubilum, poſtquam vero nubes diſceſſere Eclipſi ad finem vergente ſequentia momenta fuere obſeruata.		
Mare Humorum emergit	8. 37. 4.	– – –
Menelaus ex vmbra	9. 5. 42.	– – –
Plinius emergit	7 12.	– – –
Poſſidonius emergit	9. 8. 22	– – –
Mare nectaris totum } extra	9. 14. 0.	9. 14. 37.
Promontorium Somnii } vmbram	14. 32.	– – –
Mare Criſium emergit	17. 22.	9. 19. 20.
Mare Foecunditatis totum } extra	18 37	– – –
Mare Criſium totum } vmbram	21. 48.	22. 0.
Finis Eclipſeos	9. 26. 32	9. 27. 37.

Momenta haec obſeruata ſunt tubis Dollondianis trium circiter pedum duplici lente obiectiua gaudentibus.

DETER-

DETERMINATIO LATITVDINIS ET LONGITVDINIS QVORVNDAM SIBIRIAE LOCORVM DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS A Dno *ISLENIEFF* INSTITVTIS ANNO 1770.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Vir Cl. *Iohannes Islenieff*, antequam inter in Moldauiam ingrederetur, transmiſit ad Academiam Scientiarum Imperialem diarium obſeruationum, quas ex Iakutsk rediens pro definienda poſitione quorundam Sibiriae locorum inſtituit; operae pretium itaque facturum me exiſtimaui, ſi potiores earum vna cum conſectariis vſui Geographico inſeruientibus hic exponerem.

Obſeruationes in Bernaul inſtitutae.

Quadrantis ad altitudines obſeruandas adhibiti verificatio hic non eſt inſtituta; interim tamen, pro vt infra videbimus, errorem quadrantis ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum tuto ſtatuere poſſumus 5′ 42″, eundem nempe qualis in Iakutsk fuit repertus.

Altitudines Solis meridianae.

Dies Obſeru	Altit. limb. ☉ Superior	Error Quadr.	Refr. Bradl. — parall.	½ Diam. ☉lis	Decl. ☉lis Auſtr.	Latitudo
4/15. Ian.	15°. 58′. 41″	5′. 42″	— 3′. 10″, 5	— 16′. 18″, 3	21°. 6′. 20″	53°. 20′. 9″, 8
5. —	15. 10. 18, 5	-	— 3. 8, 8	— 16. 17, 8	20. 54. 59, 5	53. 19. 56, 6
7. —	16. 33. 43	- -	— 3. 2, 4	— 16. 17, 7	20. 31. 8, 6	53. 20. 11, 6
22. *Ian.* 2. *Febr.*	20. 18. 12, 5	- .	— 2. 25, 6	— 16. 16, 1	16. 46. 6, 5	53. 20. 4. 7
23. —	20. 35. 52, 7	- -	— 2. 23, 1	— 16. 15, 8	16. 28. 32, 2	53. 19. 56, 0
29. *Ian.* 9. *Febr.*	22. 25. 52.	— 5. 42	— 2. 10.	— 16. 14, 7	14. 36. 19, 5	53. 19. 55, 3
					Medium	53. 20. 1.

Altitudines Stellarum fixarum.

Dies Obſeru.	Nomen Stell.	Altitudo merid.	Error Quadr.	Refr. Bradl.	Decl. ad diem obſeruat.	Aberr.	Nut.	Latitudo
4/15. Ian.	Capella	82°. 30′. 23″, 5	— 5′. 42″	— 8″,	45°. 44′. 28″	— 6″, 4	— 0″, 3	53°. 20′. 1″
6/17. —	Capella	82. 30. 27	- -	—	45. 44. 28, 2	+ 6, 6	— 0, 3	53. 19. 57, 5
21. *Ian.* 1. *Febr.*	Capella	82. 30. 36, 5	- -	—	45. 44. 28, 4	+ 7, 6	— 0, 4	53. 19. 49, 2
25/5. —	ε Perſei	75. 5. 48, 5	- -	— 15, 1	39. 19. 32, 6	+ 7, 4	+ 0, 7	53. 19. 49, 7
—	Capella	82. 30. 34,	- -	— 8,	45. 44. 28, 4	+ 7, 7	— 0, 4	53. 19. 45, 7
28/8. —	ε Perſei	75. 5. 53,	- -	— 15, 1	39. 19. 33, c	+ 7, 3	+ 0, 7	53. 19. 45, 1
—	Capella	2. 30. 32,	- -	— 8,	45. 44, 28, 5	+ 7, 8	— 0, 4	53. 19. 53, 9
			Bore-	*am*	*verſus*			
30. *Ian.* 10. *Febr.*	α Draconis	77. 57. 39, 5	- -	— 12,	65. 28. 46, 8	— 18, 8	— 4, 0	53. 20. 10, 5
—	η Draconis	81. 23. 59, 5	- -	— 8, 7	62. 2. 17, 2	- 9, 7	— 0, 1	53. 20. 16, 2
						Medium		53. 19. 57.

Hinc ſequitur Latitudinem Bernaul ſtatui poſſe rotunde 53°. 20′.

Pro definienda Longitudine huius loci occurrunt in Diario binae ſequentes obſeruationes.

Die 4/15. Ian. Imm. I. Sat. Iouis 18^h. 23′. 32″. t. v. Ventus tubum agitando obſeruationem hanc reddidit dubiam.

Die

Die $\frac{27.\ Ian.}{7.\ Febr.}$ Imm. I. Sat. Iouis $18^h. 36'. 36''$. t. v. Obſeruatio ob lumen crepuſculare ad pauca ſecunda dubia.

Deficientibus obſeruationibus correſpondentibus non aliud ſupereſt, quam vt Immerſiones obſeruatas cum momentis e Tabulis depromtis comparemus. Prior collata cum momento tabulari dat differentiam meridianorum inter Lutetiam Pariſiorum et Barnaul $5^h. 14'. 35''$, poſterior vero $5^h\ 24'. 19''$. Vnde perſpicitur in alterutra obſeruatione latere errorem 10 min. primorum; vtrum vero prior peccet in defectu, aut poſterior in exceſſu ex obſeruationibus in aliis locis inſtitutis erit decidendum.

Die $\frac{20}{31}$. Ian. obſeruata eſt declinatio acus magneticae $2^\circ. 45'$ verſus orientem.

Obſeruationes in Fortalitio Smeinogorsk inſtitutae.

Die $\frac{12}{23}$. Febr. obſeruata eſt maxima altitudo limbi Solis ſuperioris $29^\circ. 27'. 36\frac{1}{2}''$; vnde poſito errore quadrantis $- 5'. 42''$, Refr. $1'. 41''$, parall. $7''$, 3 $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis $16'. 11''$, 6 fit maxima altitudo Centri ☉lis $29^\circ. 4'. 8''$, 2; Poſita longitudine huius ſtationis a meridiano Pariſino computata $5^h. 20'$ habetur Declinatio ☉lis $9^\circ. 46'. 24''$, 8 Auſtr. Vnde complementum altitudinis Poli $30^\circ. 50'. 33''$, ac ipſa Poli altitudo prodit $51^\circ. 9'. 27''$.

Eodem die obſeruata eſt maxima altitudo Reguli $52^\circ. 1'. 47''$. quae errore quadrantis $- 5'. 42''$,

Refract.

Refract. — 44″, 3 correcta fit 51°. 55′. 20″, 7. Eſt vero Declinatio Reguli ad diem obſeruationis 13°. 5′. 6″, 7 Aberr. — 6″, 8. Nut. — 6″, 8. Hinc Declinatio Reguli apparens ad $\frac{12}{23}$ Febr. 13°. 4′. 53″, 2 Bor., et altitudo Poli concluditur 51°. 9′. 32½″.

Die $\frac{13}{24}$. Febr. obſeruata eſt altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris 29°. 49′. 38″, quae errore quadrantis — 5′. 42″, Refract. — 1′. 39″, 3, parall. + 7″, 3 correcta fit 29°. 42′. 23″, 7: Et cum ½ Diam. ☉lis ſit 16′. 11″, 5 et declinatio 9°. 24′. 18″, 7 Auſtr. prodit altitudo Poli 51°. 9′. 29″, 1.

Eodem die altitudo maxima β Geminorum obſeruata eſt 67°. 24′. 47″, 5, cui applicata correctione quadrantis — 5′. 42″, Refract. — 23″, 5 ſit altitudo correcta 67°. 24′. 24″. Cum vero Declinatio β Geminorum ad diem obſeruationis ſit 28°. 33′. 48″, 3 Aberr. + 0″, 9, Nut. — 4″, 8 erit Declinatio ſtellae apparens ad $\frac{13}{24}$. Febr. 28°. 33′. 44″, 4 et altitudo Poli quaeſita 51°. 9′. 20″, 4.

Vnde ſumto medio obtinemus Latitudinem fortalitii Smeinogorsk 51°. 9′. 27″ ſiue rotunde 51°. 9½′.

Pro longitudine huius ſtationis vnica tantum inſtituta eſt obſeruatio die $\frac{12}{23}$. Febr. Imm. I. Sat. Iovis 16^h. 46′. 44″ t. v. Eſt vero eadem iuxta Ephemerides Aſtronomicas ad meridianum Pariſinum 11^h. 27′. 26″. Vnde differentia meridianorum Smeinogorsk et Lutetiae Pariſiorum prodit 5^h. 19′. 18″.

Deter-

Determinatio Latitudinis Fodinarum Koliwanowoskreſenſium.

Die $\frac{16}{27}$. Febr. obſeruata eſt maxima altitudo Reguli 51°. 51'. 56'', quae errore quadrantis — 5'. 42'' et Refr. — 44'', 6 correcta fit 51°. 45'. 41''. Eſt vero Declinatio Reguli apparens ad $\frac{16}{27}$. Febr. 13°. 4'. 52'', 9 exiſtente Aberr. — 6'', 6 Nut. — 6'', 8. Vnde altitudo loci prodit 51°. 19'. 23½''.

Eodem die maxima altitudo Arcturi obſeruata eſt 59°. 10'. 28''. Cui applicata correctione quadrantis — 5'. 42'', Refr. — 34'' fit altitudo correcta 59°. 4'. 12''. Declinatio Arcturi ad diem obſeruationis eſt 20°. 23'. 53'', 3 Aberr. — 12'', 2, Nut. — 5'', 7. Hinc Declinatio ſtellae apparens 20°. 23'. 35'', 4 et Latitudo loci 51°. 19'. 23'', 4.

Obſeruationes in Fortalitio Vſtkamenogorsk inſtitutae.

Diutius hic loci quam in aliis commoratus eſt Cl. obſeruator, et ſedulo incubuit obſeruationibus pro Latitudine aeque ac pro Longitudine definienda. Die 21. Martii inſtituit quadrantis verificationem ad horizontem, quam ante omnia hic proponimus.

Directo tubo quadrantis in obiectum ad 400 perticas diſtans altitudo illius ſupra horizontem in ſitu recto quadrantis obſeruata eſt 2'. 47½'', in ſitu vero inuerſo quadratis, centro illius ad eandem altitudinem eleuato, eiusdem obiecti depreſſio infra horizontem reperta eſt 8'. 30½''. Vnde error quadrantis

drantis circa horizontem ſtatuendus foret — 5′. 39″, niſi diuerſum quid ſuaderent obſeruationes prope Zenith inſtitutae; non nullae earum dant errorem quadrantis — 5′. 48″, 1 aliae vero — 5′. 44″, 1: et cum per obſeruationes in Iakutsk habitas conſtet arcum quadrantis iuſtae eſſe magnitudinis, tutius nos acturos exiſtimauimus, ſi illum — 5′ 42″ aſſumſerimus, talem nempe qualem obſeruationes in Iakutsk et poſthac in Tobolsk inſtitutae praebuere.

Ex magno numero altitudinum meridianarum Solis et ſtellarum fixarum ſelectiores tantum ad definiendam Latitudinem Fortalitii Vſtkamenogorsk adhibituri initium faciemus ab altitudinibus Solis.

Dies Obſeru.	Altit. limb. ☉ Superior.	Error Quadr.	Refr. B ad — parall.	½ Diam. ☉lis	Declinat. ☉lis Auſtr.	Latitudo
1/12. Apr.	49°. 8′. 28″, 5	— 5′. 42″	— 41″, 0	15′. 58″, 8	8°. 42′. 56″, 6	49°. 56′. 53″
10/21. —	52. 18. 40	- -	— 38, 7	15. 56, 5	11. 53. 13, 7	49. 56. 51
17/28. —	54. 36. 1	- -	— 25, 5	15. 54, 8	14. 10. 35, 0	39. 56. 46
22. Apr. 3. Maii	56. 7. 18	- -	— 33, 5	15. 53, 6	15. 41. 47, 5	49. 56. 38, 6
26/7. —	57. 15. 27	- -	— 32, 2	15. 52, 7	16. 50. 9, 0	59. 55. 49
27/8. —	57. 32. 3	- -	— 31, 6	15. 52. 5	17. 6. 33, 4	49. 56. 46½
	☉ infer.					
15/26. Maii	61. 2. 25	- -	— 27, 5	15. 49, 6	21. 8. 51	49. 56. 36
19/30. Maii	62. 12. 38	— 5, 42	— 26, 4	15. 48, 7	21. 47. 26½	49. 56. 45, 6
					Medium	49. 56. 45, 7

Altitu-

Altitudines Stellarum fixarum Auſtrum verſus obſeruatae.

Dies obſeru.	Nomina Stellar.	Altitudo meridiana	Error Quadr.	Bradl. Refr.	Declin. ad ann. 1770.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
1/12. Apr.	ι Vrſae Mai.	89°. 4′.39″	—5′.42″	— 1″,6	48°.55′.41″,8	— 3″, 2	+ 8″,5	—7″, 8	49°.56′.43″,3
7/18. Apr.	ϵ Bootis	81. 27. 18, 5		— 8, 6	41. 18. 26, 1	—4, 4	— 8, 0	— 3, 1	49. 56. 42, 7
	δ Bootis	74. 20. 9, 5		—16, 0	34. 11. 5, 9	— 4; 1	— 8, 9	— 1, 6	49. 56. 39, 8
	α Lirae	78. 43. 52		—12, 5	38. 34. 51, 4	+0, 7	—16, 3	— 4, 5	49. 56. 42, 4
10/21. Apr.	γ Bootis	79. 27. 59, 5		—10, 7	39. 19. 24, 1	— 5, 0	— 5, 8	— 2, 9	49. 57. 3, 6
	ϵ Bootis	81. 27. 11, 5		— 8, 6		— 4, 4	— 8, 0	— 3, 1	49. 56. 50, 5
	δ Bootis	74. 20. 0		—16, 0		—4, 1	— 8, 1	— 1, 7	49. 56. 49, 9
16/27. Apr.	Regulus	53. 14. 32	—5. 42	—42, 4	13. 5. 9, 4	— 5, 5	— 2, 2	— 7, 0	49. 56. 51, 1
	γ Bootis	79. 28. 2		—10, 7		— 5, 2	+ 4, 1	— 2, 9	49. 57. 2, 6
	ϵ Bootis	81. 27. 13, 5		— 8, 6		—4, 7	— 6, 2	— 3, 1	49. 56. 49,
	δ Bootis	74. 20. 8		—16, 0		—4, 4	— 6, 6	— 1, 7	49. 56. 43, 2
	α Lirae	78. 44. 1		—12, 5		+0, 7	—15, c	+ 4, 5	49. 56. 34, 7
26. Apr. 7. Maii	Regulus	53. 14. 30, 5		—42, 4		—5, 7	— 2, 2	— 7, 0	49. 56. 48, 4
	γ Bootis	79. 28. 33		—1c, 7		— 5, 5	— 1, 4	— 2, 8	49. 56. 34, 0
	ϵ Bootis	81. 27. 28		— 8, 6		— 5, 1	— 2, 6	— 3, 0	49. 56. 38, 0
	δ Bootis	74. 20. 10		—16, 0		—4, 8	— 4, 3	— 1, 6	49. 56. 43, 2
	α Lirae	74. 43. 57, 5	—5. 42	—12, 5		—0, 8	—13, 2	+ 4, 5	49. 56. 42, 1
									49. 56. 45, 6

Boream verſus

Dies obſeru.	Nomina Stellar.	Altitudo merid.	Error Quadr.	Refr. Bradl.	Declin. ad ann. 1770.	Praec.	Aberr.	Nut.	Latitudo
[illegible]. Maii	δ Vrſ. mai.	81°.43′.57″½	—5′.42″	— 8″,4	58°.18′.44″,3	—6, 7	+11″,0	—6″, 4	49°.56′.49″,3
	ε - -	82. 49. 55	- -	— 3, 7	57. 12. 47, 1	—7, 3	+ 8, 6	—5, 8	49. 56. 48, 3
	ζ - -	83 54. 55	- -	— 6, 3	56. 7. 57, 5	—7, 1	+ 7, 4	—5, 1	49. 56. 59, 4
	α Draconis	74. 34. 0	- -	—15, 7	65. 28. 48, 6	—6, 5	+ 5, 8	—3, 4	49. 56. 46, 8
5/6. Maii	δ Vrſ. mai.	81. 44. 9,5	- -	— 8, 4	- - -	—6, 7	+11, 4	—6, 4	49. 57. 1, 7
	ε - -	82. 49. 57, 5	- -	— 7, 3	- - -	—7, 3	+ 9, 1	—5, 8	49. 56. 51, 3
	ζ - -	83. 54. 51	- -	— 6, 3	- - -	—7, 1	+ 7, 7	—5, 1	49. 56. 55, 7
	α Draconis	74. 33. 59	- -	—15, 7	- - -	—6, 5	+ 5, 9	—3, 4	49. 56. 45, 9
6/7. —	γ Vrſ. mai.	85. 4. 10	- -	— 5, c	54. 58. 39, 3	—7, 2	+13, 6	—7, 1	49. 57. 1, 6
	δ - -	81. 44. 5	- -	— 8, 4	- - -	— 6, 7	+11, 6	—6, 4	49. 56. 57, 4
	ε - -	82. 50. 0	-	— 7, 3	- - -	—7, 4	+ 9, 4	—5, 8	49. 56. 54, 4
	ζ - -	83. 54. 57	- -	— 6, 3	- - -	—7, 1	+ 8, 2	—5, 1	49. 57. 2, 2
	α Draconis	74. 34. 4,5	- -	—15, 7	- - -	—6, 5	+ 6, 4	—3, 4	49. 56. 52, 2
									49. 56. 52, 8

Iam nunc obſeruationes circa ε Bootis et δ Vrſae, nec non δ Bootis et α Draconis inſtitutae commode adhiberi poſſunt ad detegendum errorem quadrantis prope Zenith: nam illae ad puncta diuiſionis 81°. 30′, et 81°. 40′; hae vero ad puncta 74°. 20′ et 74°. 40′ peractae ſunt.

Ex altitudinibus ε Bootis diebus 7. 10. 16. 26 Aprilis obſeruatis ac ope Praeceſſionis, Aberrationis et Nutationis ad initium anni reductis ſumto medio prodit altitudo meridiana ε Bootis - 81°. 27′. 31″, 8

Refractio — 8, 6

81. 28. 23, 2

Simili modo altit. δ Vrſae maioris ad initium anni reducta ex omnibus media - 81. 44. 2, 3

Refractio — 8, 4

81. 43. 53, 9

Summa altitudinum	173. 11. 17, 1
Complementum ad duos rectos	16 48. 42, 9
Differentia Declinationum	17°. 0′. 18″, 2
Error duplus	11. 36, 3
ſimplex ab altit. ſubtrahendus	5. 48, 1.

Eodem modo ſi altitudines δ Bootis diebus 7. 10. 16. 26. April obſeruatae ope Praeceſſionis, Aberrationis et Nutationis reducantur ad initium anni, et ſumatur media inuenitur altitudo meridiana δ Bootis - - - - - - 74°. 20′. 19″, 8

Refractio — 16, 0

74. 20. 3, 8

Altitu-

Altitudo α Draconis ſimiliter ad initium anni reducta fit - - -	74. 33. 57, 4
Refractio	— 15, 7
	74. 33. 42, 7
Summa altitudinum	148. 53. 45, 5
Complementum	31. 6. 14, 5
Eſt vero differentia Declinationum	31. 17. 42, 7
Error duplicatus	11. 28 2
Error ſimplex	— 5. 44, 1.

Hinc apparet errorem quadrantis prope Zenith eſſe proxime — 5'. 46'', 1 qui cum parum differat ab errore eiusdem circa horizontem antea reperto, et ſumto ex vtroque medio reſultet 5'. 42½'' perſpicuum fit, cur in computandis obſeruationibus eum ipſum errorem quadranti praefixerimus, qualis in Iakutsk fuit detectus.

Eclipſes Satellitum Iouis.

Obſeruationes Satellitum Iouis a Cl. *Islenieff* eodem tubo, quo in Iakutsk, inſtitutae ſunt, nempe Dollondiano 10 pedes, a Socio vero tubo Aſtronomico 15 pedes longo.

Die $\frac{18}{29}$.	Martii	Imm. II. Sat.	16ʰ. 31'. 52''	t. v. bon.
$\frac{8}{19}$.	April	Imm. I. Sat.	13. 40. 20.	b.
		Socius	39. 51.	
$\frac{11}{22}$.	——	Imm. III. Sat.	16. 27. 44.	dubia
$\frac{12}{23}$.	——	Imm. II. Sat.	13. 40. 2.	b.
$\frac{15}{26}$.	——	Imm. I. Sat.	15. 35. 36.	b.
		Socius	34. 40.	

Die $\frac{19}{30}$. April	Imm. II. Sat.	$16^h. 15'. 53''$.		b.
	Socius		15. 38.	
$\frac{24.}{5.}$ $\frac{April}{Maii}$	Imm. I. Sat.	11.	57. 54.	b.
	Socius		57. 34.	
$\frac{7}{18}$. Maius	Imm. II. Sat.	10.	42. 23.	dub.
$\frac{10}{21}$ ——	Imm. I. Sat.	10.	14. 23.	Subdub.
$\frac{17}{28}$. ——	Imm. I. Sat.	12.	7. 37.	Sat bon.
—	Imm. III. Sat.	12.	22. 56.	bon.
$\frac{21.}{1.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$	Imm. II. Sat.	15.	48. 43.	dub.
$\frac{24.}{4.}$ ——	Imm. I. Sat.	14.	0. 22.	bon.

Ex pluribus hoc interuallo temporis in aliis locis inſtitutis obſeruationibus a Viro Celeberr. *Wargentin* mihi communicatis, paucae ſunt, cum quibus hae directe comparari poſſunt; et quidem.

I. Die $\frac{19}{30}$. April. Imm. II. Sat.	$16^h. 15'. 53''$.	Vſtkamen.
	11. 55. 8.	Tyrnav.
Different. merid.	4. 20. 45.	
Longit. Tyrnau. a mer. Par.	1. 0. 55.	
Diff. merid. Paris. et Vſtkam.	5. 21. 40.	

II. Die $\frac{22.}{3.}$ $\frac{Apr.}{Maii}$ Imm. I. Sat.	13. 9. 36.	Tyrnav.
1 Rev. $1^d.$	18. 28. 25.	
Die $\frac{24.}{5.}$ $\frac{Apr.}{Maii}$ Imm. I. Sat.	7. 38. 1.	Tyrn.
obſeruata eſt	11. 57. 54.	Vſtkamen.
Diff. merid.	4. 19. 53.	
Long. Tyrn. a mer. Paris.	1. 0. 55.	
Diff. mer. Paris. et Vſtkam.	5. 20. 48.	

III.

III. Die 21/1. Maii/Iun. Imm. II. Sat.	$15^h. 48'. 43''$.	Vſtkamen.
	10. 29. 9.	Pariſiis
Different. merid.	5. 19. 34.	
IV. Die 24/4. Maii/Iun. Imm. I. Sat.	14. 0. 22.	Vſtkamen.
	9. 40. 27.	Tyrnav.
Differ. merid.	4. 19. 55.	
Long. Tyrn. a mer. Paris.	1. 0. 55.	
Long. Vſtkamen. a mer. Paris.	5. 20. 50.	
V. Die 15/26. Maii Imm. I. Sat.	13. 2. 18.	Berol.
1 Rev. = 1^d.	18. 28. 19.	
17/28. Maii Imm. I. Sat.	7. 30. 19.	Berol.
obſeruata eſt	12. 7. 37.	Vſtkamen.
Different. merid.	4. 37. 0.	
Long. Berol. a mer. Pariſ.	0. 44. 25.	
Long. Vſtkamen. a mer. Pariſ.	5. 21. 25.	

Neglecta tertia comparatione ſumtoque ex reliquis medio Differentia meridianorum Pariſienſis et Vſtkamenogorenſis prodit $5^h. 21'. 10''$ verſ. orientem. Vix diuerſam praebent reliquae obſeruationes cum Tabulis collatae; quare determinatio a tertia comparatione petita merito reiicienda eſſe videtur.

Inter obſeruationes Satellitum Iouis a Celeb. *Lowitz* in Aſtracan inſtitutas dantur non nullae, quae cum obſeruationibus Vſtkamenogorenſisbus directe comparari poſſunt; Quare non inanem operam factu-

facturum me exiſtimo, ſi eas hic expoſuero, ac ſtabilita Longitudine Vrbis Aſtracan ſupra repertam Longitudinem Vſtkamenogorsk vlterius confirmauero.

Obſeruationes in Aſtracan inſtitutae.

Die	30/10. *Mart./April*	Imm.	I. Sat.	14^h.	$58'$.	$5''$.	t. v.
	15/26. April	Imm.	I. Sat.	13.	16.	57.	
	21./1. *Maii/Iun.*	Imm.	II. Sat.	13.	32.	18.	
	24./4. ——	Imm.	I. Sat.	11.	42.	7.	
	2/13. Iunii	Em.	I. Sat.	10.	15.	39.	
	9/20. ——	Em.	I. Sat.	12.	8.	16.	
	16/27. ——	Em.	I. Sat.	14.	1.	58.	
	18/29. ——	Em.	I. Sat.	8.	30.	7.	
	25./6. *Iunii/Iul.*	Em.	I. Sat.	10.	23.	39.	
	11/22. Iulii	Em	I. Sat.	8.	40.	50.	
	18/29. ——	Em.	I. Sat.	10.	36.	28.	

Omnes iſtae obſeruationes nota bonitatis inſignitae ſunt; praeſtantior vero omnium eſt Emerſio die 25. Iunii obſeruata. Eſt iam

Die 21./1. *Maii/Iunii* Imm. II. Sat.	13^h.	$32'$.	$18''$.	Aſtrac.
Eadem obſeruata	10.	29.	9.	Pariſiis
Differ. mer. Paris. et Aſtrac.	3.	3.	9.	

Die

Die $\frac{24.}{4.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ Imm. I. Sat.	11^h.	$42'$.	$7''$.	Aſtrac.
Eadem obſeruata eſt	9.	40.	27.	Tyrnav.
Differ. meridian.	2.	1.	40.	
Longit. Tyrnav.	1.	0.	55.	
Diff. merid. Paris. et Aſtrac.	3.	2.	35.	
Die $\frac{9}{20}$. Iun. Em. I. Sat.	12^h.	$8'$.	$16''$.	Aſtrac.
obſeruata eſt	10.	8.	30.	Stockh.
	1.	59.	46.	
Longit. Stockholmiae	1.	2.	52.	
Diff. merid. Paris. et Aſtrac.	3.	2.	38.	
Die $\frac{18}{29}$. Iul. Em. I. Sat.	10.	36.	28	Aſtrac.
obſeruata eſt	8.	34.	19.	Tyrnav.
	2.	2.	9.	
Longit. Tyrnav.	1.	0.	55.	
Diff. mer. Paris. et Aſtrac.	3.	3.	4.	

Longitudo itaque media e binis Immerſionibus totidemque Emerſionibus fit $3^h. 2'. 51''$.

Quodſi nunc Imm. I. die $\frac{15}{28}$. April et $\frac{25.}{4.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ nec non Imm. II. die $\frac{21.}{2.}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ in Aſtracan et Vſtkamenogorsk obſeruatae inter ſe comparentur, prima dat differentiam meridianorum $2^h. 18'. 39''$, ſecunda $2^h. 18'. 15''$ et denique tertia $2^h. 16'. 15''$; Ex quo denuo perſpicitur Imm. II. die 21. Maii obſervatam errore quodam eſſe affectam; id circo ſumto e binis reliquis medio prodit differentia meridianorum Aſtracanenſis et Vſtkamenogorenſis $2^h. 18'. 27''$

 ac

ac Longitudo Vſtkamenogorsk a meridiano Pariſino computata $5^h. 21'. 18''$.

Rotunde itaque ſtatuere poſſumus Latitudinem Vſtkamenogorsk $49°. 56\frac{3}{4}'$ et Longitudinem $5^h. 21\frac{1}{4}'$.

Die $\frac{31.\ Martii}{11.\ April}$ Declinatio acus magneticae obſervata eſt 2°. praeceſſe verſus orientem.

Stabilita iam Longitudine Fortalitii Vſtkamenogorsk facile eſt iudicium ferre, vtra obſeruationum Barnaulenſium a veritate aberret; in mappis Geographicis Longitudo Barnaul praeciſe $\frac{1}{4}$ gradus maior ponitur, quam eſt Longitudo Vſtkamenogorsk; vnde perſpicuum fit primam obſeruationem peccare in defectu 10 min. primorum et Longitudinem Barnaul ſtatuendam eſſe $5^h. 24'. 27''$.

Determinatio Latitudinis Arcis Semipalatnaia dictae.

Paucae hic et in omnibus ſequentibus locis, nec niſi pro definienda Latitudine locorum inſtitutae ſunt obſeruationes: Longitudinem eorum, quoties intererat noſſe, ſumſi ex Mappa Geographica

Dies Obſeru.	Nomen Stell.	Altit. max. obſeruata.	Error Quadr.	Refr. Bradl.	Decl. ad diem obſeruat.	Aberr.	Nut.	Latitudo
20. Iun. / 1. Iul.	α Lirae	78°. 11'. 0''	−5'. 42''	−12''	38°. 34'. 52'', 2	+ 6'', 4	− 5'', 1	50°. 29'. 42'', 3
22. Iun. / 3. Iul.	α Lirae	78. 11. 2	- -	—	- - -	+ 1, 8	− 5, 1	50. 29. 40, 9
—	α Aquilae	47. 53. 17	- -	−51. 6	8. 16. 36, 4	+ 1, 0	− 5, 8	50. 29. 48, 2

Die $\frac{23.\ Iun.}{4.\ Iul.}$ Altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris obſeruata eſt 62°. 46'. 28'', quae errore quadrantis

drantis $-5'.42''$ Refract. $-29'',9$ parall. $+3'',9$ correcta fit $62°.40'.20''$, ac altitudo Centri ☉lis $62°.24'.33\frac{1}{2}''$ exiſtente $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis $15'.46'',5$ et cum Declinatio ☉lis ſit $22°.54'.25\frac{1}{2}''$ erit Latitudo loci $50°.29'.52''$.

Sumto ex omnibus medio prodit Altitudo Poli $50°.29\frac{1}{4}'$.

Determinatio Latitudinis ſtationis Karjakowskaia dictae.

Die $\frac{3}{14}$. Iulii maxima altitudo limbi ☉lis ſuperioris obſeruata eſt $59°.47'.53''$. cui applicata correctione quadrantis $-5'.42''$, Refract. $-33'',5$ parall. $+4'',3$ fit altitudo correcta $59°.41'.41'',8$. Et cum $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis ſit $15'.46'',8$ et Declinatio $21°.42'.28\frac{1}{2}''$ prodit Latitudo quaeſita $52°.16'.33\frac{1}{2}''$.

Die $\frac{4}{15}$. Iulii itidem obſeruata eſt maxima altitudo limbi ☉lis ſuperioris $59°.38'.42''$, quae errore quadrantis $-5'.42''$ Refract. $-33'',6$ parall. $+4'',2$ correcta fit $59°.32'.30'',6$, vnde exiſtente $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis $15'.46'',9$ Declinatione $21°.33'.11'',8$ fit Latitudo quaeſita $52°.16'.28'',1$.

Quare altitudo Poli ſtationis Karjakowskaja poni poteſt rotude $52°.16\frac{1}{2}'$.

Determinatio Latitudinis arcis Schelefinskaja dictae.

Die $\frac{21}{32}$. Iulii altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris obſeruata eſt $57°.7'.53'',5$ cui ſi applicetur

tur correctio quadrantis – 5′. 42″ Refract. – 36″, 8 parall. + 4″, 6 prodit altitudo correcta 57°. 1′. 39″, 3. Vnde cum ½ Diam. ☉lis ſit 15′. 17″, 5 et Declinatio ☉lis 20°. 18′. 12″ inuenitur altitudo Poli 53°. 31′. 50″, 2.

Die $\frac{12}{23}$. Iulii altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris obſeruata denuo eſt 56°. 55′. 44″, quae adhibita debita correctione quadrantis, Refract. – 37″, 1 parall. + 4″, 7, ½ Diam. ☉lis – 15′. 17″, 5 dat altitudinem Centri ☉lis 56°. 34′. 12″ 1, vnde ob Declinationem ☉lis 20°. 6′. 6″ prodit altitudo Poli 53°. 51′. 53″, 9.

Et latitudo arcis Schelesinskaja dictae ſtatui poteſt 53°. 51′. 52″.

Determinatio Latitudinis arcis. Omskaia dictae.

Dies Obſeru.	Alt. max. limb ☉ Superior.	Error Quadr.	Refr. Brad. — parall.	½ Diam. ☉lis	Declinat. ☉lis Bor.	Latitudo
$\frac{19}{30}$. Iul.	53°. 56′. 5″,	–5′. 42″	— 36″, 4	15′. 48″, 2	18°. 32′. 7″	54°. 58′. 8″ 7
22. Iulii 2. Aug.	53. 5. 34, 5	– –	— 36, 5	15. 48, 7	17. 47. 13.	54. 57. 53, 7
$\frac{24}{4}$. —	52. 39. 54,	–5. 42	— 38, 2	15. 49, 0	17. 15. 46.	54. 58. 1, 2

Die $\frac{21.\ \text{Iul.}}{1.\ \text{Aug.}}$ maxima altitudo α Aquilae obſeruata eſt 43°. 25′. 15″, cui ſi applicetur debita correctio quadrantis, Refract. – 1′. 1″ fit altitudo correcta 43°. 18′. 32″. Et cum declinatio α Aquilae ad diem obſeruationis ſit 8°. 16′. 37″, 7 Aberr. + 5″, 6 Nut. + 11″. 9 fit declinatio ſtellae apparens ad $\frac{21.\ \text{Iul.}}{1.\ \text{Aug.}}$ 8°. 16′. 49″, 6 et Latitudo arcis 54°. 58′. 17″, 6.

Media

Media omnium Latitudo arcis Omskaia prodit 54°. 58′. 5″, 2.

Determinatio Latitudinis Vrbis Tarae.

Die $\frac{5}{16}$. Aug. maxima altitudo limbi ☉lis ſuperioris obſeruata eſt 47°. 12′. 29″. cui ſi applicetur debita correctio quadrantis, Refract. − 53″, 1, parall. + 5″, 7 prodit 47° 5′. 59″, 6 et cum $\frac{1}{2}$ Diam. ☉lis ſit 15′. 50″, 9 Declinatio ☉lis 13°. 44′. 58″. erit primum altitudo centri 46°. 50′. 8″, 7. Dein Latitudo Tarae 56°. 54′. 49″, 3.

Dies obſeru.	Nomina Stellar	Altit. max. obſeruat.	Error Quadr.	Refr.	Declin. Stell. ad diem obſ.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{4}{15}$. Aug	α Lirae	71°.46′.36″	−5′.42″	−18″,8	38°.34′52.″,4	+12″,8	+5″, 4	56°.54′.35″,4
—	α Aquil.	41. 28. 55	−5. 42	− 1, 5	8. 16. 37, 4	+ 7, 5	+6, 0	56. 54. 43, 7
$\frac{5}{16}$. Aug	α Lirae	71 46. 34	- -	−18, 8	38. 34. 52, 4	+13, 0	+5, 4	56. 54. 37, 8
—	α Aquilae	41. 28. 52	- -	− 1, 5	8. 16. 37, 5	+ 7, 6	+6, 0	56. 54. 47, 1

Sumto ex omnibus concluſionibus medio prodit Latitudo vrbis Tarae 56°. 54′. 42″ ſeu rotunde 56°. 54$\frac{2}{3}$′.

Determinatio Latitudinis oſtii Fluminis Iſchim in Irtiſch ſeſe exonerantis

Dies obſeru.	Nomina Stellar.	Altit. max. obſeruat.	Error Quadr.	Refr.	Decl. Stell. ad diem obſ.	Aberr.	Nut.	Latitudo
$\frac{13}{24}$. Aug	α Aquil.	40°.42′. 0″5	−5′.42″	-1′. 6″,5	8°.16′.52″,1	+ 8″,4	+6″, 0	57°.41′.40″,1
—	ϛ Pegaſi	59. 15. 17,		- 34, 2	6. 50. 31, 3	+ 4, 0	+7, 1	57. 41. 41, 6
$\frac{14}{25}$. Aug	ϛ Pegaſi	59. 15. 16,		- 34, 2	6. 50. 31, 4	+ 4, 4	+7, 1	57. 41. 43, 1

Obſeruata eſt ibidem die $\frac{15}{26}$. Aug. altitudo maxima limbi ☉lis ſuperioris $43^\circ. 4'. 50''$, vnde Latitudo Oſtii Fluminis Iſchim concluditur $57^\circ. 41'. 30''$. verum quia obſeruatio haec dubia eſt, non habita eius ratione Latitudiuem quaeſitam $57^\circ. 41'. 41''$ vel rotunde $57^\circ. 41\frac{2}{3}'$ ſtatuendam eſſe exiſtimo.

EXPO-

EXPOSITIO DECLINATIONIS MAGNETICAE IN VARIIS IMPERII RVSSICI REGIONIBVS OBSERVATAE.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

In doctrina de declinatione magnetica duae potiſſimum eminent epochae, ab illuſtri vtraque inventore profecta et ob nouam cognitioni abſtruſi huius phaenomeni, cuius veram rationem intimis naturae receſſibus reconditam iure dixeris, illatam lucem quam maxime celebris.

Prima ab *Edm. Halleio* originem repetit, cuius mappa declinatoria, ſtatum terrae magneticum pro anno 1700. repraeſentans, tantam inter phyſicos celebritatem eſt adepta, vt ei hic deſcribendae ſupervacuam quis impenderet operam; altera vero Ill. *L. Eulero* debetur, qui loco quatuor polorum magneticorum ab *Halleio* in terra conſtitutorum famoſis illis curuis magneticis explicandis etiam duos ſuffícere, ſumma cum veriſimilitudine commonſtrans, hoc modo complicatiſſimum illud ſyſtema magneticum *Halleianum* ad multo maiorem ſimplicitatem reduxit; de quo peculiaris Cel. Viri diſſertatio Actis Bero-

Berolinenſibus ad annum 1757. inſerta legitur. Ab eo inde tempore grauiſſimi huius argumenti cardo in eo iam potiſſimum vertitur, vt recentiores obſeruationes inter ſe et cum antiquioribus mutuam ipſis lucem largiendo iudicioſe comparentur atque de vero polorum magneticorum ſitu, de flexibus meridianorum magneticorum et curuarum declinationis deque multiplicibus variationibus, quas iſtae lineae ratione tam poſitionis quam curuedinis ſuae ſubire videntur, quasque ad geographicum et nauticum vſum ſummi foret momenti penitius perſpexiſſe, magis ſubinde certa et ipſis experientiis conformia eliciantur iudicia. Nota eſt hoc in genere mappa declinationum a Dnis *Mountaine* et *Dodſon* ſtatui telluris magnetico ad annum 1744. adcommodata, quae *Bougueri* inſtitutionibus nauigationis annexa cernitur; inprimis vero merita laude ornanda eſt egregia opera Cel. Virorum, *I. C. Wilkii* et *Mart. Stoemeri*, quorum hic in duobus ſpeciminibus phyſico-geographicis Vpſaliae editis chartam *Halleianam* ſecundum nouiſſimas obſeruationes ad annum huius ſeculi quinquageſimum reduxit curuarumque magneticarum motus acuto examine eſt proſecutus; ille vero in Actis Holmienſibus anni 1768. ſyſtema inclinationis magneticae methodo *Halleianae* analoga magno cum iudicii acumine delineauit; vnde etiam doctrina de declinatione magnetis haud parum luminis eſt lucrata. Denique etiam huc pertinent duae mappae vtrumque hemiſphaerium terreſtre repraeſentantes, anno 1752. Amſtelodami aere inciſae,

quarum

quarum titulus eſt: Nouvelle carte du globe terreſtre - montrant les variations du compas... telles, qu'on les a trouvées l'an 1750 - - par multitude d'obſeruations propres & autres, par *Nic. van Ewyk*, Capitain de Navire... quibus vero, cum lateat, quo ſint fundamento conſtructae, quantum tribui poſſit, haud conſtat. Potiſſimum vero regionibus, pro quibus, qui huic disquiſitioni animum adplicuerunt, obſeruationum penuria quam maxime laborabant; tota, qua patet, Imperii Ruſſici extenſio eſt annumeranda; vnde in mappis etiam recentiſſimis ingens ibi hiatus et lacuna cernitur. Huic igitur defectui cum nunc quidem Academicorum peregrinantium ſtudio haud parum medelae ſit allatum; operae vtique pretium eſt, iſtas obſeruationes cum ceteris combinari et quales inde concluſiones, vel, ſi mauis in re tam lubrica, coniecturae de ſtatu telluris magnetico poſſint deduci, adcuratius inveſtigari.

§. 2. Ante omnia itaque tabulam hic exhibebo ipſas obſeruationes conſpectui exponentem vna cum poſitione locorum obſeruationis geographica; vbi longitudines a meridiano Pariſino computari ſunt intelligendae; ipſas vero obſeruationes ſecundum gradus declinationis diſpoſui.

Tabula Declinationum magneticarum in Ruſſia eiusque vicinia obſeruatarum.

Loc. obſeruat.	Annus	Latit.	Long.	Decl. magn.
Catharinenburg.	1761.			0°. 50′. O.
Ponoi	1769. Mai.	67°. 4′.	38°. 49′.	1°. 10′. O.
Vſa	1769. Octobr.	54°. 42′.	53°. 33′.	1°. 30′. O.
Vſtkamenogorskaja	1770.	49°. 56′.	80°. 20′.	2°. 0′. O.
Barnaul	1770.	53°. 20′.	81°. 11′.	2°. 45′. O.
Orsk	1769 Iun.	51°. 12′.	56°. 10′.	0°. 15′. W.
Kola	1769.	68°. 52′.	30°. 45′.	2°. 0′. W.
Caſan	1761.	54°. 14′.	48°. 38′	2°. 25′. W.
Gurjef	1769. Aug.	47°. 7′.	49°. 40′.	3°. 25′. W.
Orenburg	1769. Mai.	51°. 46′.	52°. 50′.	3°. 30′. W.
Petropolis	1772.	59°. 56′	28°. 0′	3°. 30′. W.
Vmba	1769 Mai.	66°. 44′.	31°. 52′.	3°. 30′. W.
Tobolsk	1761.	58°. 12′.	66°. 2′.	3°. 52′ O.
Iakutsk	1769. Iun	62°. 2′.	127°. 27′.	5°. 0′. W.
Zarizin	1770. Mai.	48°. 42′.	42°. 4′.	5°. 0′. W.
Gluchov	1770. Sept.	51°. 40′.	32°. 5′.	5°. 30′. W.

Loc.

Loc. obſeruat.	Annus	Latit.	Long.	Decl. magn.
Dmitrevsk	1771. Iun.	50°. 5′.		5°. 45′. W.
Tſcherkask	1770. Mart.	47°. 13′.	37°. 24′.	5°. 50′. W.
Sisran	1770.	53°. 9′.	46°. 4′.	5°. 50′. W.
Caffa	1772. Iun.			7°. 0′. W.
Reual	1751. Febr.	59°. 26′.	22°. 19′.	7°. 30′. W.
Krementſchuk	1770. Mai.	49°. 3′.	30°. 52′.	8°. 0′. W.
Riga	1750. Nov.	56°. 50′.	21°. 39′.	8°. 0′. W.
Samara	1770. Aug.	48°. 29′.	33°. 2′.	8°. 10′. W.
Sietſcha	1770. Iul.	47°. 31′.	32°. 5′.	9°. 15′. W.
Bender	1772.	46°. 50′.	27°. 22′.	9°. 25′. W.
St. Eliſabeth	1770.	48°. 29′.	30°. 7′.	9°. 45′ W.

Ad declinationem magnetis Petropoli obſeruatam quod attinet, ea nulli fere ſenſibili mutationi obnoxia videtur; namque anno 1741. menſe Aprili ea ſummo ſtudio, fauentibus et loco et inſtrumento et omnibus circumſtantiis, a b. parente obſeruata eſt 3°. 56′. W; ita vt hoc temporis interuallo tantum 26. minutis decreuiſſe videatur. In obſeruatione vero Iakutienſi errorem calami irrepſiſſe puto eamque *orientalem* eſſe ſuſpicor; id quod lineas magneticas

earumque ductus intuenti ſtatim patebit. Denique etiam hac occaſione antiquam aliquam obſeruationem recenſere placet, quam in libro aliquo bibliothecae imperialis manu incogniti auctoris conſignatam reperio: *Moſcuae A.* 1732. *menſe Aug. declinatio magnetis* 5° 26′.

§. 3. Si iam hae obſeruationes mappae declinatoriae ſuo quaelibet loco inſerantur: duo inprimis momenta, notatu haud indigna, conſpicienda ſe praebent:

I°. enim declinationes *orientales* manifeſtis produnt indiciis continuationem illius meridiani magnetici, qui per Nouam Hollandiam et inſulam Celebem in Chinam porrigitur; qui itaque motu fere perpendiculari vsque ad latitudinem 40 circiter graduum aſcendit; tum flexu directioni curuarum declinationis analogo verſus occaſum dirigi conſpitur, donec per regiones ſupra mare Caſpicum ſitas in Laponiam aſcendat.

II°. Si declinationes *occidentales* intuemur, veriſimillimum fit, declinationes maris Caſpici non, vt Cel. *Muſchenbroeckio* videbatur in diſſ. de magnete pag. 165, aſſignari debere curuis ex Noua Britania progreſſis, quae ſucceſſu temporis verſus aequatorem aliquantum deſcenderint, ſiquidem nunc quidem multo eſſe probabilius adparet, iſtas declinationes deberi curuis in Oceano Indico ab Halleio conſignatis iisque per Aſiam continuatis et verſus occaſum aliquomodo promotis; vti etiam Cel. *Stroemerus*

merus loc. cit. declinationes Europae auſtralioris non cum *Muſchenbroekio* lineis ex Virginia ductis, ſed iis, quae mare Aethiopicum peragrant, iure annumerat.

§. 4. De ſitu polorum magneticorum geographico quanquam ex his obſeruationibus parum luminis lucrari poſſe videmur; id tamen operam dedi, vt inueſtigarem, in quibus regionibus conſtituendi ſint iſti poli, quo declinationes ex theoria computatae ipſas obſeruationes aliquomodo referrent; cum ſcilicet abſurdum foret, polos telluris magneticos ſibi tanquam *puncta* concipere, quibus quippe ſine dubio aliquis ambitus atque extenſio quaedam competit, ita, vt de *regione* potius *polari*, quam de ipſo polo tanquam puncto conſiderato ſermo ſit; contentus fui, talia ſtatus terrae magnetici elementa quaeſiuiſſe, quae propoſitae cuicunque ex ſuperioribus obſeruationibus vel ipſa vel admiſſa in vno alteroue elemento vel in pluribus ſimul variatione *non nimis magna* ſatisfacerent. Quo conſtituto ex iſtis obſeruationibus coniunctim ſumtis ſequens ſeſe obtulit.

Coniectura de ſtatu telluris magnetico.

I. Polus magneticus *borealis* poſitus eſſe videtur in terra incognita *Groenlandiae*

1) in meridiano 25 gradus circiter a Pariſino ad occaſum diſtante;

2) et ſub latitudine 70, vel quod excurrit, graduum.

II. Polo autem magnetico *auſtrali* locus aſſignandus videtur in terris incognitis auſtralibus in meridiano aliquo ab Inſula Ceylon haud multum remoto, ita, vt eius

1) longitudo geographica 90 circiter graduum a meridiano Pariſino ad ortum,

2) latitudo vero 50°, propemodum ſtatui debere cenſenda ſit.

Omnes hae determinationes ſuos ſine dubio admittunt limites et potiſſimum obſeruationibus ſupra expoſitis ſunt adcommodatae; et ſimul quoque tantum hypotheſi, quod directio acus in loco quocunque circulum per binos polos magneticos et locum iſtum in ſuperficie terrae deſcriptum contingat, ſuperſtructae; interim id notari meretur, eas ſatis bene ſaltem quod ad polum borealem attinet congruere cum iis, quae a Cel. *Wilckio* ex obſeruationibus *inclinationis* magneticae ſunt deductae; de auſtrali vero difficilius eſt iudicium, neque etiam inclinationes inter Africam et Nouam Hollandiam detectae, cum ea, quam dixi, poli auſtralis poſitione conciliari non poſſunt.

§ 5. Atque haec ſunt potiſſimum, quibus coniectandis obſeruationes magneticae in Imperio Ruſſico inſtitutae occaſionem praebuerunt; qua ſuppeditata haud reor prorſus alienum formulas, ſatis ſimplices, tradidiſſe, ſecundum quas ex dato polorum

rum magneticorum ſitu geographico declinatio magnetica pro loco quouis propoſito poſſit computari.

Sint in ſuperficie telluris puncta P et p ambo poli magnetici: iungantur ii arcu Pp et ex polo terrae π ducatur arcus $\pi C = a$, arcum Pp ſub angulo $\pi CP = \zeta$ in C biſecans, vt ſit $PC = \frac{1}{2} Pp = b$. Arcus πC a meridiano aliquo fixo, v. c. Pariſino declinet verſus ortum angulo $L\pi C = \Phi$. Sit nunc λ locus ille propoſitus, pro quo declinatio acus magneticae ſit computanda, diſtet is a meridiano πL verſus ortum angulo $L\pi\lambda = \vartheta$, vt ſit $C\pi\lambda = \Phi - \vartheta$; et vocetur complementum latitudinis $\pi\lambda = \lambda$. Cum iam porro declinationem magneticam ex hypotheſi III. *Euleri* (*) ita ponam eſſe comparatam, vt directio acus circulum per locum propoſitum et binos polos magneticos deſcriptum contingat: concipiamus per P, λ et p circulum eſſe ductum, cuius centrum cadat in O; quo poſito ſi $\lambda\delta$ ſit ad $O\lambda$ normalis, angulus $\pi\lambda\delta = C\lambda\delta - C\lambda\pi$ erit declinatio quaeſita; quae in quemnam ſenſum cadat, ex ipſo linearum ſitu facile patet. Tab. VI. Fig. 7.

Atque hic quidem primo angulus $C\lambda\pi$ ſtatim definitur: demiſſo enim ex C in $\pi\lambda$ perpendiculo CD, et poſito ſegmento $\pi D = x$, ita, vt ſit

$$\text{tang.}\, x = \text{tang.}\, a \,\text{coſ.}\, (\Phi - \vartheta)$$

cx

(*) Memoir. de Berlin 1757.

ex nota triangulorum ſphaericorum proprietate ſtatim colligitur

$$\text{tang. } C\lambda\pi = \frac{\text{ſin. } x. \text{ tang. } (\Phi - \vartheta)}{\text{ſin. } (x - p)}$$

et poſito $C\lambda = v$, in ſubſidium calculi ſubſequentis computetur

$$\text{coſ. } v = \frac{\text{coſ. } a. \text{ coſ. } (x - p)}{\text{coſ. } x}.$$

Pro altero angulo $CL\delta$ inueniendo demittatur ex λ normaliter in PC arcus $\lambda\varepsilon$, poſitoque ſegmento $\pi\varepsilon = y$, vt ſit

$$\text{tang. } y = \text{tang. } p. \text{ coſ. } (\Phi - \vartheta)$$

habebitur

$$\text{tang. } \pi C\lambda = \frac{\text{ſin. } y. \text{ tang. } (\Phi - \vartheta)}{\text{ſin. } (a - y)}$$

ex quo, cum pro figura adpoſita ſit $\pi C\lambda = \zeta + PC\lambda$, angulus $PC\lambda = \eta$ innoteſcit.

Demiſſo iam ex O in $C\lambda$ perpendiculo OF et poſito ſegmento $FC = z$, ob $OCP = 90°$ erit

$$\text{tang. } z = -\text{ſin. } \eta. \text{ tang. } OC.$$

Cum vero ſit

$$\text{coſ. } OP = \text{coſ. } b. \text{ coſ. } OC$$

et

$$\text{coſ. } O\lambda = \text{coſ. } v. \text{ coſ. } OC - \text{ſin. } v. \text{ ſin. } OC. \text{ ſin. } \eta,$$

aequatis inter ſe OP et $O\lambda$ prodit

$$\text{tang. } OC = \frac{\text{coſ. } v - \text{coſ. } b}{\text{ſin. } v. \text{ ſin. } \eta}$$

adeoque hinc

$$\text{tang. } z = \frac{\text{coſ. } b - \text{coſ. } v}{\text{ſin. } v}$$

quo

quo inuento erit

$$\text{tang. } O \lambda C = \frac{-\text{ſin. } z}{\text{ſin. } (v - z) \text{ tang. } \eta}$$

atque ob

$$C \lambda \delta = 90^\circ \mp C \lambda O$$

hinc colligitur

$$\text{tang. } C \lambda \delta = \pm \frac{\text{ſin. } (v - z) \text{ tang. } \eta}{\text{ſin. } z}.$$

Elementa hic adhibita, *a*, *b*, ζ et Φ ex dato polorum magneticorum ſitu, per notas formulas trigonometricas facile computantur. Valores eorum medios, id eſt tales, qui propoſitae cuicunque ex obſeruationibus ſuperioribus, admiſſa ſcilicet in vno alteroue vel omnibus ſimul variatione *non nimis magna*, adcommodari poſſunt, inueni ſequentes:

$$a = 70^\circ;\ b = 75^\circ;\ \zeta = 7^\circ;\ \Phi = 44^\circ.$$

quorum exactiorem determinationem proximae occaſioni, aucto obſeruationum numero, reſeruo. His vero elementis cognitis, quomodo ſitus geographicus vtriusque poli magnetici ſit computandus, ſuperfluum foret hic prolixius exponi.

EPITOME

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXII. SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM

CVI ACCEDVNT OBSERVATIONES NONNVLLAE CIRCA TEMPVS, QVO FLVMEN NEVA GLACIE OBDVCITVR ET ITERVM AB EA LIBERATVR.

Auctore

I. ALBERTO EVLER.

Comparatis de nouo omnibus inſtrumentis, quae neceſſaria ſunt ad obſeruationes meteorologicas inſtituendas, incoepi prima die huius 1772^{di} anni eas eadem methodo annotare, qua annis praeteritis vſus ſum et quam fuſius in Tomi XIV. parte poſteriori horum Commentariorum explicui. Vt autem exteri melius ſuas obſeruationes cum meis conferre poſſint, expeditius mihi viſum eſt hic et in poſterum calendarium correctum vel gregorianum vbique receptum loco Iuliani ſequi.

His monitis obſeruationum ipſarum potiora momenta ſequenti ordine ſeorſim enarrabo.

I.

I. Obſeruationes Barometricae.

Scala Barometri diuiſa eſt in pollices, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt. Quiuis autem iterum in viginti partes aequales ſubdiviſus eſt, ita vt facile ſingulae partes centeſimae vnius pollicis diſtingui poſſint. Diameter tubi aliquantillum partem decimam pollicis ſuperat. Primis ſeptem menſibus locus barometri diſtabat ab oſtio fluminis Nevae interuallo 6000 circiter pedum, et eleuatio eius ſupra mediam ſuperficiem Nevae erat 30 pedum. Poſthac verum barometrum ad diſtantiam 5000 pedum ab oſtio transportatum fuit et eleuatio loci eius ſupra planum fluminis 18 pedes vix ſuperabat.

Obſeruationes ipſas circa altitudines barometri in duas tabulas ſequentes diſtribui, quarum prima exhibet pro ſingulis menſibus 1) altitudinem maximam et 2) minimam, 3) variationem ſeu differentiam inter altitudinem maximam et minimam 4) medium ſeu ſemi - ſummam altitudinis maximae et minimae; denique 5) altitudinem barometri mediam ſiue ſummam omnium altitudinum diuiſam per numerum earum.

Tabula ſecunda vero oſtendit per quod intervallum temporis ſtatus Barometri in quolibet menſe ſuperabat altitudines $28\frac{10}{100}$, $28\frac{5}{100}$, 28 et $27\frac{95}{100}$ pollicum, quibus interuallis per dies et horas expreſſis adiecta eſt columna ſingularis, quae indicat altitudinem, quam ſtatus barometri ſuperabat praeciſe per dimidium menſis.

 I.

I. Barometri Altitudines maximae, minimae et mediae vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1772. ſecundum Calendarium Gregorianum.

Menſe	Altitudo maxima Dig. p. c.	die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	die hora.	Variatio Dig. p. c.	Medium. Dig. p. c.	Altitudo media Dig. p. c.
Ianuar.	28. 61	20. merid.	27. 47	30. III p. m	1. 14	28. 04	28. 13
Februar.	28. 48	15. XI. a. m.	27. 10	27. II. p. m.	1. 38	27. 79	27. 93
Mart.	28. 61	8. VII. a. m.	27. 51	26. VI. p. m.	1. 10	28. 06	28. 10
April.	28. 31	14. VI. a. m.	27. 38	18. VI. a. m	0. 93	27. 84	27. 86
Mai.	28. 37	14. IX. a. m.	27. 55	18. VI. a. m	0. 82	27. 96	28. 05
Iunii	28. 43	13. merid.	27. 63	28. X. p. m.	0. 80	28. 03	27. 95
Iul.	28. 23	23. VI. a. m.	27. 46	18. meridie	0. 77	27. 84	27. 89
Auguſt.	28. 22	6. VI. p. m.	27. 45	15. III. a. m.	0. 77	27. 83	27. 88
Sept.	28. 33 28. 56	15. VI. a. m. 30. XII. p. m.	27. 52	4. III. a. m.	0. 81 1. 04	27. 92 28. 04	28. 01
Octobr.	28. 65	13. X. p. m.	27. 41	26. X. p. m.	1. 24	28. 03	28. 23
Nov.	28. 41 28. 59	18. III. p. m. 30. XII. p. m.	27. 66	12. III. p. m.	0. 75 0. 93	28. 03 28. 12	28. 08
Decemb.	28. 77	12. XI. p. m.	27. 62 27. 42	29. II. p. m. 31. XII. p. m.	1. 15 1. 35	28. 19 28. 09	28. 10
Anno 1772.	28. 77	Menſe Decembr.	27. 10	Menſe Februar.	1. 67	27. 93	28. 03

II.

II. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem mediam.

Menſe	ſupra 28. 10 Dies horae	ſupra 28. 05 Dies horae	ſupra 28. 00 Dies horae	ſupra 27. 95 Dies horae	per demidium menſis, ſupra Dig. p. c.
Ianuar.	18. 18	20. 12	21. 15	24. 9	28. 18
Februar.	8. 3	10. 0	11. 12	14. 0	27. 93
Mart.	15. 18	19. 12	22. 0	24. 9	28. 11
April.	4. 18	5. 12	6. 12	8. 3	27. 83
Mai.	16. 0	20. 12	21. 21	23. 12	28. 11
Iun.	6. 15	9. 6	12. 6	14. 9	27. 94
Iulii	7. 21	11. 3	14. 12	16. 21	27. 98
Auguſt.	5. 0	7. 12	9. 3	11. 15	27. 83
Sept.	8. 3	13. 3	16. 12	19. 15	28. 02
Octobr.	18. 15	21. 15	23. 15	24. 21	28. 30
Nov.	17. 0	18. 9	20. 0	21. 6	28. 13
Decbr.	10. 21	12. 3	16. 3	19. 18	28. 01
Anno 1772.	137. 12	169. 3	195. 15	222. 18	per demidium anni ſupra 28. 03

Vbi notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros aſſignare, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem.*

Patet ergo altitudinem maximam barometri per totum annum fuiſſe $28\frac{77}{100}$ pollicum die 12ma Menſis Decembris hora XI^{ma} poſt meridiem.

At altitudo minima fuit $27\frac{1}{10}$ pollicum die 27ma Menſis Februarii hora 11da poſt meridiem: vnde variatio totalis $1\frac{67}{100}$ poll. et medium inter altitudinem maximam et minimam $27\frac{93}{100}$ poll.

Altitudo media autem inter omnes fuit $28\frac{3}{100}$ poll.

Porro mercurius in tubo barometri ſe ſuſtentabat ſupra

$28\frac{10}{100}$ poll. per dies $137\frac{1}{2}$

$28\frac{5}{100}$ poll. per dies $169\frac{1}{2}$

28 poll. per dies $195\frac{5}{8}$ et ſupra

$27\frac{95}{100}$ poll. per dies $222\frac{3}{4}$.

Vnde concluditur mercurium ſe ſuſtentaſſe per interuallum dimidii anni vel 183 dierum ſupra altitudinem $28\frac{3}{100}$ poll. quae altitudo prorſus conuenit cum media.

II.

II. Obſeruationes Thermometricae.

Thermometrum deslislianum, cuius conſtructionis principium ſatis conſtat, aëri expoſitum et in tali loco ſemper poſitum fuit, vt ſol id nec directe nec per reuerberationem irradiare potuerit.

Obſeruationes hoc Thermometro inſtitutas iterum in duas tabulas diſpoſui, quarum prior altitudinem maximam et minimam vna cum differentia inter easdem indicat, poſterior vero ſpeciatim ſtatum frigoris et caloris pro ſingulis menſibus exhibet. Intelligo autem per ſtatum frigoris altitudinem minimam Thermometri pro vnoquoque die, quae plerumque tempore matutino et veſpertino obſeruatur; ſimilique modo per ſtatum caloris altitudinem maximam Thermometri vel eam, quae plerumque poſt meridiem notatur.

Oſtendit autem tabula haec ſecunda pro quouis menſe numerum dierum, quibus ſtatus frigoris et caloris ſuperabat terminos nonnullos in Thermometro deslisliano. Vnde patet hoc anno 1772 fuisſe dies 144 frigidiores gradu 150°, inter quos 89 frigidiores fuerunt gradu 160° et 56 frigidiores gradu 170, deinde 25 dies, quibus frigus ſuperabat 180 gradum, et inter hos 14 dies, quibus frigus gradum 190um et 3 dies, quibus gradum 200^{mam} ſuperabat.

Sic et de ſtatu caloris.

I.

I. Thermometri Altitudines minimae et maximae pro ſingulis menſibus anni 1772. ſecundum Calendarium Gregorianum.

Menſe	Altitudo minima Gradus	die hora	Altitudo maxima Gradus	die hora	Differentia Gradus
Ianuar.	196	7. VI. a. m.	155	1. VI. a. m. 19. II. p. m.	41
Februar.	208	12. VI. a. m.	146	5. } 9. } II. p. m.	62
Mart.	184	16. VI. a. m.	132	25. II. p. m.	52
April.	158	4. V. a. m	128	16. II. p. m.	30
Mai.	151	3. XI. a. m.	125	20. } 26. } 27. } II. p. m.	26
			115	31. I. p. m.	36
Iun.	144	13. VI. a. m.	111	4. II. p. m.	33
Iulii	136	7. V. a. m.	104	26. II. p. m.	32
Auguſt.	140	16. VI. a. m.	106	4. } 5. } II. p. m	34
Septembr.	145	11. V. a. m.	116	26. II. p. m.	29
Octobr.	151	21. VI. a. m.	116	1. II. p. m.	35
Nouembr.	155	18. VI. a. m	134	9. meridie	21
Decembr.	174	30. VII. a. m.	145	19. II. p. m.	29
Anno 1772.	208. Menſe Febr.		104. Menſe Iulii		104

II. Status

2. Status frigoris et caloris.

Menſe	Dies quibus frigus ſuperabat gradus							Dies calidiores gradibus				
	200	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150
Ianuar.		2	5	17	30	31	31					
Februar.	3	12	16	19	27	29	29					3
Martii			4	19	25	25	31				5	9
Aprilis						19	30			4	18	30
Maii						5	25		1	10	27	31
Iunii							7		7	23	30	30
Iulii								12	27	31	31	31
Auguſti							1	7	21	31	31	31
Septembr.							6		4	24	30	30
Octobr.						4	18		1	5	24	31
Nouembr.						5	27				9	29
Decembr.				1	7	26	31					12
A. 1772.	3	14	25	56	89	144	236	19	61	128	205	267

Speciatim vero frigus obſeruatum fuit intra gradus

210 et 200 die 12, 15, 21, Februarii

200 et 190 die 7, 29. Ian. et die 11, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 29, Februarii.

190 et 180 die 5, 6, 25, Ian. item die 10, 13, 19, 28 Febr. et die 12, 16, 23, 24 Martii

180 et 170 die 2, 3, 4, 8, 9, 11, 13, 26, 27, 28, 30, 31. Ian. item die 16, 25, 26 Febr. porro die 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21. Martii deniqúe die 30. Decembris.

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus

100 et 110 die 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Iulii; et die 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10. Menſis Auguſti.

110 et 120. die 31. Maii, porro die 3, 4, 5, 15, 16, 26, 29. Iunii, item die 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Iulii, deinde die 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 30. Auguſti, die 19, 24, 26, 27. Septembris; denique die 1. Octobris.

120 et 130. die 16, 17, 26, 27. Aprilis; die 2, 13, 19, 20, 21, 26, 27, 29, 30. Maii; die 1, 2, 6, 7, 8, 14, 17, 18, 21 — 25, 27, 28, 30. Iunii; die 1, 8, 11, 14. Iulii; die 15, 16, 17, 20 — 23, 28, 29, 31. Auguſti; die 1, 2, 3, 5, 7, 9 — 17, 20, 22, 23, 25, 28, 29. Septembris, et die 2, 3, 4, 5. Menſis Octobris.

III.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia	Vent. lenis	Vent. fortis	Procelloſus	Nord	N O	Oſt	S-O	Süd	S-W	Weſt	N - W	Variabilis.
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuarii	4	7	11	9	3	6	4	3	1	8	3	—	3
Februar.	1	16	10	2	9	5	1	—	—	5	4	4	1
Mart i	6	13	6	6	12	3	5	2	3	2	3	1	—
Aprilis	3	16	10	1	7	—	1	1	3	8	3	6	1
Maii	3	12	9	7	4	11	—	—	—	2	3	10	1
Iunii	5	14	8	3	8	3	—	2	1	3	6	6	1
Iulii	9	11	9	2	6	2	14	—	1	—	1	7	—
Auguſti	7	20	3	1	1	2	2	2	2	11	4	6	1
Septembr.	9	9	8	4	—	1	2	4	2	8	8	5	—
Octobris	2	11	15	3	5	2	1	—	—	7	13	3	—
Nouemb.	8	3	12	7	—	3	2	5	8	7	3	2	—
Decembr.	1	18	11	1	6	3	2	3	4	5	3	5	—
A. 1772.	58	150	112	46	61	41	34	22	25	66	54	55	8

Procellae ſpeciatim flabant e regione	dies
Nord die 11. Martii, 24. Aprilis, 24. Maii et 9. Iunii - -	4
N–O die 25. Febr. 12. Martii, 15, 16, 17, 18, Maii, 12. Iunii et 15 Auguſti - - - - - - - - - -	8
Oſt die 13, 29. Ian. 20, 21. Mart. 1, Iul. 26. Oct. et 17 Dec	7
S–O die 11, 12, 17, 18. Ianuarii et 5. Nouembris - -	5
Süd die 11 et 12. Nouembris - - - - - - - - -	2
S–W die 16, 19. Ianuar. 1 Martii, 17 Iunii, 21 Septembr. 28 Oct. et 7 Nouembris - - - - - - - - -	7
Weſt die 14 Ianuarii, 27 Febr. 2 Martii, 4 Maii, 10 Iulii, 10, 22, 23. Sept. 30 Octobr. 17, 19 et 21 Nouembris	12
N–W die 6 Maii - - - - - - - - -	1

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe	1. Coelum erat ſerenum die	Summa dierum	2. Nebuloſum. die	Summa dierum
Ianuarii	1. 3. 5. 6. 25. 26. - - -	6	- - - - - -	0
Februarii	10 — 15. 17 — 25. 28. 29. -	17	4.8.11.12.14.15.18.29.	8
Martii	2 — 14. 16. 18. 23. 24. 25. -	18	8. 15. 17. - - - -	3
Aprilis	6. 7. 11 — 15. 27. 30. - -	9	13. 14. 17. 27. 28 -	5
Maii	1.2.3.12.13.18.19.20-23.29.30.	11	5. 11. 31. - - -	3
Iunii	1. 2. 8 14. 25. 30 - - -	6	3. 24. 30. - - -	3
Iulii	1. 2. 3. 4 20 — 31. - - -	16	4. 5. 17 20. 23. 30.	6
Auguſti	1. 2. 4 - - - - - -	3	4. 5. 12. 14. - -	4
Septembr	11. 12. 26. - - - - -	3	3. 8. 18. 19. 30. -	5
Octobr.	1. 2. 12. 13. 20. - - - -	5	4. 5. 12. - - -	3
Nouembr.	1. 3. 18. 21. 22. - - - -	5	2. 4. 22. 26. 27. 29. 30	7
Decembr	23. 27. 30. - - - - - -	3	1. - - - - - -	1
A. 1772.	dies ſereni ergo fuerunt - -	102	Dies nebuloſi - -	48

Menſe	3. Nix. die	Summa dierum	4. Pluuia. die	Summa dierum
Ianuarii	10.13—16.19—23.27.30.31.	13	- - - - - - - - -	—
Februarii	1 — 6. 8. 9. 16. 27. - -	10	- - - - - - - -	—
Martii	1. 14. 21. 22. 28. 30. - -	6	26. 29. 31. - - - - - -	3
Aprilis	1. 2. 3. 5. 18. 20. 24. - -	7	1. 2. 5. 8. 10. 16. 18. 19. 25. 26	10
Maii	9. 10. 11. 16. - - - - -	4	4.6.7.8.11.15.16.21.22.27.28.31	12
Iunii	- - - - - - - -	—	4. 6. 11. 16 — 20. 22. 26. 27. 28.	12
Iulii	- - - - - - - -	—	5 — 12. 17. - - - - - -	9
Auguſti	- - - - - - - -	—	5. 12 — 20. 22 — 25. 27. 28. 30.	17
Septembr.	- - - - - - - -	—	1—4. 6. 8. 10. 15—18. 20—23. 25. 27. 28. 29. - - -	19
Octobris	20. 21. 22. 26. 28. - - -	5	4. 11. 15 — 18. 24. 26 — 30.	12
Nouembr.	30. - - - - - - -	1	7.8.9.12-15.17.19.23-26.29.30.	15
Decembr.	2.4.5.7.10.11.12.14—17.21. 22. 29. 31 - - -	15	1. 18. 20. 25. 28. - - - - -	5
A. 1772.	Nix decidit diebus - -	61	Pluit diebus - - - - -	114

V.

V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 5; die ſcilicet 3, 5. Aprilis, porro die 10 et 16 Maii, denique die 28 Octobris.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 21, die ſcilicet 6 et 31 Ianuarii; item die 10, 28 et 29 Februarii, porro die 2, 5, 6, 8, 10 et 24 Martii, die 3, 4 et 11 Aprilis, die 24 et 25 Septembris, die 27 Octobris, die 15 et 21 Nouembris, denique die 18 et 24 Decembris.

Tonuit 7[ies], die ſcilicet 4 et 27 Iunii, die 5 Iulii, die 12, 14 et 27 Auguſti, et vltimo die 3 Septembris.

Parhelion nitidum obſeruatum fuit die 30 Decembris.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit die 18 Aprilis et glacie obductum fuit die 23 Decembris.

Hac occaſione lectori auido huiusmodi annotationum non diſpliciturum eſſe arbitror, hic vno intuitu omnia tempora aduentus et diſceſſus glaciei e flumine Neua inuenire, quae ab anno 1718. hucusque ſerie non interrupta obſeruata fuerunt. Quam ob cauſam ſtatim eam ipſam tabulam adiungam, quae ſingulis annis noſtro Calendario inſeritur: vbi inſuper tempus ad Calendarium gregorianum reduxi et numerum dierum adnexui, per quos flumen obductum et liberum fuit a glacie. Deinde in duabus ſequentibus tabellis ſeorſim expoſui, quibus annis tempora aduentus et diſceſſus glaciei intra ſingulos limites per 6 dies progredientes contenta ſint.

Hinc patet, ſpatio 56 annorum glaciem flumen Neua

I. Seriſſime obduxiſſe die 23 Decembris, quod quidem euenit hoc 1772. Anno, ac

II. Citiſſime die 31 Octobris, anno ſcilicet 1769. Hi bini limites diſtant inter ſe interuallo 53 dierum, et medium incidit in diem 26 Nouembris, quod coincidit cum tempore medio inter omnia capto.

III. Glacies porro flumen citiſſime deſeruit die 2 Aprilis, quod eueniſſe refertur Anno 1723.

IV. At ſeriſſime hoc contigit die 7 Maii, annis ſcilicet 1739 et 1742. Interuallum intra hos binos limites eſt 35 dierum et medium cadit in diem 19 Aprilis. Sin autem medium

dium inter omnia haec tempora capiatur, inuenitur id cadere in diem 20 Aprilis.

V. Interuallum temporis, quo flumen glacie obductum manſit, fuit maximum anno 1739-1740, ſcilicet 183 dierum, vel per ſemisſem anni et

VI. Minimum anno 1722-1723. vt et anno 1772-1773, 114 dierum: variatio maxima eſt itaque 69 dierum et interuallum medium 148 dierum Sin autem medium intra omnia haec interualla capiatur, inuenitur id 145 dierum.

VII. Interuallum temporis, quo flumen a glacie liberum fuit, erat maximum et quidem 249 dierum, anno hoc praeterlapſo 1772, et

VIII. Minimum fuit Anno 1739, ſcilicet tantum 181 dierum. Differentia ergo maxima eſt 68 dierum, et medium 215 dierum. Sin autem medium inter omnia haec interualla capiatur, inuenitur id 220 dierum.

IX. Tandem ex tabellis binis poſterioribus patet, glaciem flumen Neua ſaepiſſime reliquiſſe circa medium Aprilis.

X. At flumen glacie obductum fuit frequentiſſime circa medium Nouembris, vt et circa initium Decembris.

I. Ta-

I. Tabula indicans tempus, quo flumen glacie obductum et ab ea iterum liberatum fuit.

Anno	Flumen a glacie liberatum		Flumen glacie obductum		Flumen a glacie liberum fuit per dies	Flumen glacie obductum manſit per dies
	Calend. Iul.	Calend. Corr.	Calend. Iul.	Calend. Corr.		
1718.	4. April.	15. April.	11. Nov.	22. Nov.	221	159
1719.	19. - -	30 - -	30. - -	11. Decemb.	225	134
1720.	12. - -	23. - -	7. - -	18. Nov.	209	154
1721.	10. - -	21. - -	20. - -	1. Dec.	224	147
1722.	16. - -	27. - -	28. - -	9. - -	226	114
1723.	22. Mart.	2. - -	16. - -	27. Nov.	239	141
1724.	5. April.	16. - -	17. - -	28. - -	226	146
1725.	12. - -	23. - -	28. - -	9. Dec.	230	129
1726.	6. - -	17. - -	24. - -	5. - -	232	141
1727.	14. - -	25. - -	30. - -	11. - -	230	118
1728.	27. Mart.	7. - -	16. - -	27. Nov.	234	141
1729.	6 April.	17. - -	30. - -	11. Dec.	238	133
1730.	12. - -	23. - -	[31. October / 7. Nouembr.	[11/18. Nov.	201	168
1731.	24. - -	5. Mai.	9. Nov.	20. Nov.	199	147
1732.	4. - -	15. April.	20 - -	1. Dec.	230	137
1733.	[6/14. April.	[17/25. - -	22. - -	3. - -	222	143
1734.	15. - -	26. - -	1. - -	12. Nov.	199	146
1735	26. Mart.	6. - -	6. - -	17. - -	224	158
1736.	12. April.	23. - -	7. - -	18. - -	209	138
1737.	[25. *Mart.* / 11. *April.*	[5/22. - -	9. - -	20. - -	212	153
1738.	11. April.	22. - -	9. - -	20. - -	212	168
1739.	26. - -	7. Mai.	24. Octobr.	4. - -	181	183
1740.	24. - -	5. - -	14 Nov.	25. - -	204	156
1741.	19. - -	30. April.	14. - -	25. - -	209	163
1742.	26. - -	7. Maj.	20. - -	1. Dec.	208	128
1743.	30. Mart.	10. April.	20. - -	1. - -	235	137
1744.	5. Aptil.	16. - -	16. - -	27. Nov.	225	145
1745.	10. - -	21. - -	27. Oct.	7. - -	199	169
1746.	14. - -	25. - -	8 Nov.	19. - -	208	168
1747	25. - -	6. Mai.	8. Nov.	19. - -	197	158

Flumen

Anno	Flumen a glacie liberatum		Flumen glacie obductum		Flumen a glacie liberum per dies	Flumen glacie obductum manſit per dies
	Calend. Iul.	Calend. Corr.	Calend. Iul.	Calend. Corr.		
1748.	14. April.	25. April.	3. Nov.	14. Nov.	203	171
1749.	23. - -	4. Mai.	20. - -	1. Dec.	211	124
1750.	25. Mart.	4. April.	23. Octobr.	3. Nov.	212	154
1751.	26. - -	6. - -	7. Nov.	18. - -	227	151
1752.	6. April.	17. - -	21. - -	2. Dec.	229	136
1753.	6. - -	17. - -	25. - -	6. - -	233	132
1754.	7. - -	18. - -	16. - -	27. Nov.	223	138
1755.	3. - -	14. - -	24. - -	5. Dec.	235	130
1756.	2. - -	13. - -	12. - -	23. Nov.	223	134
1757.	27. Mart.	7. - -	20. - -	1. Dec.	237	140
1758	9. April.	20. - -	4. - -	15. Nov.	209	156
1759.	9. - -	20. - -	9. - -	20. - -	213	164
1760.	21. - -	2. Mai.	18. - -	29. - -	211	137
1761.	4. - -	15. April.	16. - -	27. - -	226	137
1762.	2. - -	13. - -	20. - -	1. Dec.	232	154
1763.	23. - -	4. Mai.	8. - -	19. Nov.	199	143
1764.	31. Mart.	11. April.	23. - -	4. Dec.	238	123
1765.	29. - -	9. - -	24. - -	5. - -	241	135
1766.	8. April.	19. - -	23. - -	4. - -	229	129
1767.	1. - -	12. - -	23. - -	4. - -	236	144
1768	15. - -	26. - -	1. Dec.	12. - -	230	126
1769.	6. - -	17. - -	20. Octobr.	31. Octobr.	196	175
1770.	12. - -	23. - -	11. Nov.	22. Nov.	213	159
1771.	19. - -	30. - -	13. - -	24. - -	208	146
1772.	7. - -	18. - -	12. Dec.	23. Dec.	249	114
1773.	5. - -	16. - -				

Flumen a glacie liberabatur.

Intra limites Calend. Iulian.		Calendar. Correct.		Annis	Summa Annor.
20. Mart.	26. Mart.	31. Mart.	6. April.	1723. 37. 50. - - - - -	3
25. —	31. —	5. April.	11. —	1728. 35. 43. 51. 57. 65. -	6
30. —	5. April.	10. —	16. —	1718. 32. 55. 56. 61. 62. 64. 67.	8
4. April.	10. —	15. —	21. —	1724. 26. 29. 33. 44. 52. 53. 54. 58. 59. 66. 69. 72. 73.	14
9. —	15. —	20. —	26. —	1720. 21. 25. 27. 30. 36. 38. 45. 46. 48. 70. - - - -	11
14. —	20. —	25. —	1. Mai.	1719. 22. 34. 41. 68. 71. -	6
19. —	25. —	30. —	6. —	1731. 40. 49. 60. 63. - -	5
24. —	30. —	5. Mai.	11. —	1739. 42. 47. - - - -	3

Flumen glacie obducebatur.

Intra limites Calend. Iulian.		Calend. Correct.		Annis	Summa Annor.
15. Octob.	21. Oct.	26. Octob.	1. Nov.	1769. - - - - - - - -	1
20. —	26. —	31. —	6. —	1739. 50. - - - - - - -	2
25. —	31. —	5. Nov.	11. —	1745. - - - - - -	1
30. —	5. Nov.	10. —	16. —	1730. 34. 38. 58. - - - -	4
4. Nov.	10. —	15. —	21. —	1720. 31. 35. 36. 37. 38. 46. 47. 51. 59. 63. - - -	11
9. —	15. —	20. —	26. —	1718. 40. 41. 56. 70. 71. -	6
14. —	20. —	25. —	1. Dec.	1723. 23. 28. 43. 44. 54. 57. 60. 61. - - - -	9
19. —	25. —	30. —	6. —	1721. 26. 32. 33. 42. 49. 52. 55. 62. 64. 65. 66. 67. -	13
24. —	30. —	5. Dec.	11. —	1722. 25. 53. - - - -	3
29. —	5. Dec.	10. —	16. —	1719. 37. 29. 68. - - -	4
4. Dec.	10. —	15. —	21. —	- - - - - - -	0
9. —	15. —	20. —	26. —	1772. - - - - - -	1

Errata.

pag. 674. lin. 1. loco $7^{h} 24'. 0''$. lege $7^{h} 14'. 0''$.
— lin. 10. loco $\frac{8}{19}$. Sept. lege $\frac{8}{19}$. Octobr.

BRITISH ... NATURAL HISTORY



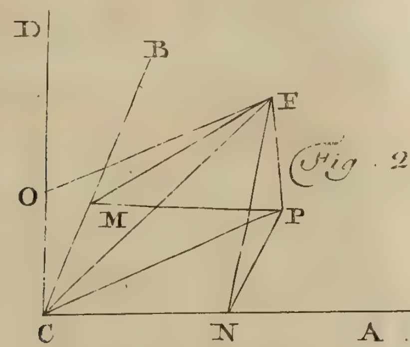


Fig. 2.

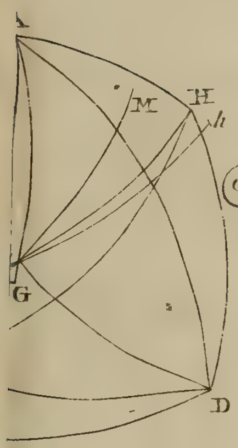


Fig. 4.

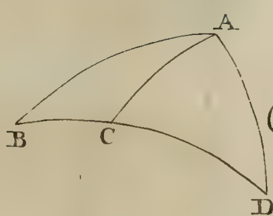


Fig. 3.

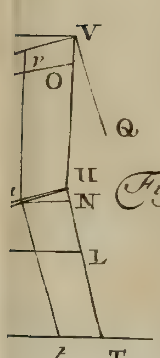


Fig. 5.

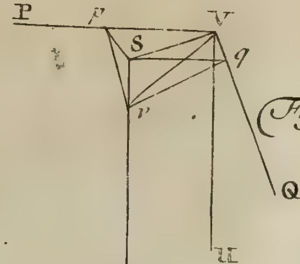
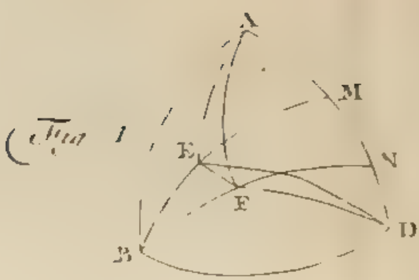
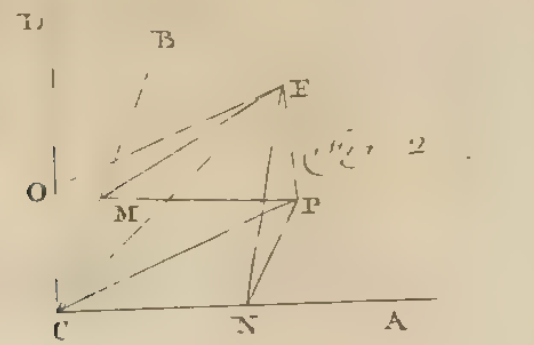
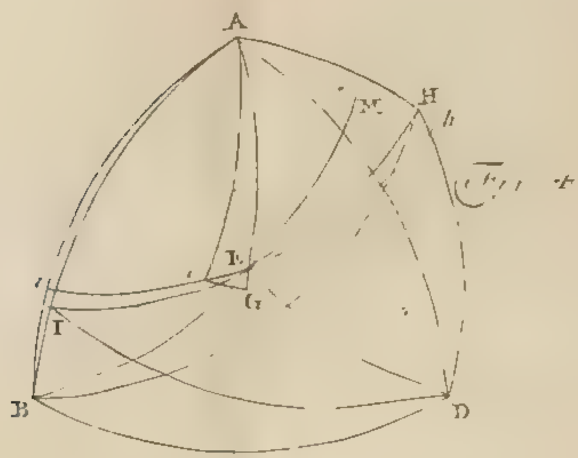
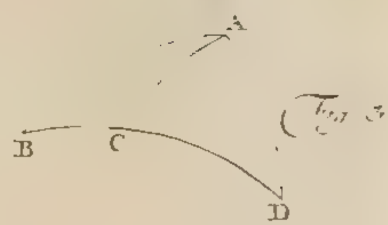


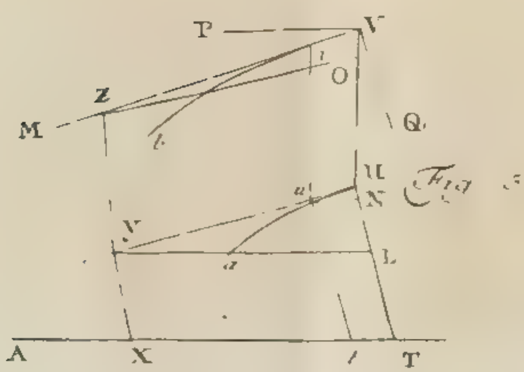
Fig. 6.

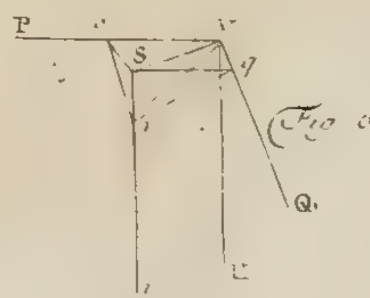

Fig. 1
A
M
E
N
F
D
B


B
E
Fig. 2
O
M
P
C
N
A


A
H
h
M
Fig. 4
E
G
I
B
D


A
Fig. 3
B
C
D


P
V
Z
O
M
Q
u
N
Fig. 5
Y
L
a
A
X
T


P
V
S
q
Fig. 6
Q

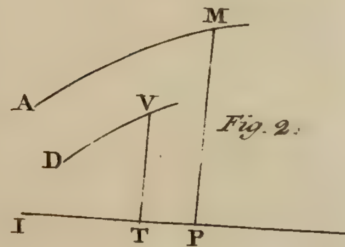


Fig. 2.

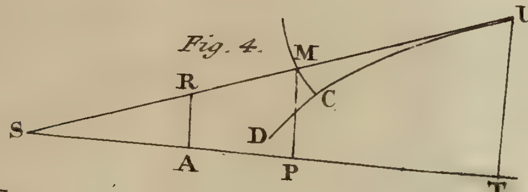


Fig. 4.

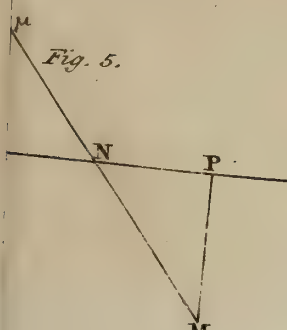
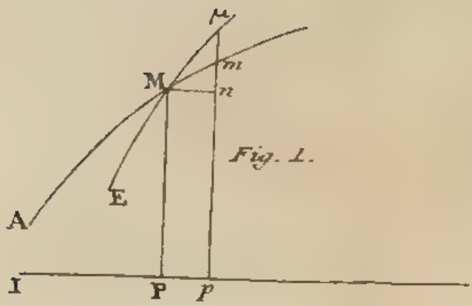
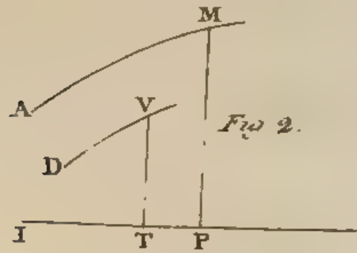
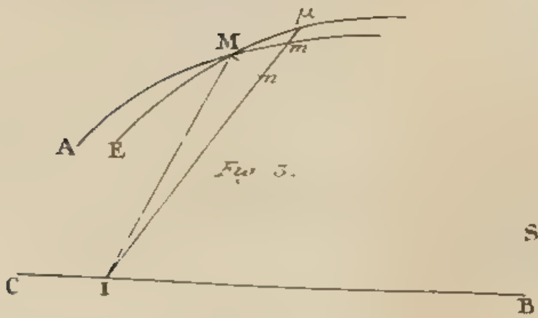
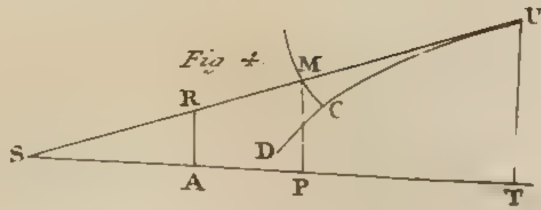


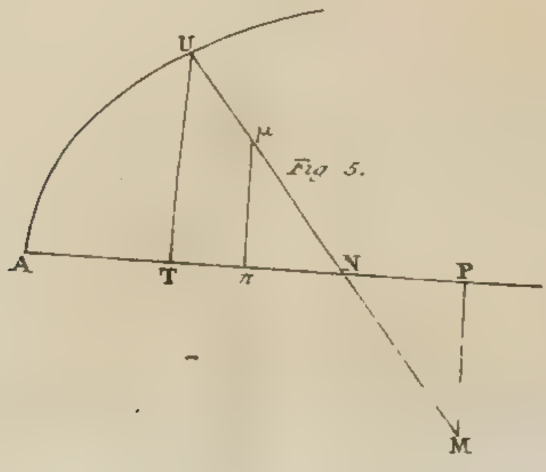
Fig. 5.


μ
M
m
n
Fig. 1.
A
E
I
P
p


M
A
V
Fig. 2.
D
I
T
P


μ
M
m
m
A
E
Fig. 3.
C
I
B


U
Fig. 4.
M
R
C
S
D
A
P
T


U
μ
Fig. 5.
A
T
π
N
P
M

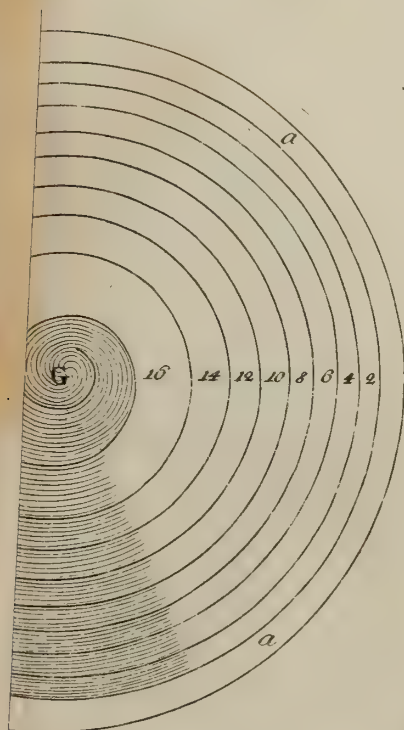
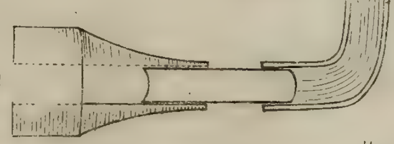


Fig. 2.



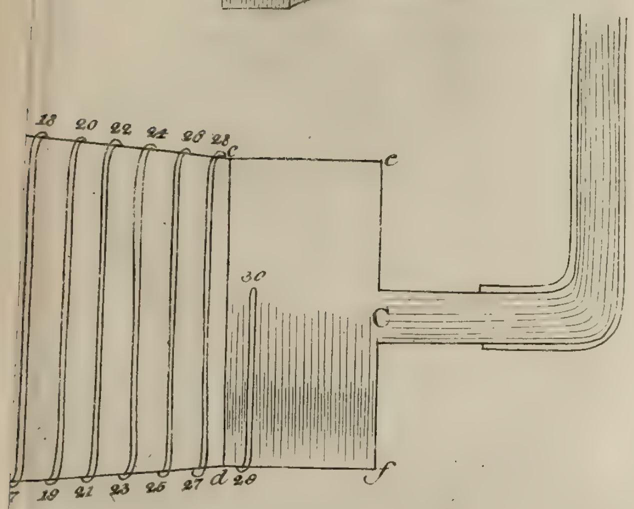


Fig. 1

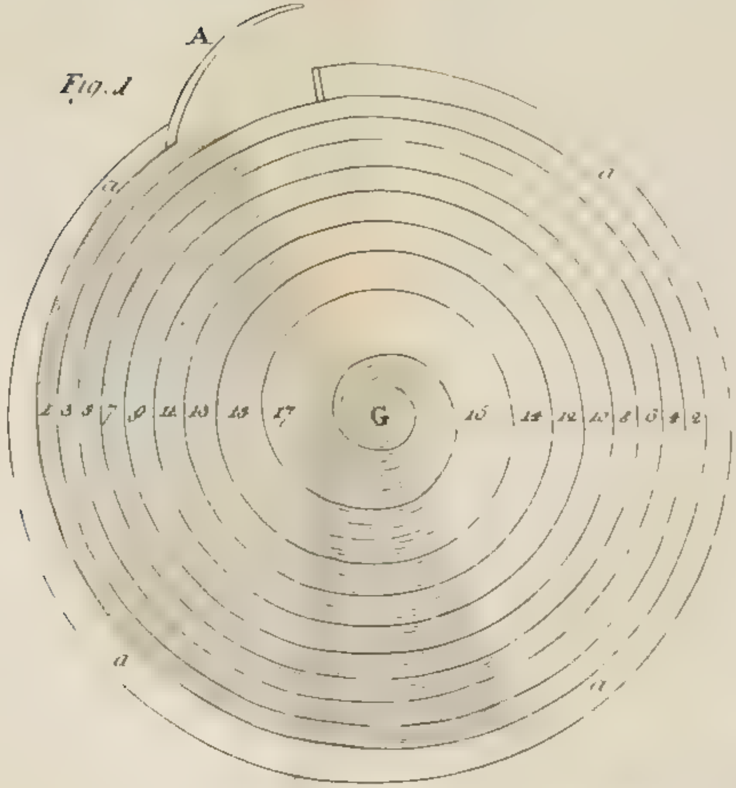
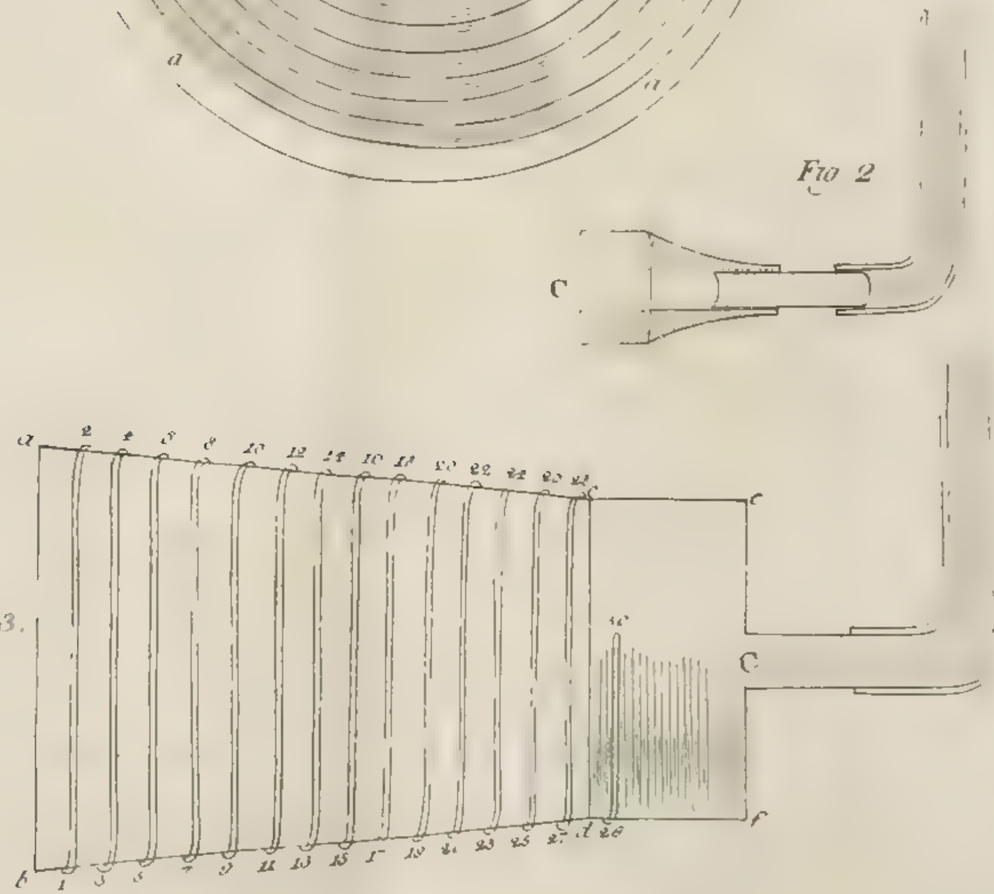
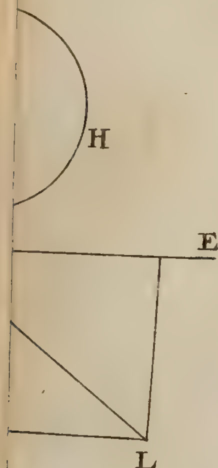


Fig. 2

Fig. 3.





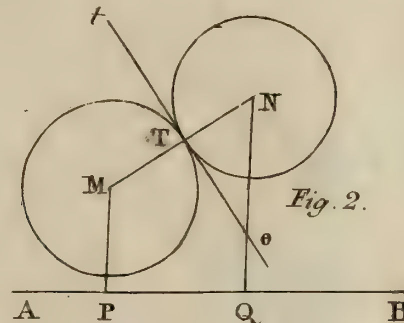
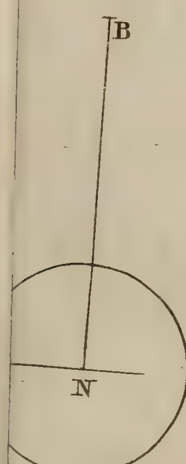


Fig. 2.



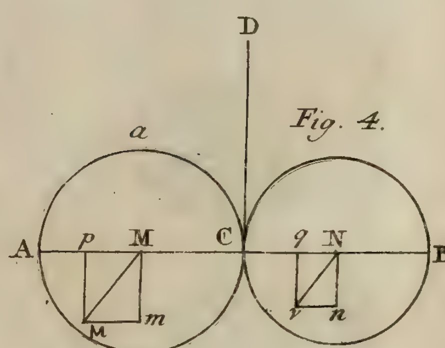
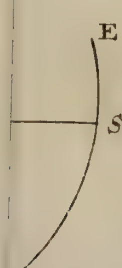


Fig. 4.



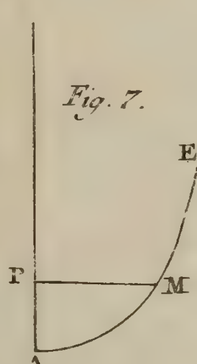


Fig. 7.

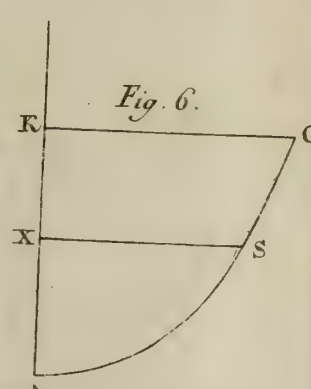


Fig. 6.

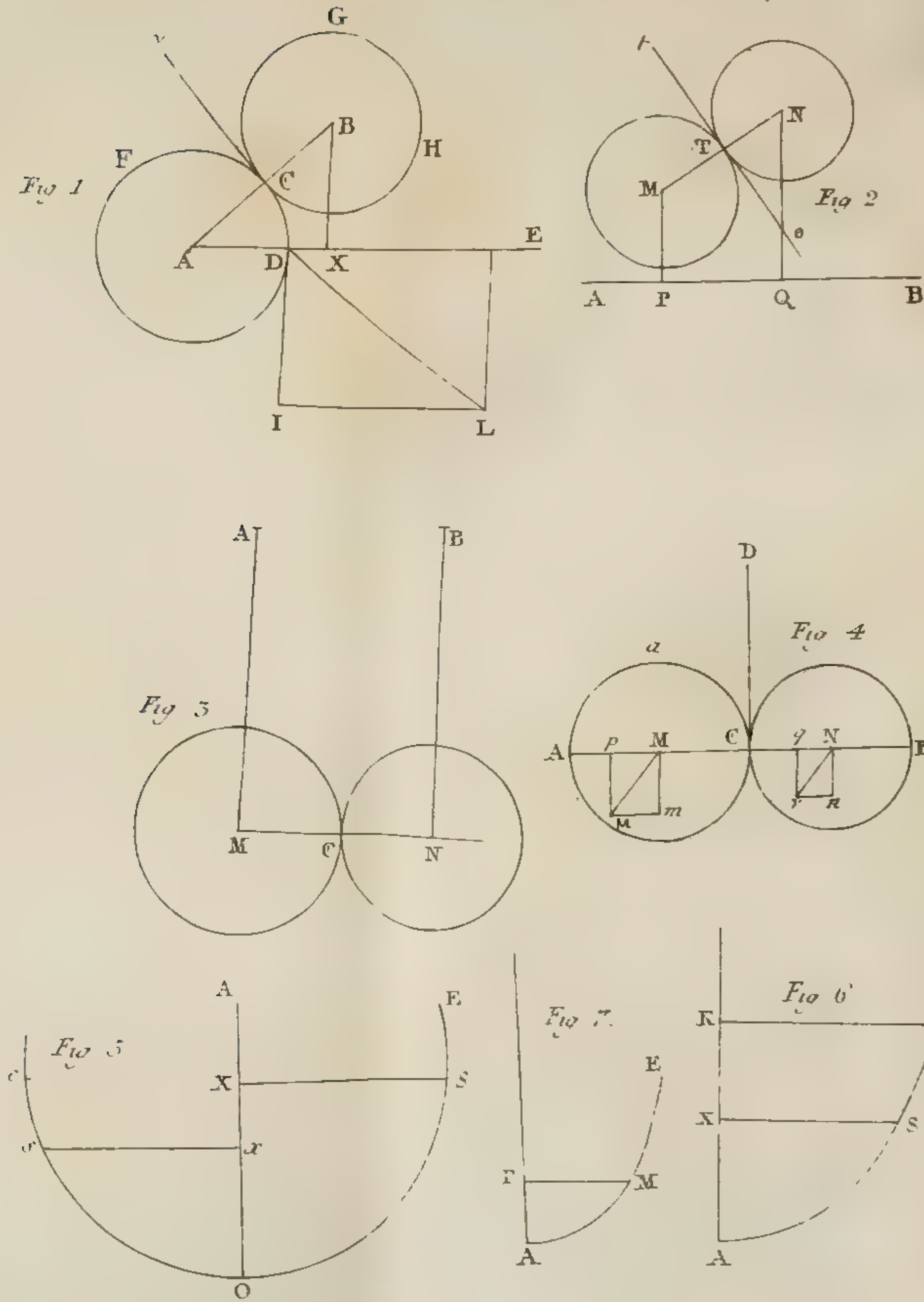
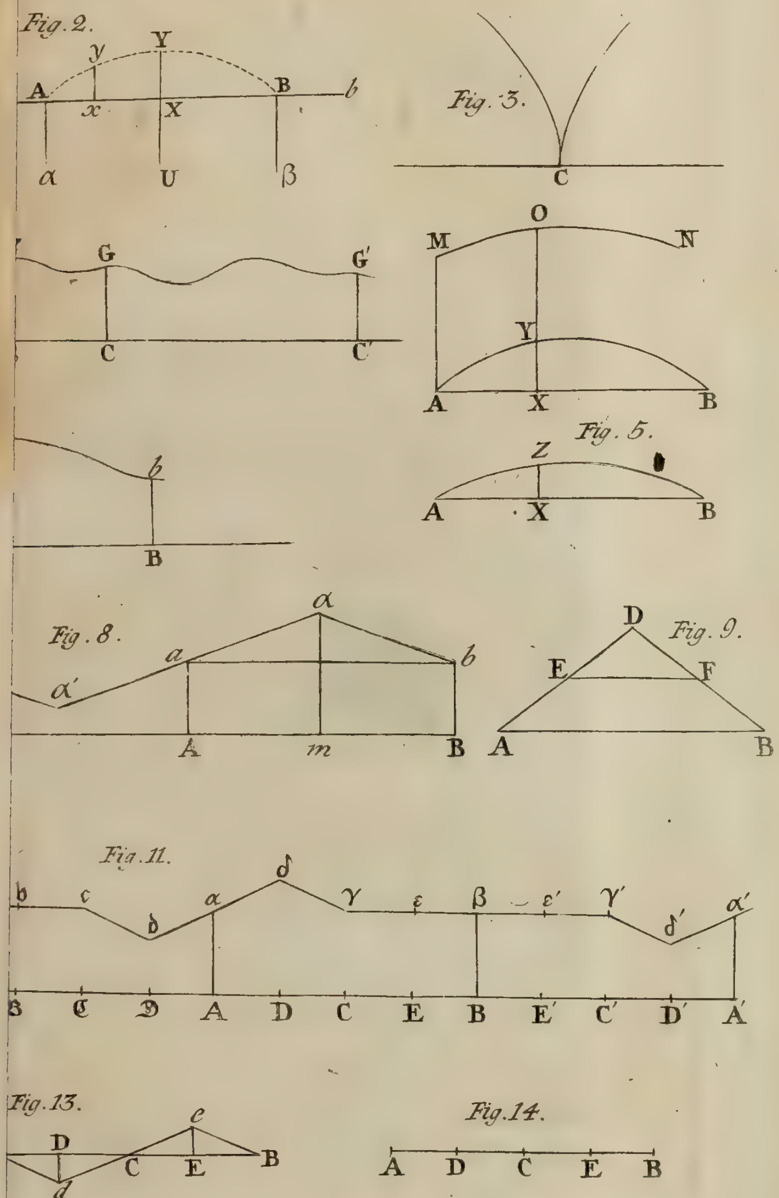
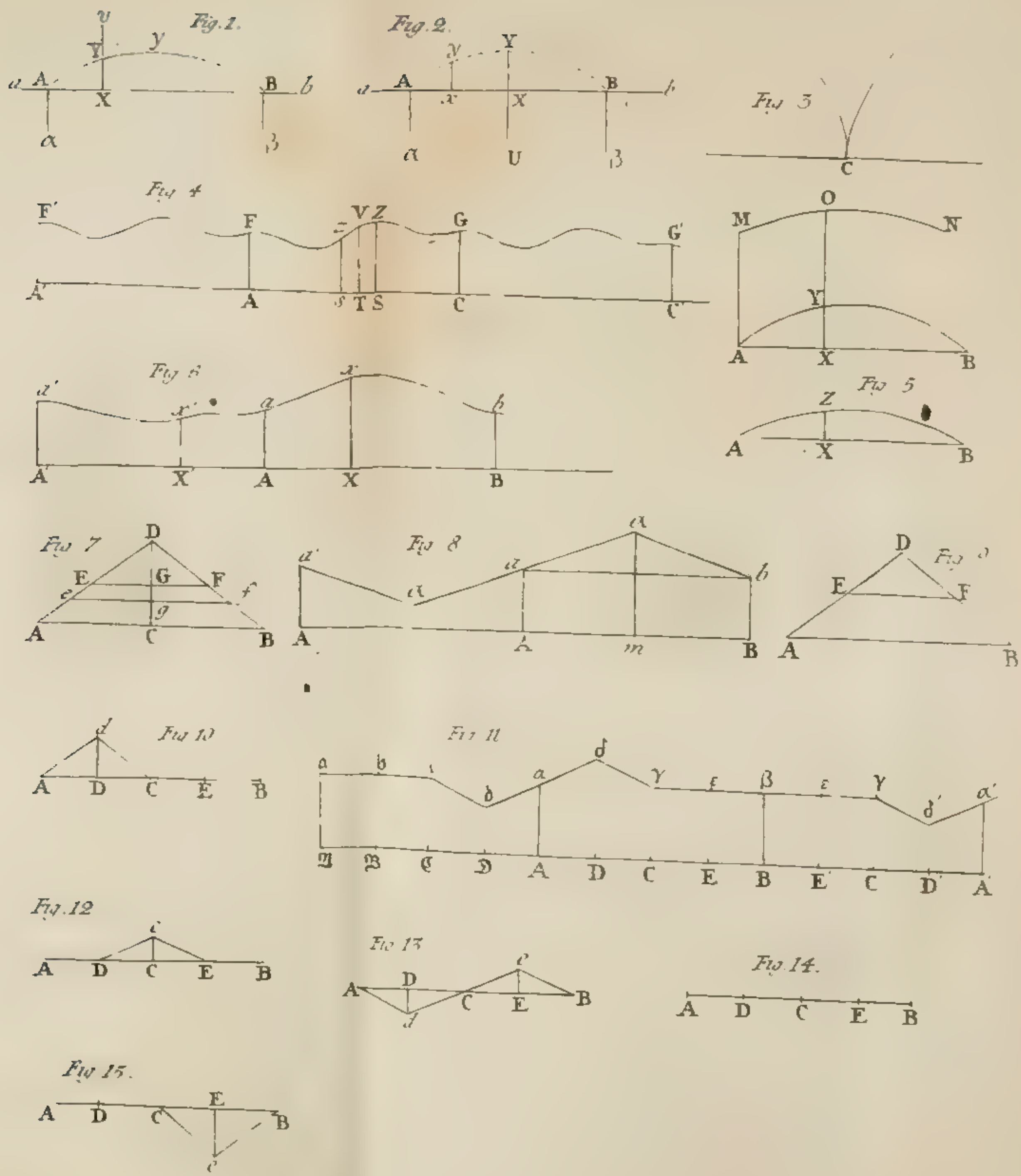


Fig 1
G
F
B
H
C
A
D
X
E
I
L
Fig 2
N
T
M
A
P
Q
B
Fig 3
A
B
M
C
N
Fig 4
D
a
A
p
M
C
q
N
B
m
Fig 5
A
E
X
S
x
O
Fig 7
E
M
A
Fig 6
K
C
X
S
A


Fig. 2.
y Y
A B b
x X
α U β
Fig. 3.
C
G G′
C C′
O
M N
Y
A X B
Fig. 5.
Z
A X B
b
B
Fig. 8.
α
a b
α′
A m B
D
Fig. 9.
E F
A B
Fig. 11.
δ
b c a γ ε β ε′ γ′ α′
b δ′
D A D C E B E′ C′ D′ A′
Fig. 13.
e
D
C E B
d
Fig. 14.
A D C E B


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14.
Fig. 15.

1.



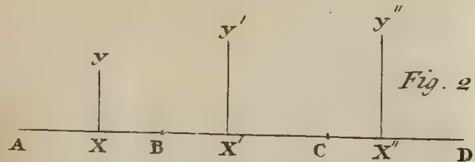
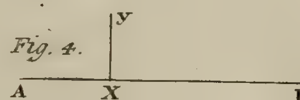


Fig. 2.

Fig. 4.



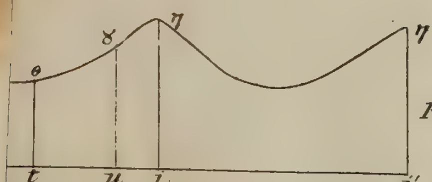


Fig. 3.

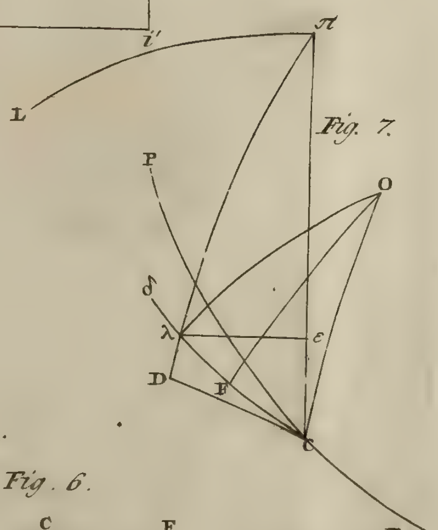
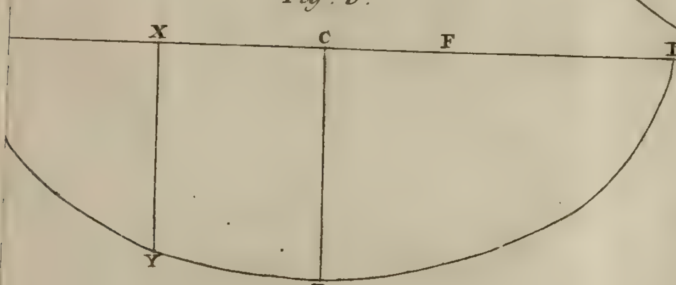


Fig. 7.



Fig. 6.



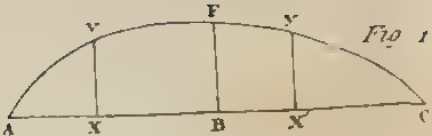


Fig. 1

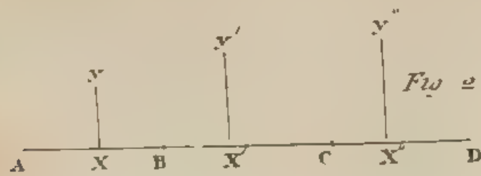


Fig. 2

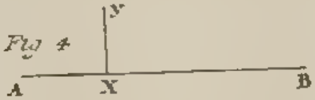


Fig. 4

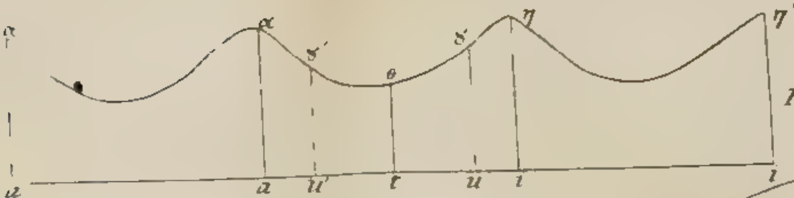


Fig. 3

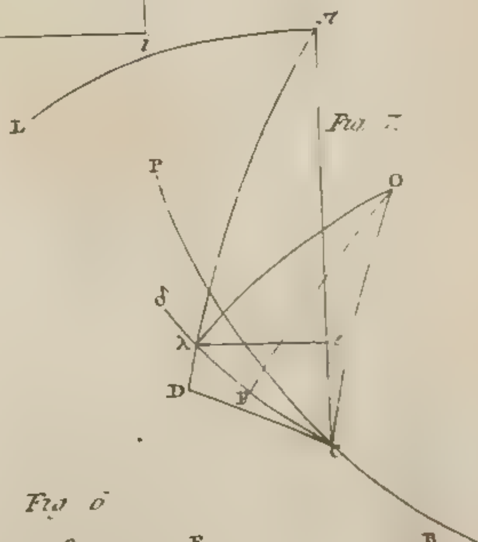


Fig. 7

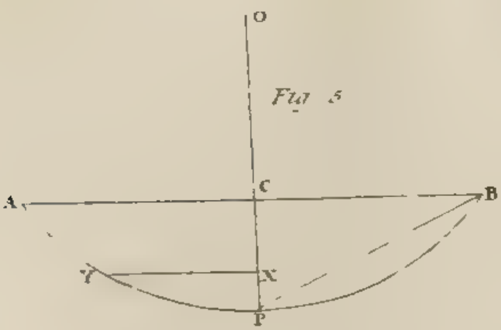
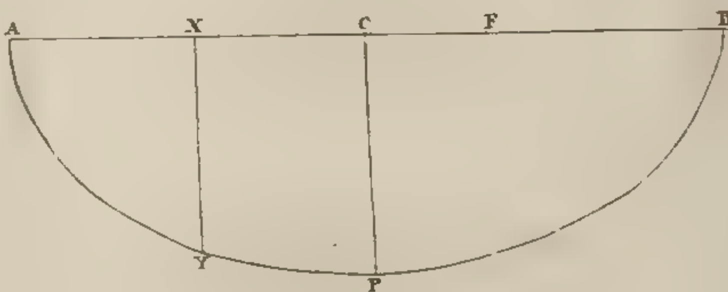


Fig. 5

Fig. 6



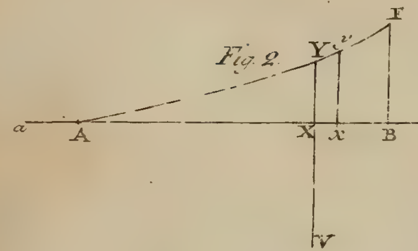


Fig. 2.

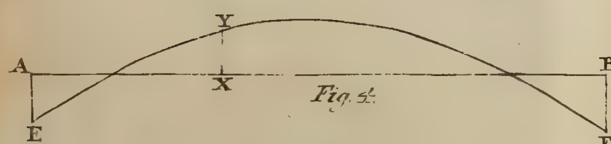


Fig. 5.

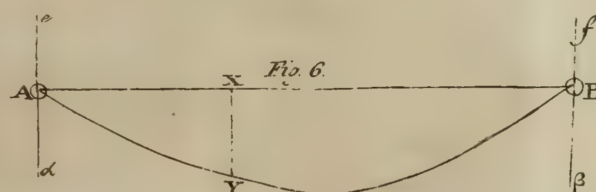
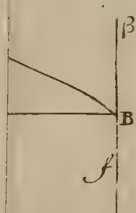


Fig. 6.



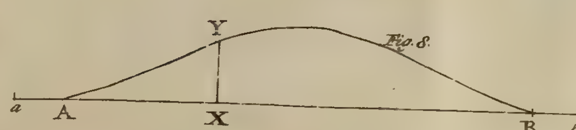


Fig. 8.

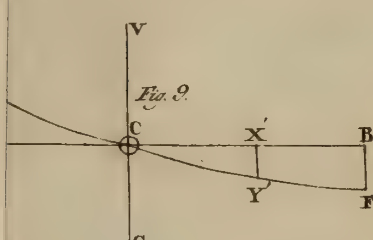
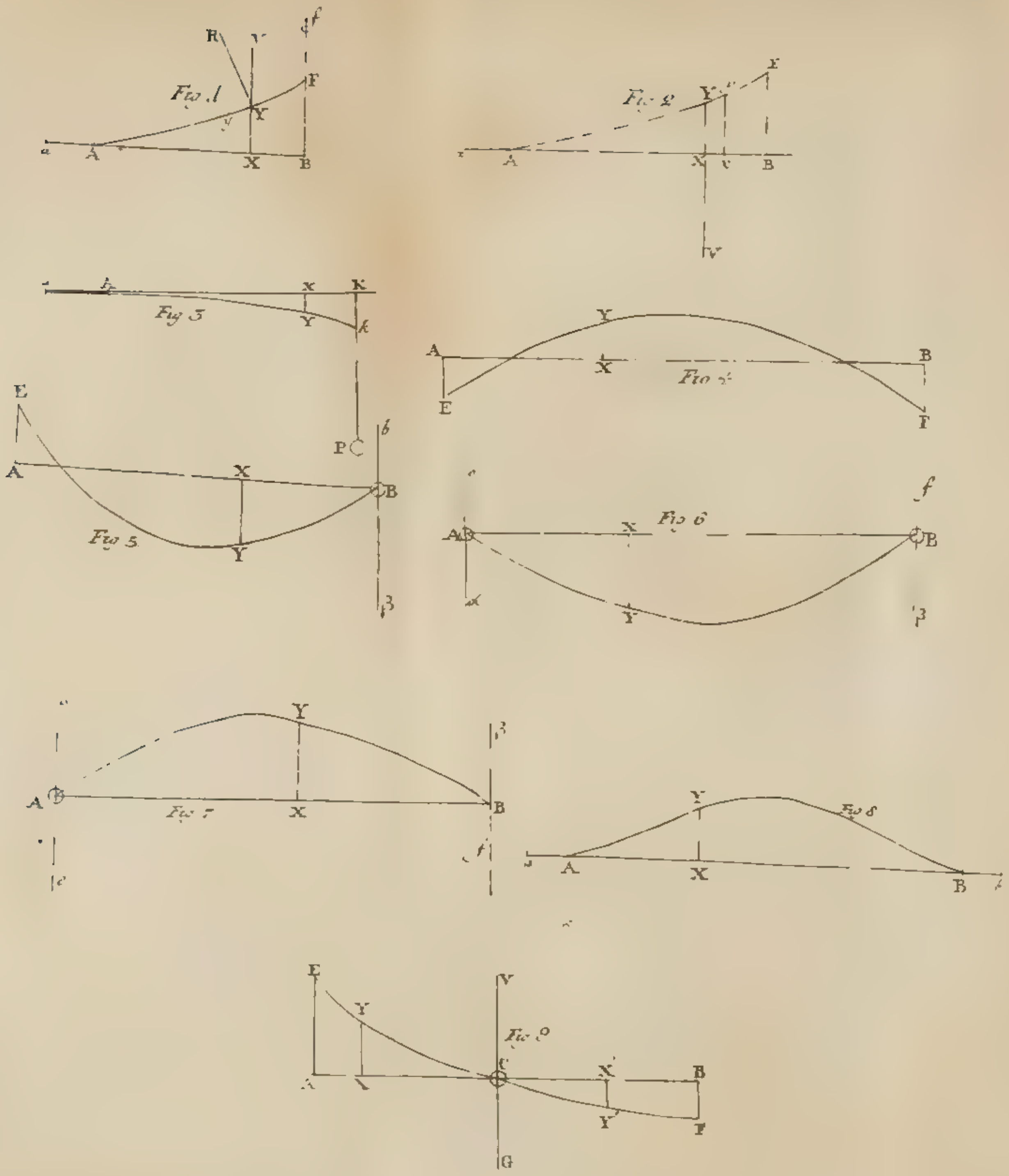


Fig. 9.


Fig. 1
R
V
f
F
Y
A
X
B
Fig. 2
Y
A
X
B
V
Fig. 3
X
K
Y
k
P
Fig. 4
A
X
B
E
F
Y
Fig. 5
E
A
X
B
Y
b
β
Fig. 6
A
X
B
Y
f
α
β
Fig. 7
A
X
B
Y
β
f
Fig. 8
A
X
B
Y
Fig. 9
E
Y
V
C
X
B
Y
F
G



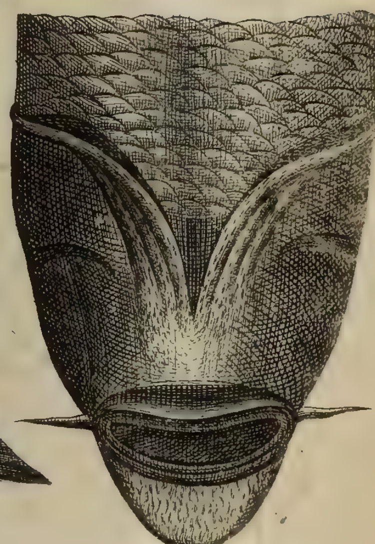


Fig. 2.

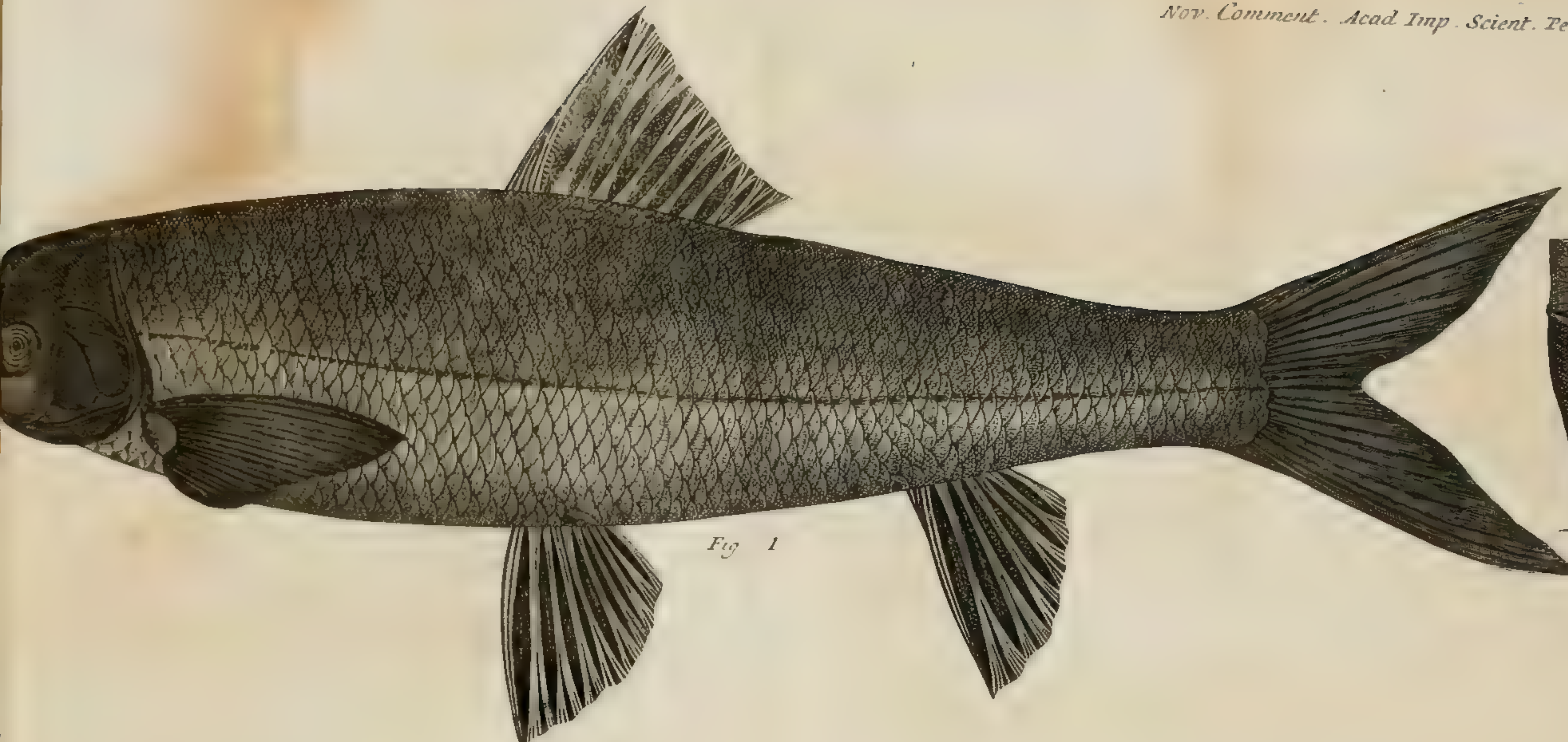


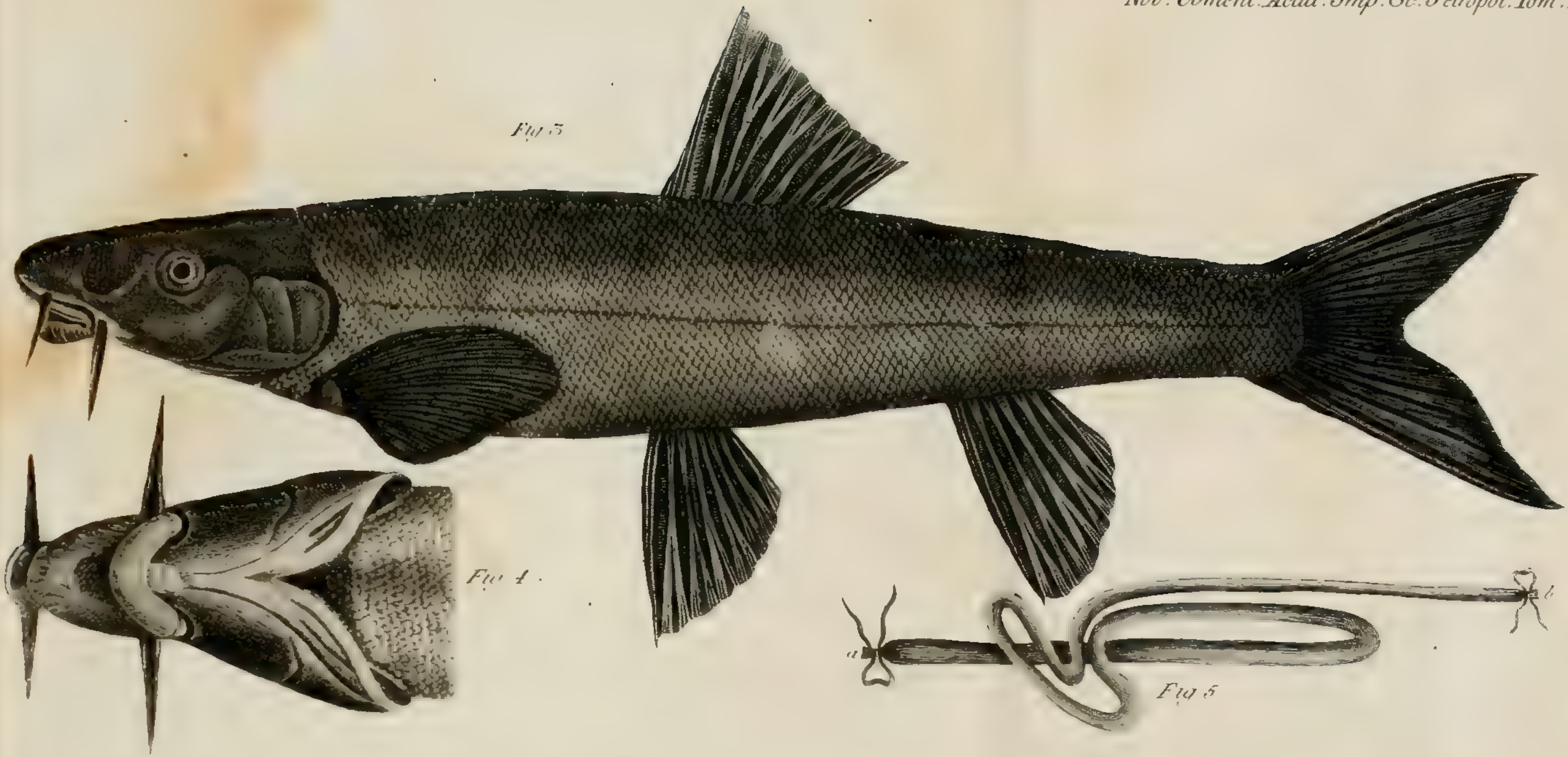
Fig. 1



Fig. 2



Fig. 5.


Fig 3
Fig 4.
a
b
Fig 5

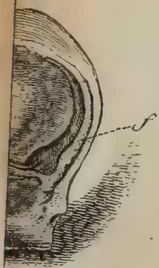


Fig. 3.

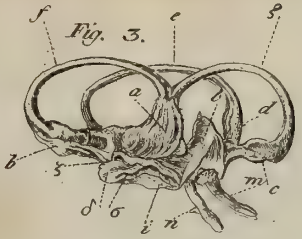


Fig. 4.

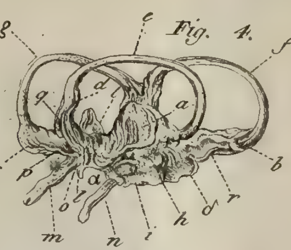


Fig. 8.

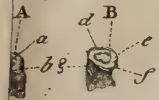


Fig. 9.



Fig. 10.

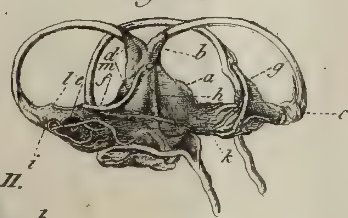
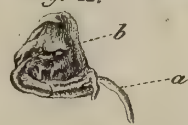


Fig. 11.



12.

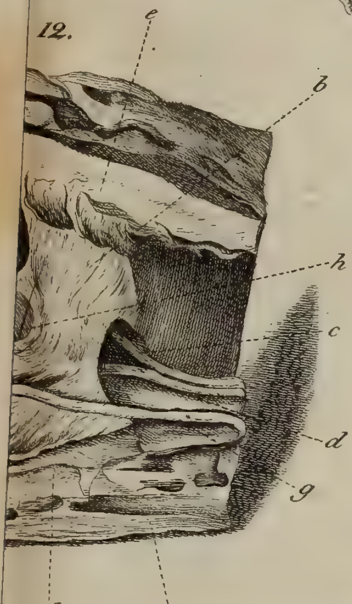
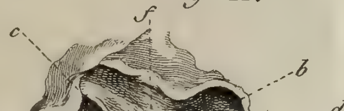


Fig. 13.



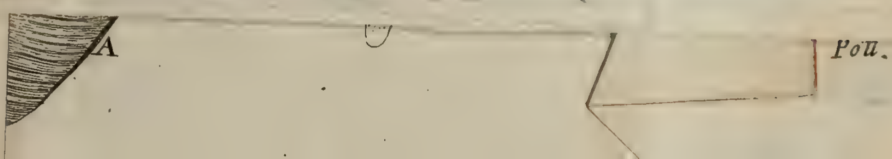



Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.

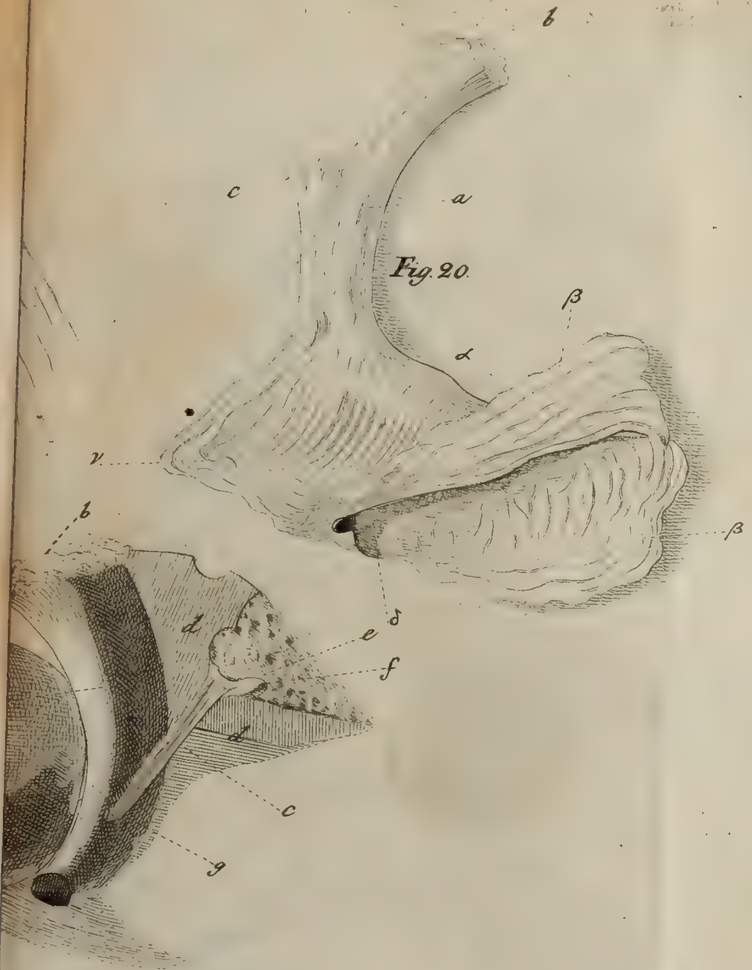


Fig. 20.

A

Poll.

Fig. 18.

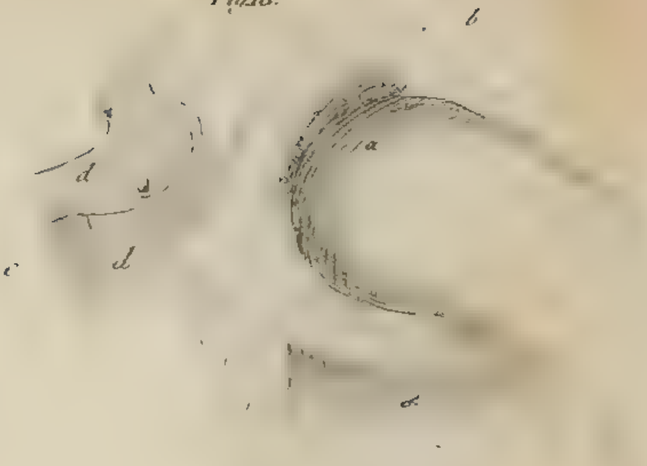


Fig. 20.

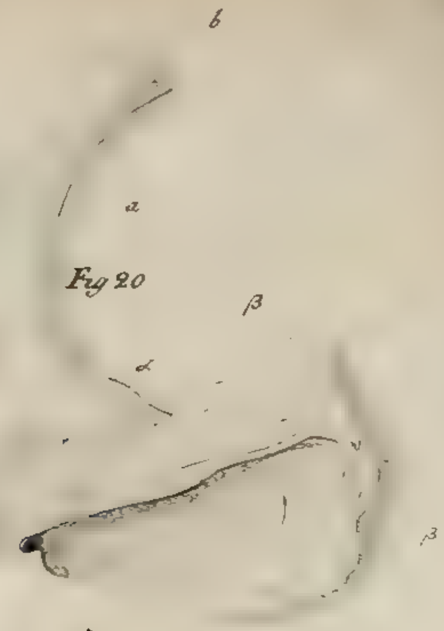
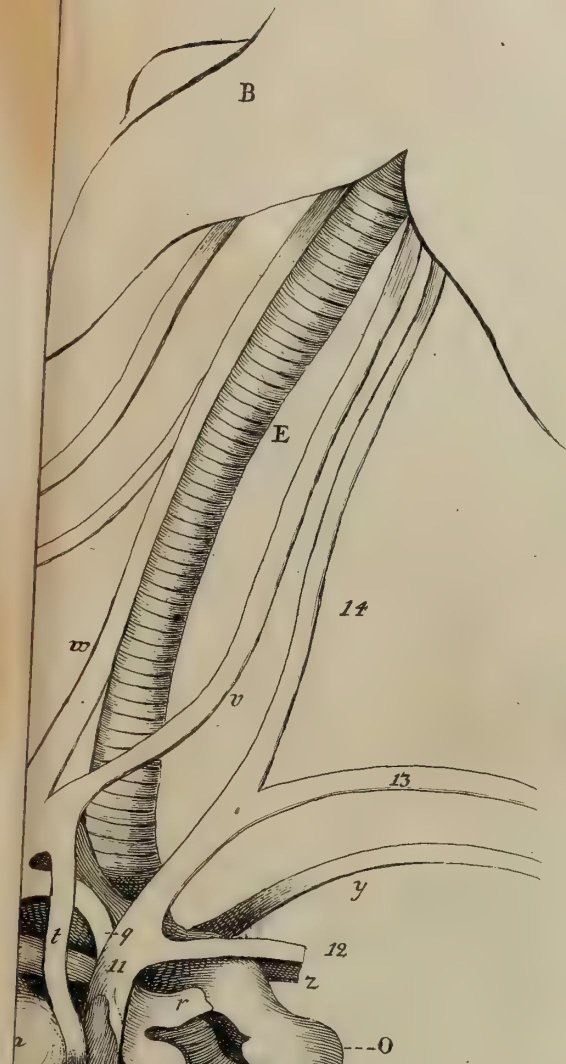


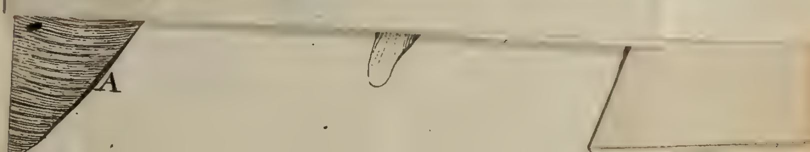
Fig. 19.



Fig. 21.







Pott.

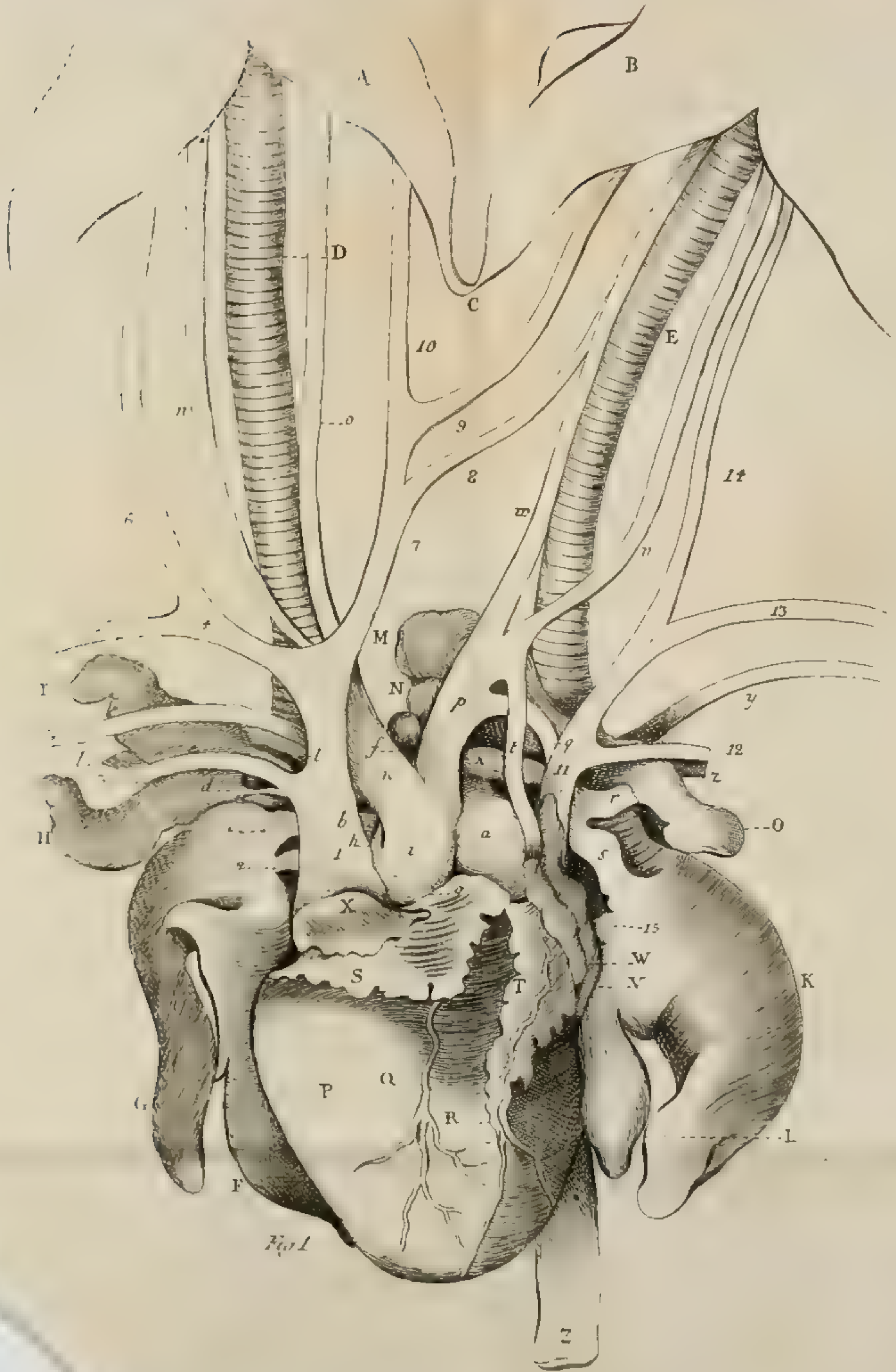
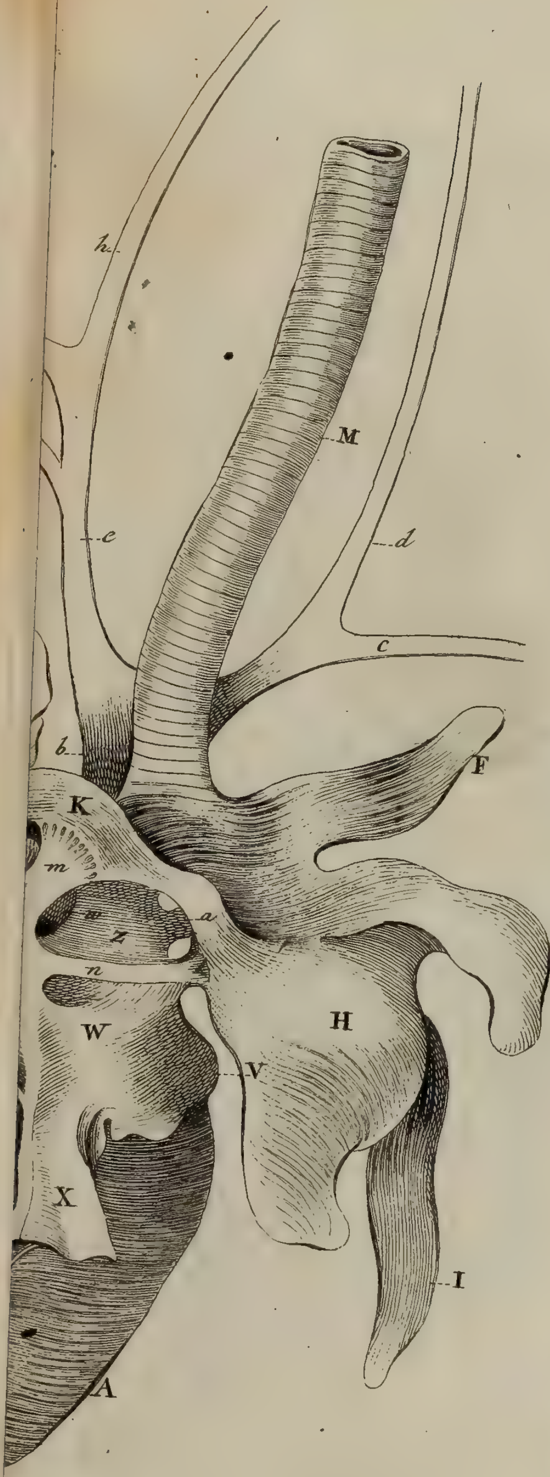
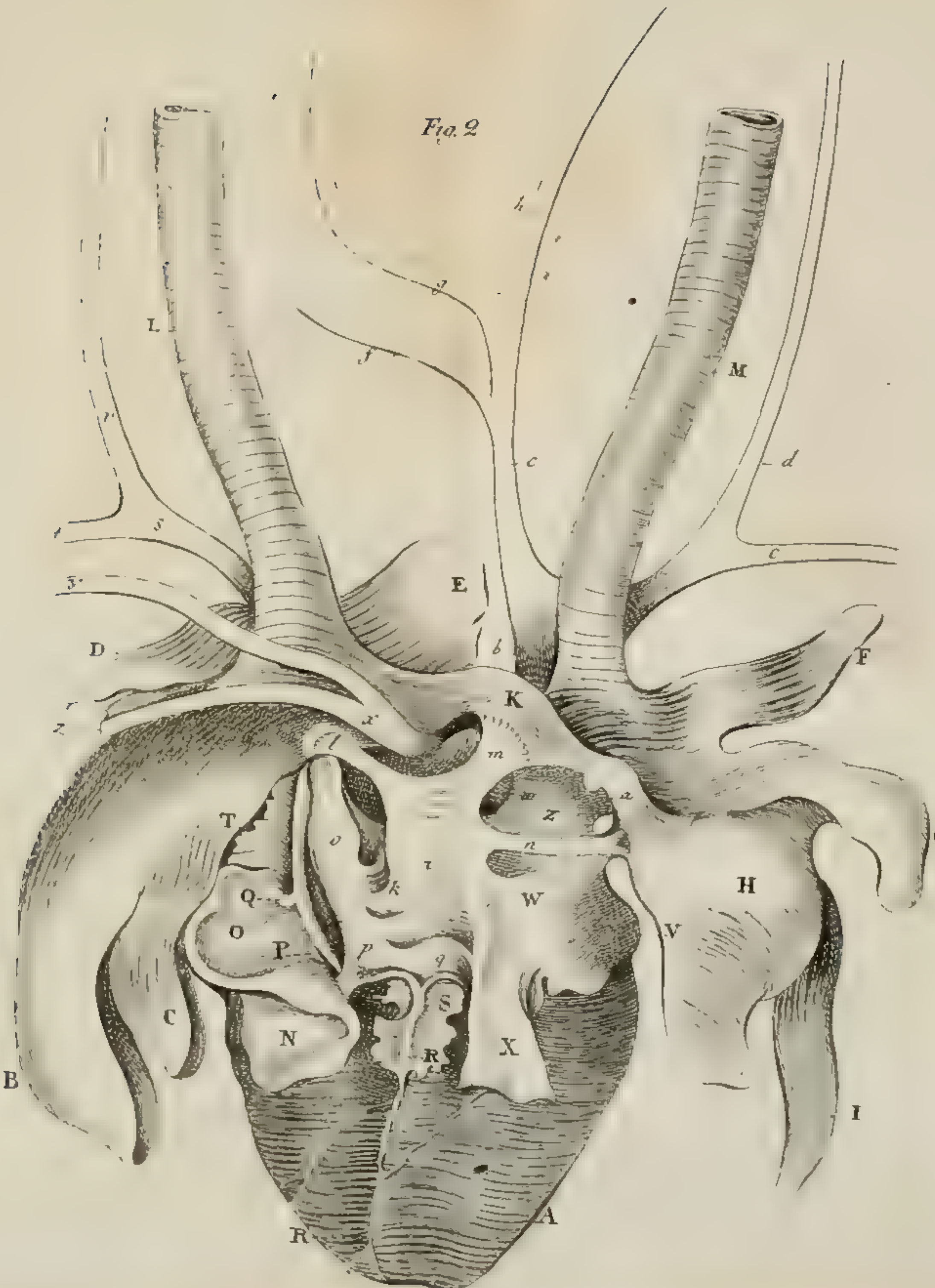


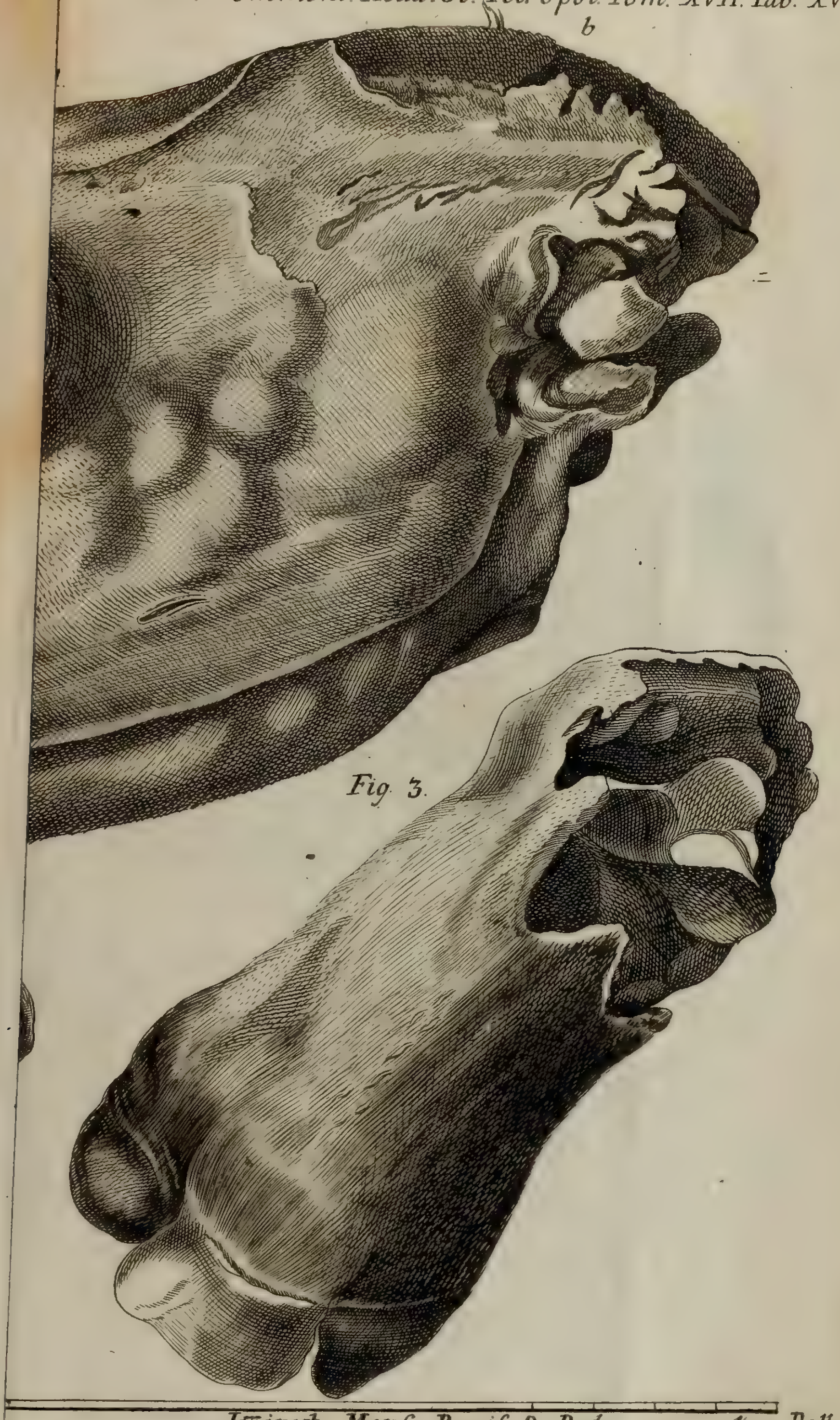
Fig. 1



Poll.

Fig. 2




b
Fig. 3.
Iminid. Menſ. Pariſ. 2 Ped. 4 Poll.

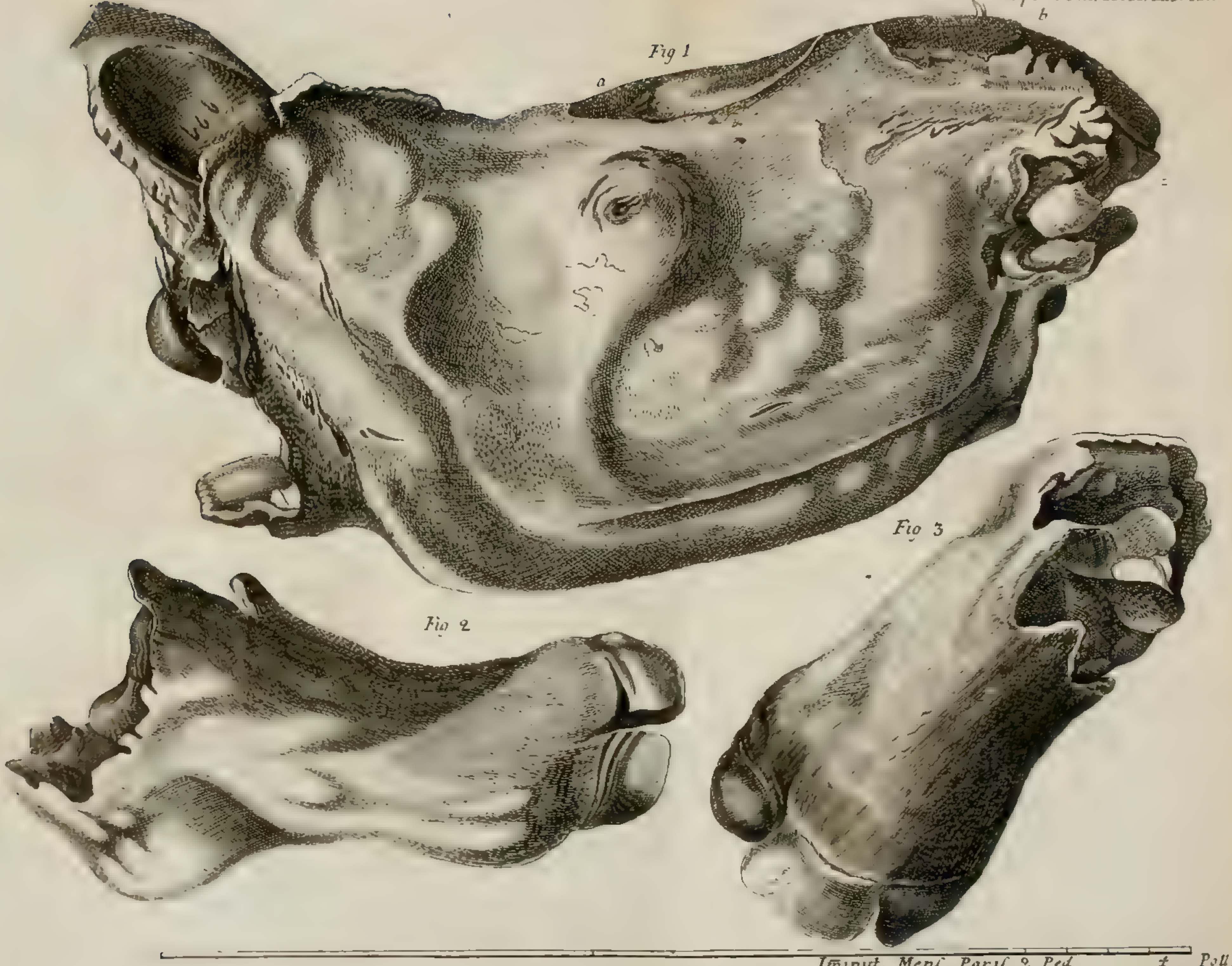

b
Fig 1
a
Fig 3
Fig 2
Iminut. Menſ. Pariſ 2 Ped. 4 Poll.

Fig. 2



Fig. 1.



2 Ped. Pariſ.


Fig. 2
Fig. 1
Fig. 4
Fig. 3
a
b
c
d
1
2 Ped. Pariſ



Fig. 3.



12 poll. Pariſ.

Fig. 1



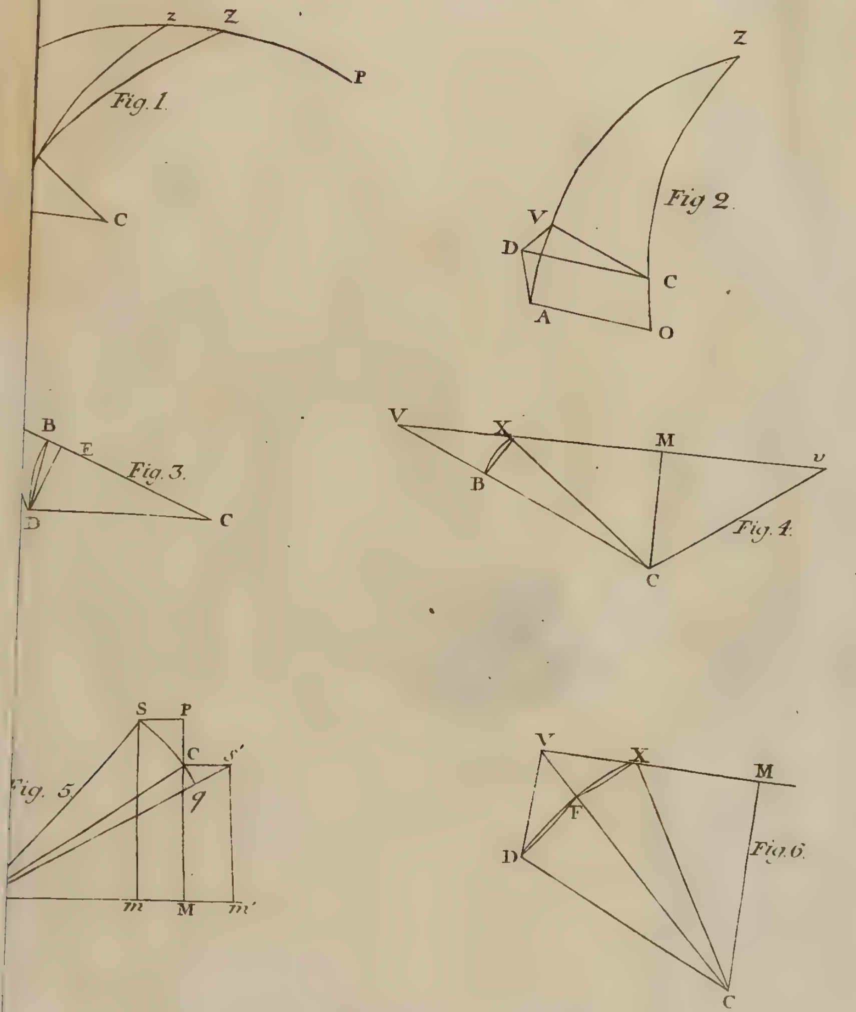
Fig. 2

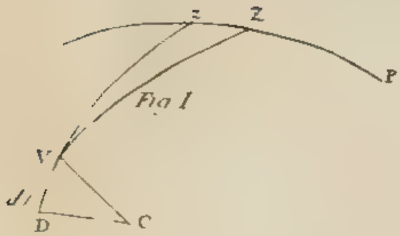


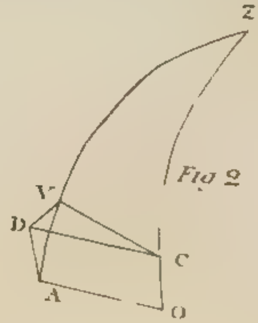
Fig. 3

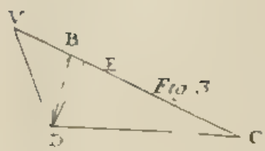


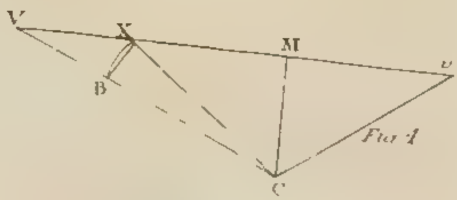
12 poll. Parif.

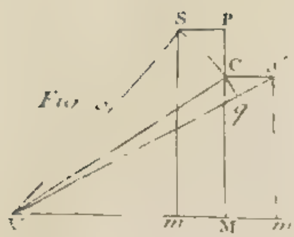

Fig. 1.
z
Z
P
C
Fig. 2.
Z
V
D
C
A
O
Fig. 3.
B
E
D
C
Fig. 4.
V
X
M
v
B
C
Fig. 5.
S
P
C
s′
q
m
M
m′
Fig. 6.
V
X
M
F
D
C

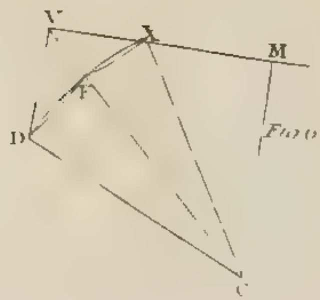

z
Z
P
Fig 1
V
D
C


Z
Fig 2
V
D
C
A
O


V
B
E
Fig 3
C


V
X
M
B
Fig 4
C


S
P
C
q
m
M
m


V
X
M
F
D
C

BOUND BY